Jaime Carvalho e Silva

Princípios de **Análise Matemática Aplicada**

Suplemento

2002/2003

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Contacto com o autor:
jaimecs@mat.uc.pt

Página de apoio:
http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/index_aulas.html

Índice

Regra XIII

"**Se compreendermos perfeitamente uma questão, devemos abstraí-la de todo o conceito supérfluo, reduzi-la à sua maior simplicidade e dividi-la em partes tão pequenas quanto possível enumerando-as**"

(...) frequentemente alguns põem-se a investigar proposições com tanta precipitação que aplicam à sua solução um espírito errante e aventureiro, antes de notarem por que sinais reconhecerão o objecto procurado, se ele acabar por se apresentar. Não são menos ineptos do que um servidor enviado a qualquer lado pelo seu senhor e que estivesse tão desejoso de obedecer que se pusesse a correr precipitadamente sem ter ainda recebido ordens e sem saber onde se lhe mandava ir.

Descartes "Regras para a direcção do espírito"

I.11 Funções inversas

Se uma variável dependente y está relacionada com a variável independente x por meio da função f, isto é, se $y = f(x)$, ficamos a saber exactamente como y varia quando x varia.

Poderemos contudo estar interessados em saber como varia a mesma variável x quando fazemos variar y, isto é, como muda a variável x em função da variável y, o que significa encontrar uma outra função g tal que y passe a ser a variável independente passando x a ser a variável dependente, isto é, encontrar uma outra função g tal que $x = g(y)$.

Esta função g pode existir ou não. Se existir, chama-se a ***função inversa*** de f e designa-se por f^{-1}.

Quando existirá a função g?

Suponhamos que f faz corresponder a cada elemento de um conjunto A um e um só elemento de um outro conjunto B:

$$f\colon A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

Para a função *g* estar bem definida é preciso que a cada elemento do conjunto B corresponda um e um só elemento do conjunto A:

$$g: B \longrightarrow A$$
$$y \longmapsto x = g(y)$$

Assim, para *g* estar bem definida é preciso que a cada $y \in$ B corresponda um e um só elemento $x \in$ A, ou seja:

1) Cada $y \in$ B tenha um transformado $x \in$ A (por meio de *g*);

2) Dado o elemento y de B então só lhe corresponde <u>um único</u> $x \in$ A, isto é

$$\underset{y \in B}{\forall} \quad \underset{x \in A}{\exists^1} \quad : \quad f(x) = y.$$

Reescrevendo as duas condições em termos da função *f*,

1) Cada $y \in$ B seja transformado (por meio de *f*) de algum $x \in$ A;

2) Aos elementos de A correspondem (por meio de *f*) diferentes elementos de B.

Ou seja,

1) f é sobrejectiva;

2) f é injectiva.

Em conclusão: **para que a função $g = f^{-1}$ exista é preciso que *f* seja sobrejectiva e injectiva, isto é, bijectiva**. Em face do que foi visto é claro que, se a inversa existir, será única. Também é óbvio que se *f* é invertível, f^{-1} também será invertível (também é bijectiva) e a inversa de f^{-1} será exactamente a função *f*.

Comparemos o gráfico de *f* e da sua inversa.

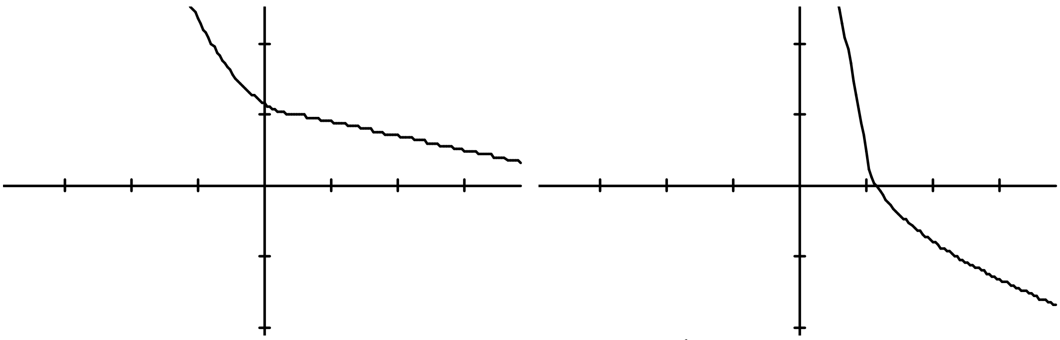


Fig 1: Gráficos de f e f^{-1}

Os gráficos das duas funções são simétricos em relação à recta $y = x$, como se pode observar nos respectivos gráficos, e é ainda mais claro sobrepondo os gráficos das duas funções no mesmo referencial:

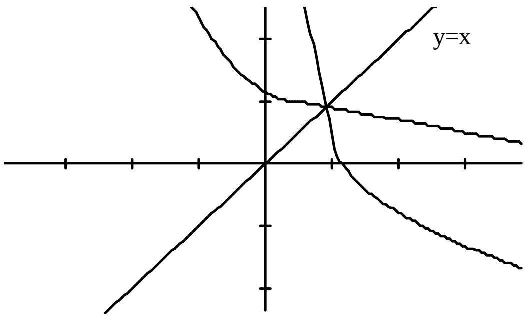


Fig 2: Gráficos de f e f^{-1} sobrepostos

Se uma função não for injectiva, claro que não se pode inverter. Isso também é óbvio observando o respectivo gráfico:

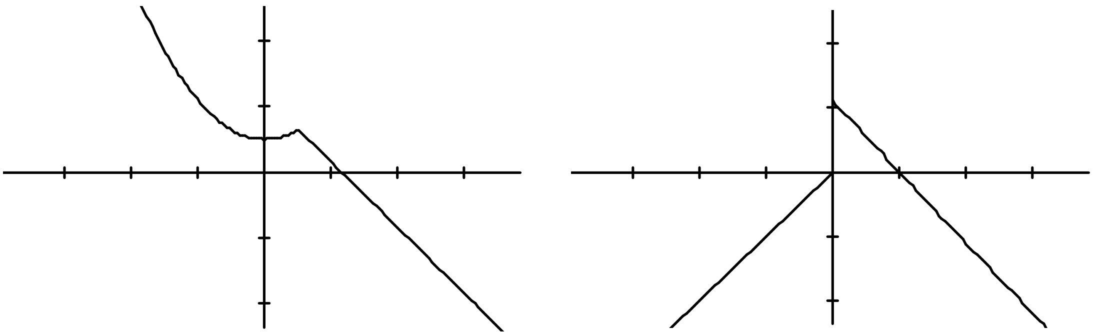


Fig 3: Gráficos de funções não invertíveis

Outra forma de observar isso é traçando os desenhos simétricos em relação à recta *y* = *x*, e constatando que os desenhos obtidos não podem ser o gráfico de qualquer função:

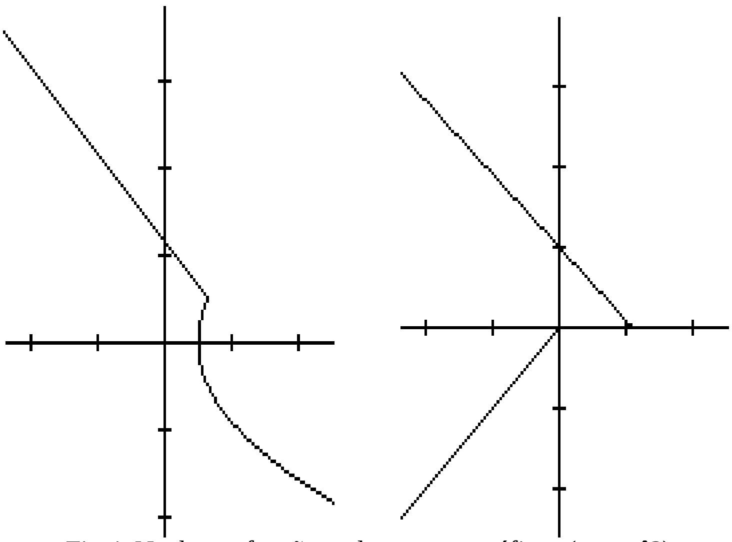


Fig 4: Nenhuma função pode ter estes gráficos (porquê?)

As funções invertíveis não precisam de ser contínuas

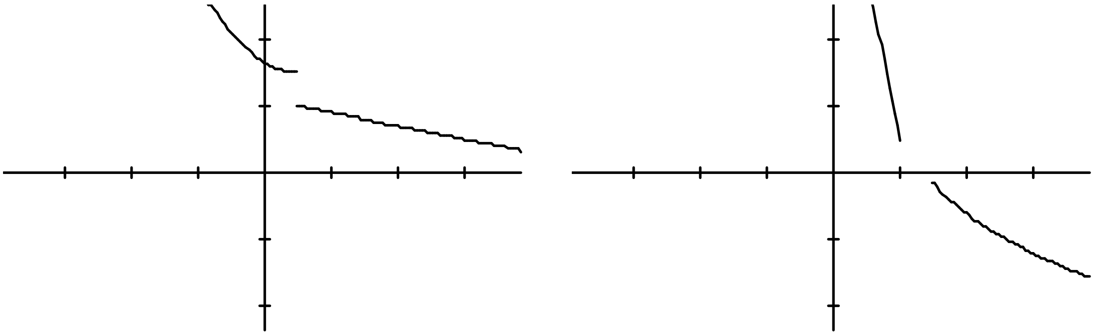


Fig 5: Gráficos de funções descontínuas (no seu domínio) e invertíveis

nem precisam de ser monótonas:

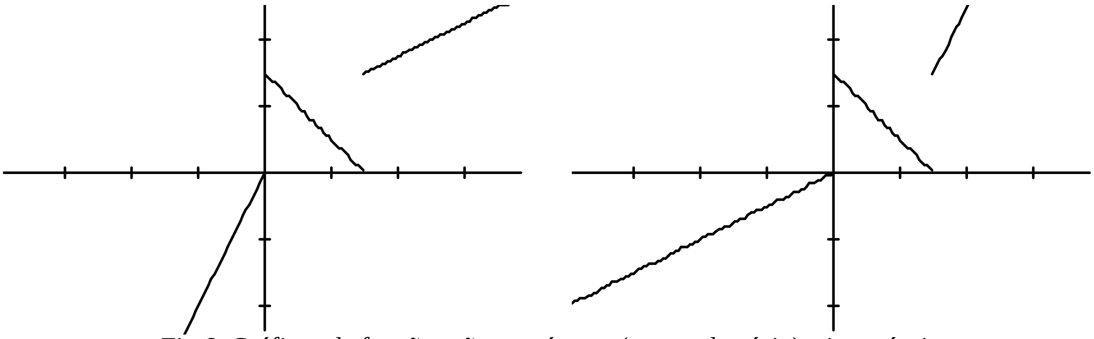


Fig 6: Gráficos de funções não monótonas (no seu domínio) e invertíveis

Curiosamente, uma função pode ser igual à sua inversa:

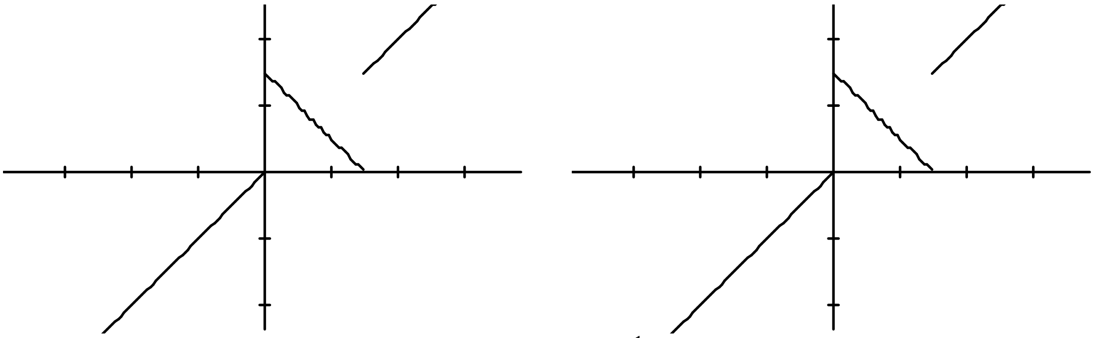


Fig 7: Gráficos de f e f^{-1} (iguais)

Nos exemplos das figuras 1 e 5, as funções dadas são monótonas e as suas inversas também o são. Mesmo no exemplo da figura 6, em cada intervalo onde a função dada é monótona a sua inversa também é monótona. Será isto verdade em geral?

Teorema I.11.1

Seja f uma função invertível. Se f é estritamente monótona no conjunto A então f^{-1} também é estritamente monótona no conjunto f(A) (e o sentido da monotonia é o mesmo).

Demonstração

Vamos fazer a demonstração para o caso de f ser estritamente crescente.

Se f é estritamente crescente em A então, dados dois quaisquer pontos x_1 e x_2 do conjunto A, se $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$; simbolicamente

$$\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Mas, se f é invertível, podemos escrever que, se

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$$

então

$$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$$

e, assim, a monotonia estrita de f pode ser escrita como

$$\underset{y_1, y_2 \in f(A)}{\forall} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Rightarrow y_1 < y_2$$

Mas, a lógica matemática diz-nos que

$$\left[f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Rightarrow y_1 < y_2\right] \Leftrightarrow \left[y_1 \geq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)\right]$$

Assim, temos que

$$\underset{y_1, y_2 \in f(A)}{\forall} y_1 \geq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$$

Logo, sendo $y_2 < y_1$, terá de ser $f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(y_1)$. Como f^{-1} é bijectiva (tal como *f*), não se pode ter a igualdade. Assim

$$\underset{y_1, y_2 \in f(A)}{\forall} y_2 < y_1 \Rightarrow f^{-1}(y_2) < f^{-1}(y_1)$$

e a função *f* é estritamente crescente em *f*(A). n

Esta demonstração pode ser visualizada facilmente:

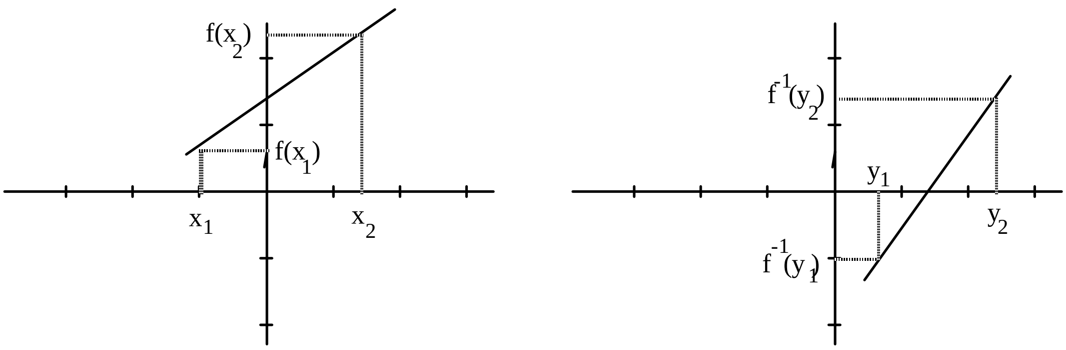


Fig 8: Monotonia de *f* "traduzida" para f^{-1}

O teorema seguinte também permite determinar propriedades das funções inversas, e será demonstrado no capítulo II.

<u>Teorema I.11.2</u>

Seja *f* uma função <u>invertível</u>. Se *f* é contínua no conjunto A então f^{-1} também é contínua no conjunto f(A).

u

Vejamos quais as funções inversas das funções trigonométricas.

A função seno não é injectiva pelo que não pode ser invertida. Contudo podemos restringir a função seno a um domínio menor de modo a obter uma função injectiva. Por exemplo, se restringirmos a função seno aos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ou $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ obtemos duas funções injectivas (que serão bijectivas se considerarmos para conjunto de chegada o contradomínio de cada restrição).

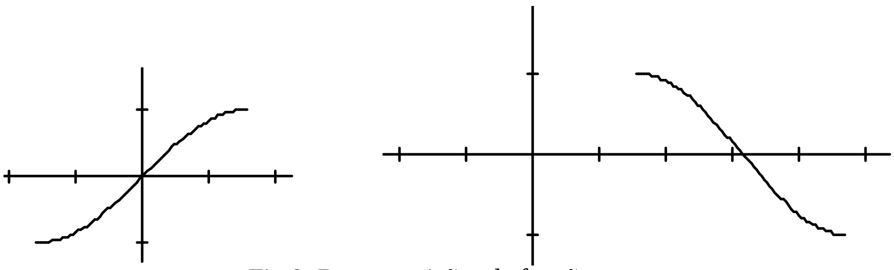


Fig 9: Duas restrições da função seno

As funções inversas são representadas graficamente por:

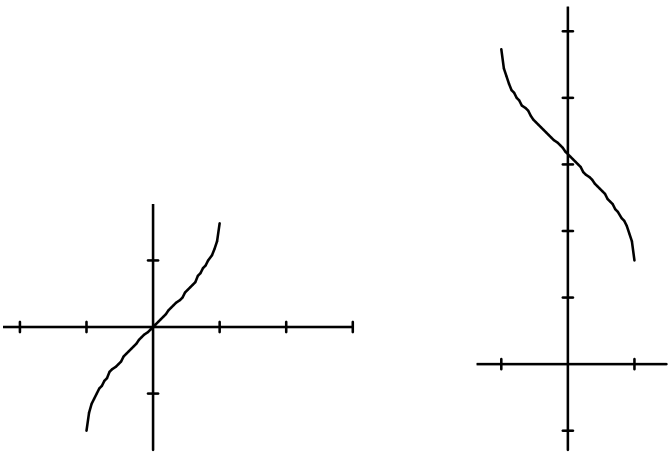


Fig 10: Funções inversas das funções da figura anterior

Pelos teoremas I.11.1 e I.11.2 podemos concluir que ambas as funções inversas obtidas são monótonas e contínuas no respectivo domínio (sempre [-1,1]).

Por definição, a função **arco-seno**, designada por **arcsen** é a primeira das funções inversas que obtivemos. A segunda pode ser obtida a partir desta através de

$$\bullet \ - \operatorname{arcsen}(x)$$

Como outras restrições da função seno se podem obter a partir de **arcsen**, estudamos apenas esta.

A função co-seno também não é injectiva pelo que também não pode ser invertida. Contudo podemos restringir a função co-seno de modo a obter uma função injectiva. Por exemplo, se restringirmos a função co-seno aos intervalos $[0,\pi]$ ou $[\pi,2\pi]$ obtemos duas funções injectivas (que serão bijectivas se considerarmos para conjunto de chegada o contradomínio de cada restrição).

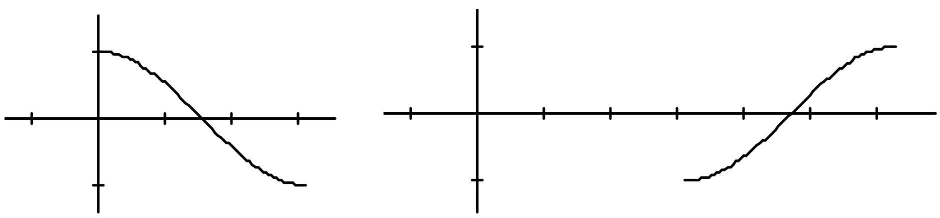


Fig 11: Duas restrições da função co-seno

As funções inversas são representadas graficamente por:

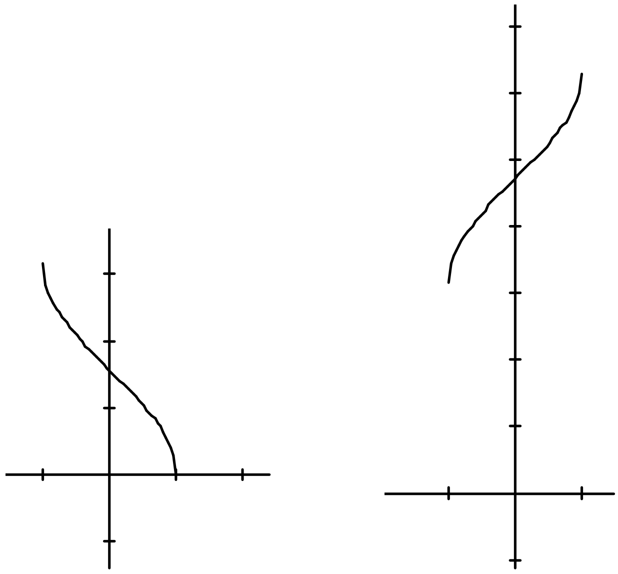


Fig 12: Funções inversas das funções da figura anterior

Pelos teoremas I.11.1 e I.11.2 podemos concluir que ambas as funções inversas obtidas são monótonas e contínuas no respectivo domínio.

Por definição, a função **arco-seno**, designada por **arccos** é a primeira das funções inversas que obtivemos. A segunda pode ser obtida a partir desta através de

$$2\bullet - \arccos(x)$$

A função tangente também não é injectiva pelo que também não pode ser invertida. Contudo podemos restringir a função tangente de modo a obter uma função injectiva. Por exemplo, se restringirmos a função tangente aos intervalos $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ou $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ obtemos duas funções injectivas (que serão bijectivas se considerarmos para conjunto de chegada o contradomínio de cada restrição).

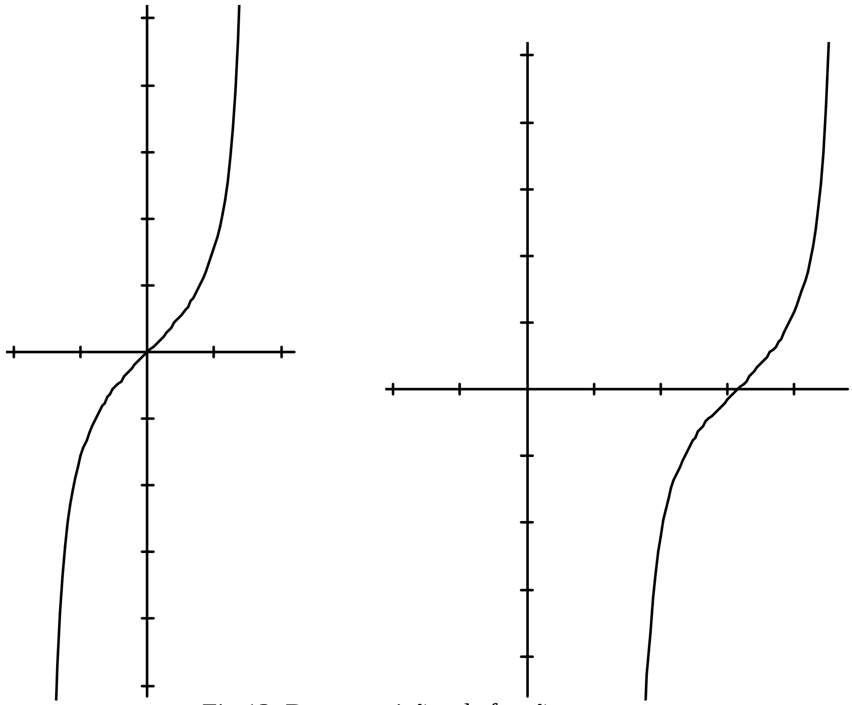
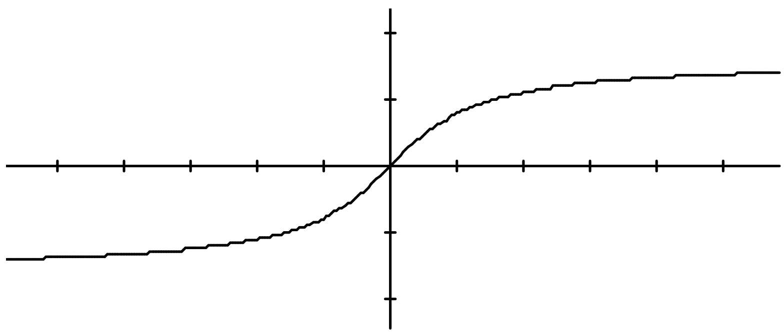


Fig 13: Duas restrições da função tangente

As funções inversas são representadas graficamente por:



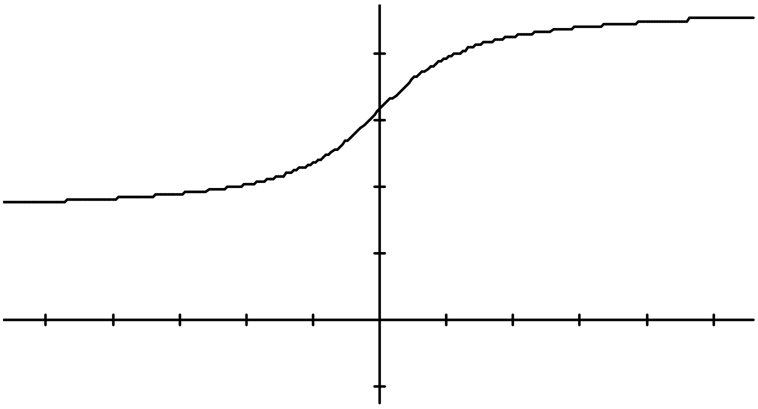


Fig 14: Funções inversas das funções da figura anterior

Pelos teoremas I.11.1 e I.11.2 podemos concluir que ambas as funções inversas obtidas são monótonas e contínuas no respectivo domínio.

Por definição, a função **arco-tangente**, designada por **arctg** é a primeira das funções inversas que obtivemos. A segunda pode ser obtida a partir desta através de

• + arctg(x)

Outras funções trigonométricas inversas podem ser obtidas pelo mesmo processo:

$$y = \text{arcsec}\, x \quad \Leftrightarrow \quad \sec y = \frac{1}{\cos y} = x\,, \quad 0 < y < \pi,\ y \neq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \text{arccosec}\, x \quad \Leftrightarrow \quad \text{cosec}\, y = \frac{1}{\text{sen}\, y} = x\,, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ y \neq 0$$

$$y = \text{arccotg}\, x \quad \Leftrightarrow \quad \text{cotg}\, y = \frac{\cos y}{\text{sen}\, y} = x\,, \quad 0 < y < \pi$$

Várias fórmulas relacionam estas funções:

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad x > 0$$
$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arccosec}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x + \operatorname{arcsen} x + \arccos x = \operatorname{arccosec} x + \operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2}$$

Vejamos como se pode obter a primeira destas fórmulas.
Sejam

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad , \quad z = \frac{\pi}{2} - y$$

Temos

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen} y \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \\ &= \cos z \end{aligned}$$

Assim, como $z \in [0,\pi]$ (visto que $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$), vem

$$z = \arccos x$$

e portanto

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x$$

que é equivalente ao pretendido.

u

Vejamos quais as funções inversas das funções hiperbólicas.

A função seno hiperbólico é bijectiva de R em R pelo que pode ser invertida.

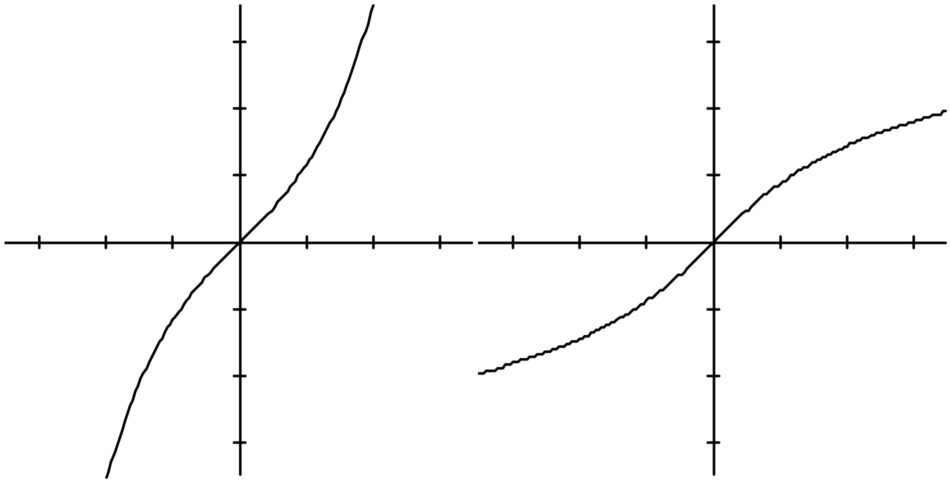


Fig 15: Função seno hiperbólico e sua inversa

Como

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

podemos obter a sua função inversa **argsenh** x em termos da função logarítmica (tal como vem na pág 27 do Livro de Texto):

$$\operatorname{argsenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

A função co-seno hiperbólico já não é injectiva pelo que não pode ser invertida. Contudo podemos restringir a função co-seno hiperbólico de modo a obter uma função injectiva. Há, essencialmente, dois modos de o fazer: restringindo a função aos intervalos]-• ,0] ou [0,+• [obtemos duas funções injectivas (que serão bijectivas se considerarmos $[1,+\infty[$ como conjunto de chegada).

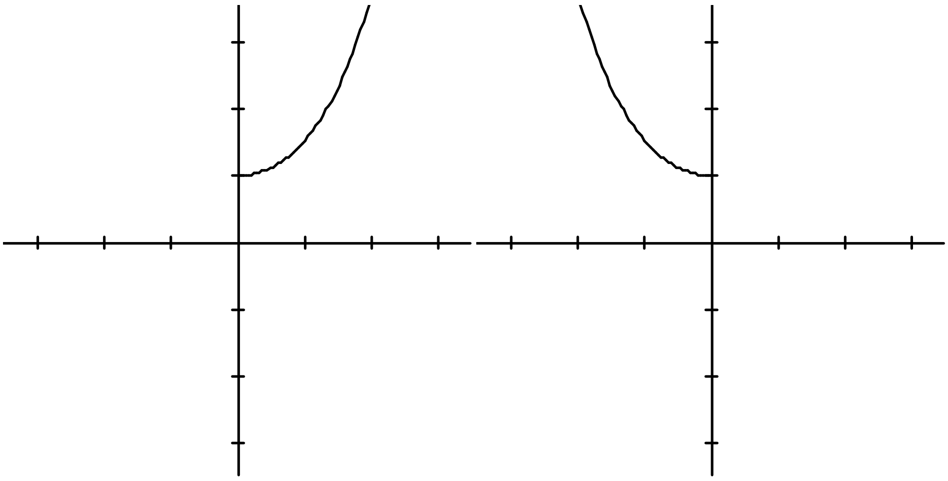


Fig 15: Duas restrições da função co-seno hiperbólico

As funções inversas são representadas graficamente por:

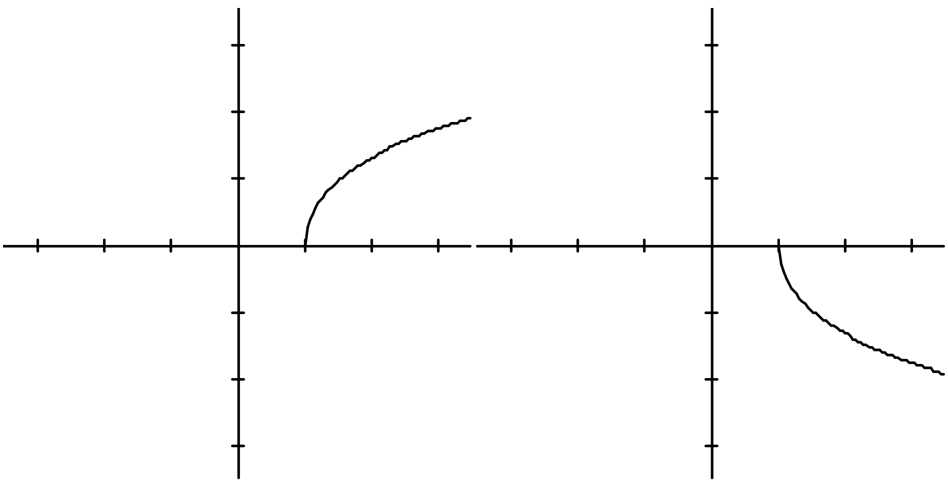


Fig 15: Duas restrições da função co-seno hiperbólico

Por definição, a função **argumento co-seno hiperbólico**, designada por

argcosh é a primeira das funções inversas que obtivemos. A segunda pode ser obtida a partir desta através da primeira (como?).

Como

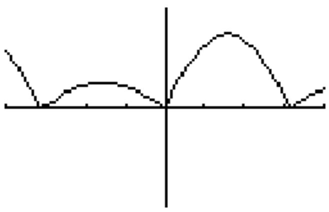
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

podemos obter a função inversa **argcosh** x em termos da função logarítmica:

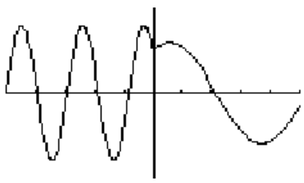
$$\arg\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad , \quad x \geq 1$$

Exercícios

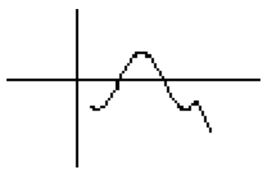
1• Indique quais das funções, cujos gráficos são apresentados a seguir, têm inversas:



A



B



C

2• Para cada uma das correspondências abaixo apresentadas indique quais definem uma função invertível:

i) f: R\]0,2] $\rightarrow$ R
x α f(x) tal que
$$f(x) = \begin{cases} x & se \ \ x \leq 0 \\ -5x & se \ \ x > 2 \end{cases}$$

ii) f: R\]-2,2] $\rightarrow$ R
x α f(x) tal que

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} -x & se \quad x \leq 0 \\ -5x & se \quad x > 2 \end{cases} \qquad \mathrm{f}(x) = \begin{cases} 2x & se \quad x \leq 0 \\ -5x & se \quad x > 1 \end{cases}$$

iii) f: R\]-2,4] $\to$ R
x α f(x) tal que

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} -x^2 & se \quad x \leq 0 \\ -5x & se \quad x > 2 \end{cases}$$

iv) f: R\]-4,4] $\to$ R
x α f(x) tal que

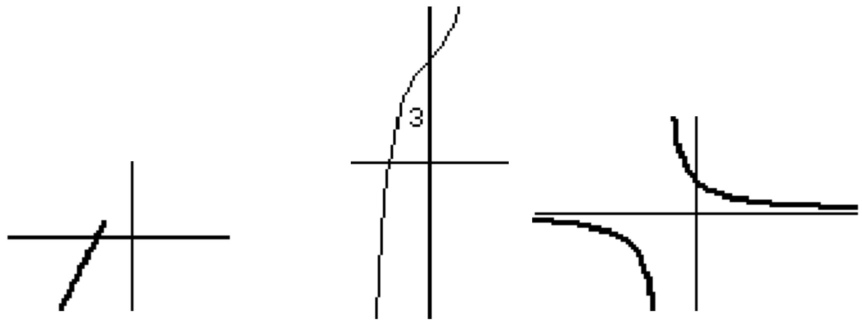
$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \leq 0 \\ -5x & se \quad x > 2 \end{cases}$$

v) f: R\Q $\longrightarrow$ R
x α • x

vi) f: R $\longrightarrow$ R
x α $\dfrac{|x|}{x}$

vii) f: R\]-4,4] $\to$ R
x α f(x) tal que

3• Esboce as funções inversas das funções cujos gráficos são representados a seguir



A **B** **C**

4• Determine analiticamente as funções inversas das funções definidas por:

a) $2x - 1$ b) $\dfrac{2x-1}{x}$

c) $\dfrac{x}{x^2+1}$ d) $3+\sqrt{x-2}$

5• Encontre o valor exacto de $\sec\left[\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right]$.

Resolução: Fazendo

$$t = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{3}{4}\right)$$

queremos determinar $\sec t$. Mas

$$\operatorname{sen} t = -\frac{3}{4} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\cos t &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\\ &= \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\\ &= \frac{\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

e assim

$$\sec t = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4}{7}\sqrt{7}$$

6• Encontre valores exactos de:

a) $\operatorname{arcsen}(-1)$ b) $\operatorname{arctg}(-1)$

c) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $\cos\left[\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right]$

e) $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right]$

7• Determine:

a) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(7\pi))$ b) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}\right)$

c) $\arccos\left(\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right)\right)$ d) $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

8• Recebi, por correio electrónico, a seguinte questão:

> Estou a trabalhar na programação em computador de um problema que determina as milhas náuticas entre dois pontos de que se conhecem a latitude e a longitude. A fórmula que devo utilizar é

$$dist = R * \arccos[\operatorname{sen}(lat1) * \operatorname{sen}(lat2) +$$
$$+ \cos(lat1) * \cos(lat2) * \cos(long1 - long2)]$$

onde *R* = raio da terra = 3957 milhas.
Como é que eu obtenho a função ARCCOS quando o meu computador apenas tem as funções COS, SEN, TAN e ARCTAN?

Como responderia a esta pessoa?