Diâmetros de bolas de Hölder

João Filipe Queiró
Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Diâmetros de operadores em espaços normados

Sendo S um conjunto num espaço normado (V,ψ), há várias maneiras de definir "diâmetros" de S. Um exemplo clássico é o seguinte. Seja M um subespaço de V. O *desvio* de S relativamente a M (ou "distância de Hausdorff" entre S e M) é

$$\delta(S,M) = \sup_{x\in S}\ d(x,M) = \sup_{x\in S}\ \inf_{y\in M}\ \psi(x-y)$$

Este número mede portanto a aproximação de elementos de S por elementos de M.

Para $k \in \mathbb{N}$, o k-ésimo *diâmetro de Kolmogorov* de S é

$$d_k(S) = \inf_{\dim M = k-1}\ \delta(S,M)$$

Este número mede portanto a aproximação de S por subespaços de dimensão $k-1$.

Exemplos de propriedades triviais destes números são as seguintes:

$$d_1(S) \geq d_2(S) \geq \cdots$$

$$d_1(S) = \sup_{x\in S}\ \psi(x)$$

$$\dim(V) < k \Longrightarrow d_k(S) = 0$$

Há outras formas de definir diâmetros de conjuntos neste contexto (diâmetros de Gelfand, de Bernstein, de aproximação, etc.), mas vai-nos interessar considerar tais conceitos num contexto especial.

Sejam (U,φ) e (V,ψ) espaços normados, e seja $A : U \longrightarrow V$ um operador linear. Como é óbvio, A é determinado por $A(B_\varphi)$, onde B_φ é a bola unitária da norma φ. O estudo dos diâmetros de $A(B_\varphi)$ é então um instrumento de estudo do operador A, e tem interesse em questões de Análise Funcional, Teoria da Aproximação, Geometria de espaços de Banach, etc.[1]

Neste texto vamos restringir-nos a operadores entre espaços da mesma dimensão finita, e portanto a matrizes quadradas. A letra $\mathbb{F}$ designará $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sendo φ,ψ normas em $\mathbb{F}^n$, e A matriz $n\times n$, escrevemos

$$\|A\|_{\varphi\psi} = \max_{\varphi(x)=1}\ \psi(Ax)$$

(a norma de operador de $A : (\mathbb{F}^n,\varphi) \longrightarrow (\mathbb{F}^n,\psi)$)

[1] A principal referência é A. Pietsch, s-Numbers of operators in Banach Spaces, *Studia Mathematica*, 51 (1974), p. 201-223. Ver também A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory*, Springer, 1985.

Para $k = 1, 2, \ldots$, definimos:

$$a_k^{\varphi\psi}(A) = \min\{\|A - X\|_{\varphi\psi} : \operatorname{car}(X) < k\}$$

(*números de aproximação* de A)

$$g_k^{\varphi\psi}(A) = \min_{\dim M = n-k+1} \ \max_{x \in M,\, \varphi(x)=1} \psi(Ax)$$

(*números de Gelfand* de A)

$$b_k^{\varphi\psi}(A) = \max_{\dim M = k} \ \min_{x \in M,\, \varphi(x)=1} \psi(Ax)$$

(*números de Bernstein* de A)

$$d_k^{\varphi\psi}(A) = \min_{\dim M = k-1} \ \max_{\varphi(x) \le 1} \ \min_{y \in M} \psi(Ax - y)$$

(*números de Kolmogorov* de A)

Propriedades simples destas famílias de números

Sendo (s_k) qualquer uma das sucessões indicadas, tem-se

- $\|A\|_{\varphi\psi} = s_1^{\varphi\psi}(A) \geq s_2^{\varphi\psi}(A) \geq \cdots \geq 0$
- Se A for $n \times n$, então $s_n^{\varphi\psi}(A) = \min\limits_{\varphi(x)=1} \psi(Ax) = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|_{\psi\varphi}}$ (se A for invertível)
- $\operatorname{car}(A) < k \Longrightarrow s_k^{\varphi\psi}(A) = 0$
- $s_k^{\varphi\varphi}(I_n) = 1$ para $k = 1, 2, \ldots, n$

Algumas relações entre estes números

- Para quaisquer φ, ψ, A, tem-se

$$a_k \geq g_k \geq b_k$$

$$a_k \geq d_k \geq b_k$$

- Se A for $n \times n$ e invertível,

$$b_k^{\varphi\psi}(A) = \frac{1}{g_{n-k+1}^{\psi\varphi}(A^{-1})}$$

Antes de vermos mais relações, recordemos um conceito. A **norma dual** de uma norma φ é

$$\varphi^d(x) = \max_{y \neq 0} \frac{|x^* y|}{\varphi(y)}$$

É simples ver que $\|A\|_{\varphi\psi} = \|A^*\|_{\psi^d\varphi^d}$. Daqui segue-se imediatamente que

- $a_k^{\varphi\psi}(A) = a_k^{\psi^d\varphi^d}(A^*)$

Mas para outras sequências não se passa o mesmo. Por exemplo, tem-se

- $d_k^{\varphi\psi}(A) = g_k^{\psi^d\varphi^d}(A^*)$

(consequência do facto de que $\operatorname{dist}_\psi(y, M) = \max\limits_{0 \neq z \in M^\perp} \dfrac{|y^* z|}{\psi^d(z)}$)

Vamos agora prestar atenção especial às *normas de Hölder*

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Como se sabe, tem-se

$$\|\cdot\|_p^d = \|\cdot\|_{p'} \quad , \quad \text{onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

donde $\|\cdot\|_1^d = \|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2^d = \|\cdot\|_2$

E temos as seguintes relações (usando $s^{\varphi,q}$ e $s^{p,\psi}$ com o significado óbvio):

- $a_k^{\varphi,\infty} = g_k^{\varphi,\infty}$ (Pietsch)
- Por dualidade, $a_k^{1,\psi} = d_k^{1,\psi}$ (donde $a_k^{1,\infty} = g_k^{1,\infty} = d_k^{1,\infty}$)
- $a_k^{2,\psi} = g_k^{2,\psi}$ (Maitre-Vinh[2])
- Por dualidade, $a_k^{\varphi,2} = d_k^{\varphi,2}$
- Se $a_k^{\varphi\psi}(A) = d_k^{\varphi\psi}(A)$ para quaisquer A, k e φ, então $\psi = \|\cdot\|_2$ (Vuza[3])

[2] J.-F. Maitre, N. H. Vinh, Évaluation de la distance d'une matrice à l'ensemble des matrices de rang r, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 262-A (1966), 910-912.

[3] Dan Vuza, A characterization of Hilbert Space based on s_n and d_n Numbers, *Analele Universitath din Craiova, Seria Mat.,Fiz-Chim* 9 (1981), 11-12.

Cálculo destes números

Não há resultados gerais para além do caso $\psi = \varphi = \|\cdot\|_2$: para qualquer das sucessões (s_k), tem-se

$$s_k^{2,2}(A) = \sigma_k(A)$$

onde σ_k são os *valores singulares* de $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ (= valores próprios de $(A^*A)^{1/2}$).

- Um resultado interessante:

  $\|A\|_{1,\psi} = \max\{\psi\text{-normas das colunas de } A\}$ (Ostrowski, Maitre[4])

Em particular,

- $\|A\|_{1,\infty} = \max_{i,j} |a_{ij}|$
- $\|A\|_{1,1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$
- Por dualidade, $\|A\|_{\infty,\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$
- Mas... o cálculo de $\|\cdot\|_{\infty,1}$ é NP-difícil. (Rohn[5])

O cálculo de $\|\cdot\|_{\varphi\psi}$, mesmo quando $\varphi = \psi$ (por exemplo $\|\cdot\|_{p,p}$), é difícil em geral para matrizes arbitrárias. Logo, a situação para outros números de aproximação, de Gelfand, de Bernstein e de Kolmogorov numbers ainda será pior.

Consideremos matrizes **diagonais**. Então tem-se:

- Se a norma φ for absoluta ($\Leftrightarrow$ monótona) e $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, com $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$, então

  $$s_k^{\varphi\varphi}(A) = \alpha_k$$

  para qualquer uma das sucessões (s_k) indicadas.

Para $\varphi \neq \psi$ a situação é muito mais difícil.

Resultados para matrizes diagonais

Seja $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, com $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n > 0$. Suponhamos $p > q$. Então (Pietsch)

$$a_k^{p,q}(A) = g_k^{p,q}(A) = d_k^{p,q}(A) = (\alpha_k^r + \cdots + \alpha_n^r)^{1/r}$$

[4] A. Ostrowski, Über Normen von Matrizen, *Math. Z.* 63 (1955), 2-18, J.-F. Maitre, Norme composée et norme associée généralisée d'une matrice, *Numerische Mathematik* 10 (1967), 132-141.

[5] J. Rohn, Computing the norm $\|A\|_{\infty,1}$ is NP-hard, *Linear and Multilin. Algebra* 47 (2000), 195-204.

onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$. (A demonstração não é trivial.)

Para $p < q$ sabe-se menos. Um pequeno truque:

$$b_k^{p,q}(A) = \frac{1}{g_{n-k+1}^{q,p}(A^{-1})} = \left(\alpha_1^{-r} + \cdots + \alpha_k^{-r}\right)^{-1/r}$$

onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$.

Pouco mais se sabe (só resultados isolados e estimativas).

Um exemplo ilustrativo

Problema: Calcular $a_k^{1,\infty}(I_n)$ para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Usando resultados anteriores, vemos que se tem

$$a_1^{1,\infty}(I_n) = 1 \ , \quad a_2^{1,\infty}(I_n) = \frac{1}{2} \ , \quad a_n^{1,\infty}(I_n) = \frac{1}{n}$$

e, para $3 \leq k \leq n-1$,

$$a_k^{1,\infty}(I_n) \geq \frac{1}{k} \qquad \left(= b_k^{1,\infty}(I_n)\right)$$

Teorema. $a_3^{1,\infty}(I_n) = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$ (E. Marques de Sá, não publicado)

Os números $a_4^{1,\infty}(I_n), \ldots, a_{n-1}^{1,\infty}(I_n)$ permanecem desconhecidos.

Há uns anos, Rosa Amélia Martins e eu próprio iniciámos o seguinte

Projecto: calcular os (p,q)-números de Gelfand e Bernstein da matriz identidade I_n para quaisquer p e q .

Interessam-nos portanto os números

$$g_k^{p,q}(I_n) = \min_{\dim M = n-k+1} \ \max_{x \in M, \, \|x\|_p = 1} \|x\|_q$$

$$b_k^{p,q}(I_n) = \max_{\dim M = k} \ \min_{x \in M, \, \|x\|_p = 1} \|x\|_q$$

No resto deste texto expõem-se alguns resultados obtidos.

Recorde-se que $g_k \geq b_k$ sempre. Particularizando para a matriz identidade os resultados anteriormente vistos para matrizes diagonais, podemos desde já construir a seguinte tabela de resultados conhecidos:

	$g_k^{p,q}(I_n)$	$b_k^{p,q}(I_n)$
$p < q$	?	$k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$
$p > q$	$(n-k+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$	?

O projecto foi completado (no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) apenas para $n = 3$ e $q = 2$, obtendo-se mais alguns resultados parciais.[6]

O cálculo de $g_2^{p,2}(I_3)$ e $b_2^{p,2}(I_3)$

Tem-se

$$g_2^{p,2}(I_3) = \min_{\dim M=2} \max_{x\in M,\, \|x\|_p=1} \|x\|_2 \quad \text{e} \quad b_2^{p,2}(I_3) = \max_{\dim M=2} \min_{x\in M,\, \|x\|_p=1} \|x\|_2$$

(Os casos $k = 1$ e $k = 3$ são conhecidos.) A tabela acima fica:

	$g_2^{p,2}(I_3)$	$b_2^{p,2}(I_3)$
$1 \leq p < 2$	?	$2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$
$2 < p \leq \infty$	$2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$	?

Em ambos os casos as configurações optimais são obtidas com os planos coordenados.

Designemos por H o subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 definido por $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Vamos estudar a intersecção de H com $\{x : \|x\|_p = 1\}$.

Basta trabalhar no octante $x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0,\, x_3 \leq 0$. Um ponto típico na intersecção de H com $\{x : \|x\|_1 = 1\}$ é

$$y = \frac{1}{2}(s, 1-s, -1)\,, \quad \text{with } s \in [0,1]$$

Multiplicando y pelo factor

$$\frac{2}{[s^p + (1-s)^p + 1]^{1/p}}$$

obtemos um ponto típico na intersecção de H com $\{x : \|x\|_p = 1\}$. A sua norma-2 é

$$\frac{[s^2 + (1-s)^2 + 1]^{1/2}}{[s^p + (1-s)^p + 1]^{1/p}}\,.$$

Pretendemos achar os extremos desta função de s em $[0, \frac{1}{2}]$

[6] R. A. Martins, J. F. Queiró, 2-widths of the Hölder unit balls, *Linear Algebra and its Applications* 361 (2003), 245-255.

Após muitos cálculos, chegamos às seguintes conclusões:

Para $1 \leq p < 2$, a função é decrescente em $[0, \frac{1}{2}]$, logo o máximo é atingido quando $s = 0$. Calculando o seu valor, obtemos

$$\max_{x \in H, \, \|x\|_p = 1} \|x\|_2 = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$$

donde

$$g_2^{p,2}(I_3) \leq 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$$

Como, para $1 \leq p < 2$, se tem

$$b_2^{p,2}(I_3) = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$$

e $b_k \leq g_k$ sempre, obtemos

$$g_2^{p,2}(I_3) = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \qquad \text{para } 1 \leq p < 2\,.$$

Logo, podemos acrescentar a nossa tabela:

	$g_2^{p,2}(I_3)$	$b_2^{p,2}(I_3)$
$1 \leq p < 2$	$2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$	$2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$
$2 < p \leq \infty$	$2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$	?

Para $p = 2$, claro que a função é constante $(= 1)$.

Observamos agora a primeira surpresa: a situação no caso $2 < p < 4$ é diferente do caso $4 < p < \infty$.

Para $2 < p < 4$, a função é crescente em $[0, \frac{1}{2}]$, logo o mínimo é atingido quando $s = 0$, donde

$$\min_{x \in H, \, \|x\|_p = 1} \|x\|_2 = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$$

e portanto

$$b_2^{p,2}(I_3) \geq 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$$

Como, para $p > 2$, se tem

$$g_2^{p,2}(I_3) = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$$

e $g_k \geq b_k$ sempre, obtemos

$$b_2^{p,2}(I_3) = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \qquad \text{para } 2 < p < 4\,.$$

A tabela fica então assim:

	$g_2^{p,2}(I_3)$	$b_2^{p,2}(I_3)$
$1 \leq p < 4$	$2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$	$2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$
$4 < p \leq \infty$	$2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$	?

Para $4 < p < \infty$, a função é de novo decrescente em $[0, \frac{1}{2}]$, e portanto o mínimo é atingido quando $s = \frac{1}{2}$. O seu valor é

$$\min_{x \in H,\, \|x\|_p = 1} \|x\|_2 = \frac{\sqrt{6}}{(2 + 2^p)^{1/p}}$$

Será este o maior dos mínimos para todos os subespaços de dimensão 2? É possível mostrar que, para qualquer outro subespaço H' de dimensão 2, existe $x' \in H'$, com $\|x'\|_p = 1$, mais próximo da origem do que o $x \in H$ que produz o valor acima indicado. Logo, para $4 < p < \infty$, tem-se

$$b_2^{p,2}(I_3) = \frac{\sqrt{6}}{(2 + 2^p)^{1/p}}$$

E o caso $p = 4$? O que se observa é que a função

$$\frac{[s^2 + (1-s)^2 + 1]^{1/2}}{[s^4 + (1-s)^4 + 1]^{1/4}}$$

<u>é constante</u>. Por outras palavras, a bola unitária para $\|.\|_4$ tem uma secção circular! (O raio é $\sqrt[4]{2}$.) Logo, a tabela completa é

	$g_2^{p,2}(I_3)$	$b_2^{p,2}(I_3)$
$1 \leq p \leq 4$	$2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$	$2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$
$4 \leq p \leq \infty$	$2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{(2 + 2^p)^{\frac{1}{p}}}$

O caso q qualquer

Aqui interessam-nos os extremos da função

$$\frac{[s^q + (1-s)^q + 1]^{1/q}}{[s^p + (1-s)^p + 1]^{1/p}}$$

em $[0, \frac{1}{2}]$. Os cálculos são mais difíceis do que no caso $q = 2$. Em vários casos com $p > q$ conseguiu-se mostrar que a função é crescente. As conclusões são as seguintes:

<u>$q = 3$</u>: Para $p = 4$ e $p \geq 5$, tem-se $b_2^{p,3}(I_3) = \dfrac{(2 + 2^3)^{\frac{1}{3}}}{(2 + 2^p)^{\frac{1}{p}}}$

<u>$q = 4$</u>: Tem-se $b_2^{5,4}(I_3) = \dfrac{(2 + 2^4)^{\frac{1}{4}}}{(2 + 2^5)^{\frac{1}{5}}}$ e $b_2^{6,4}(I_3) = \dfrac{(2 + 2^4)^{\frac{1}{4}}}{(2 + 2^6)^{\frac{1}{6}}}$

Conjectura-se que o plano H é optimal em todos os casos em que $p > q$, e que $b_2^{p,q}(I_3) = \dfrac{(2 + 2^q)^{\frac{1}{q}}}{(2 + 2^p)^{\frac{1}{p}}}$ na maior parte desses casos.

Para $n > 3$, alguns dos raciocínios mantêm-se. Uma conjectura plausível — inspirada pelo que acontece no caso $n = 3$ — é que existe p_0 (função de n) tal que, para $p > p_0$, se tem

$$g_{n-1}^{p,2}(I_n) \; > \; b_{n-1}^{p,2}(I_n)\,.$$

Mais especulação do que conjectura é que se tem $p_0 \to 2$ quando $n \to \infty$.