

Introdução à Álgebra Linear

Ana Paula Santana e João Filipe Queiró

Gradiva, 2010

Resolução do exercício 13 da Secção 1.2

Uma matriz que comuta com uma matriz quadrada tem de ser ela própria quadrada.

Seja então $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n , seja D uma matriz diagonal $n \times n$ de elementos diagonais d_1, d_2, \dots, d_n todos distintos, e suponhamos que $AD = DA$.

Tomemos dois índices diferentes $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pelo exercício 12 desta secção, o elemento (i, j) de AD é $a_{ij}d_j$. Pelo mesmo exercício, o elemento (i, j) de DA é $d_i a_{ij}$.

Segue-se que $d_i a_{ij} = a_{ij}d_j$, donde $(d_i - d_j)a_{ij} = 0$. Como d_i e d_j são distintos, concluímos que $a_{ij} = 0$.

Provámos assim que, quando $i \neq j$, se tem $a_{ij} = 0$, o que significa que A é uma matriz diagonal.