Introdução à Álgebra Linear
Ana Paula Santana e João Filipe Queiró
Gradiva, 2010

Resolução do exercício 9 da Secção 1.4

Suponhamos que B é $r\times r$ e D é $s\times s$.

Se A é ortogonal, então tem-se $A^TA = I = AA^T$. Efectuando os dois produtos A^TA e AA^T por blocos (recordando o exercício 7 desta secção), obtemos as igualdades

$$\begin{bmatrix} B^TB & B^TC \\ C^TB & C^TC+D^TD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BB^T+CC^T & CD^T \\ DC^T & DD^T \end{bmatrix}.$$

Consideremos a igualdade $B^TB = BB^T+CC^T$. Calculando o traço de ambos os membros, e usando a alínea c do exercício 23 da Secção 1.2, concluímos que $\operatorname{tr}(CC^T) = 0$, o que, pelo exercício 6 desta Secção 1.4, implica que $C = 0$.

Segue-se que $B^TB = I_r = BB^T$ e $D^TD = I_s = DD^T$, o que significa que as matrizes B e D são ortogonais.

Adiante, no Capítulo 5, vemos caracterizações das matrizes ortogonais que tornam a resolução deste exercício mais simples.