**Introdução à Álgebra Linear**
Ana Paula Santana e João Filipe Queiró
Gradiva, 2010

---

**Resolução do exercício 6 da Secção 2.2**

(a) Se $A$ tiver característica $m$, então, pelo ponto 1 do Teorema 2.23, todos os sistemas de equações cuja matriz é $A$ são possíveis.

Ora a igualdade $AB = I_m$ é equivalente a $m$ sistemas de equações, em que as colunas das incógnitas são as colunas de $B$. Como todos esses sistemas são possíveis, a existência de $B$ está garantida.

(b) Se $\operatorname{car}(A) = n$, tem-se obviamente $m \geq n$.

Aplicando o algoritmo de eliminação de Gauss a $A$, obtém-se uma factorização da forma $PA = LU$, onde $P$ é uma matriz de permutação $m\times m$, $L$ é uma matriz $m\times m$ triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e $U$ é uma matriz em escada $m\times n$ da forma

$$U = \begin{bmatrix} \bullet & * & \cdots & * \\ 0 & \bullet & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde os símbolos $\bullet$ representam os $n$ pivots.

Segue-se que se tem $L^{-1}PA = U$. Se conseguirmos mostrar que existe uma matriz $X$ $n \times m$ tal que $XU = I_n$, teremos o problema resolvido: bastará tomar $C = XL^{-1}P$.

Como $U = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$, onde $V$ é $n\times n$ triangular superior com elementos diagonais não nulos, basta mostrar que existe $Y$ do tipo $n\times n$ tal que $YV = I_n$, tomando-se depois $X = [\,Y \;\; 0\,]$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que os elementos diagonais de $V$ são iguais a 1, porque podemos destacar como factor à esquerda a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os de $V$.

Resta observar, pela aplicação do Teorema 1.36 à transposta de $V$, que $V$ é invertível, porque é igual a um produto de matrizes elementares.

Adiante, no Corolário 4.41, vemos que $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A^T)$. Com esse conhecimento, a resolução da alínea (b) fica mais simples, sendo consequência imediata da alínea (a) por transposição.