

Introdução à Álgebra Linear

Ana Paula Santana e João Filipe Queiró

Gradiva, 2010

Resolução do exercício 7 da Secção 3.3

Fazendo permutações nas linhas e nas colunas de A (que ou não alteram $\det(A)$ ou lhe trocam o sinal), podemos supor que a submatriz $r \times s$ nula está no canto inferior esquerdo, isto é, não há perda de generalidade em supor que A tem a forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde A_{11} é $(n-r) \times s$, A_{12} é $(n-r) \times (n-s)$, A_{22} é $r \times (n-s)$ e o bloco nulo, claro, é $r \times s$.

Como $r + s = n + 1$, tem-se $s = n - r + 1$, isto é, o número de colunas da submatriz A_{11} excede em uma unidade o seu número de linhas.

Portanto, tem-se $A_{11} = [B_{11} \ *]$, onde B_{11} é quadrada do tipo $(n-r) \times (n-r)$ e o bloco designado por $*$ é uma coluna $(n-r) \times 1$.

Daqui resulta que A tem a forma

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix},$$

onde B_{11} e B_{22} são quadradas e B_{22} , que é $r \times r$, tem a primeira coluna nula. (B_{22} é a matriz $[0 \ A_{22}]$, onde aqui 0 designa uma coluna $r \times 1$.)

Como todas as parcelas que figuram no determinante de B_{22} têm um factor que pertence à primeira coluna dessa matriz, concluímos que $\det(B_{22}) = 0$.

E vem, finalmente, usando o exercício 5.b desta secção, que

$$\det(A) = \det(B_{11}) \det(B_{22}) = 0.$$