LAGRANGE, AS MULTAS E OS RECORDES DE ATLETISMO

A velocidade média diz-nos alguma coisa sobre a velocidade instantânea? E sobre outras velocidades médias?

João Filipe Queiró
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

1. INTRODUÇÃO

O Artigo 27.º do Código da Estrada [5] fixa os limites gerais de velocidade nas vias públicas. Salvo casos especiais, os condutores não podem exceder certas velocidades instantâneas, dependendo do tipo de vias.

Este Artigo 27.º remete implicitamente para duas questões matemáticas importantes.

A primeira é o próprio conceito de velocidade instantânea, não definido no Código, e sobre o qual se diz apenas que é medido "em quilómetros/hora". Na ausência de definição, é de presumir que o legislador está a pensar no número indicado por um velocímetro, seja este de que tipo for. Descontemos a circularidade desta forma de pensar e observemos que a velocidade instantânea é um conceito estritamente matemático: é a derivada em cada instante do "espaço percorrido" em função do tempo. Este é um dos primeiros exemplos vistos quando estudamos derivadas e é uma das principais motivações iniciais para esse estudo.

A segunda questão matemática importante do Código da Estrada é suscitada pela interrogação óbvia: indo além da definição, como é que as autoridades controlam na prática a velocidade instantânea dos automóveis nas estradas, para depois sancionarem quem exceda os limites legais?

O processo mais conhecido consiste em usar um aparelho que se aponta ao veículo e que imediatamente fornece a velocidade instantânea, tipicamente emitindo um sinal de radar ou laser e analisando a frequência do sinal reflectido pelo objecto em movimento.

O presente artigo é motivado por um segundo processo, que é referido no mesmo artigo do Código da Estrada, no seu número 4:

> *Para os efeitos do disposto nos números anteriores, considera-se que viola os limites máximos de velocidade instantânea o condutor que percorrer uma determinada distância a uma velocidade média incompatível com a observância daqueles limites (...).*

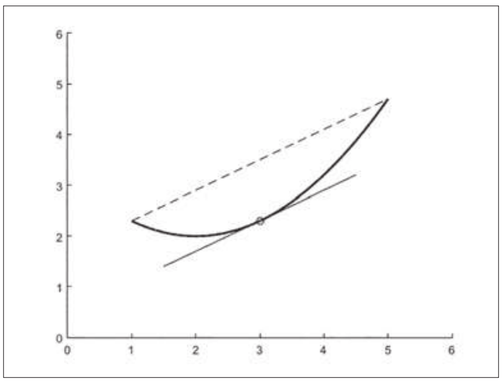
Isto é operacionalizado identificando o veículo num ponto da estrada e voltando a identificá-lo depois de ele percorrer determinada distância. O tempo decorrido entre as duas identificações permite calcular a velocidade média do veículo no troço em causa.

O código nada diz sobre o que é uma "velocidade média incompatível" com a observância dos limites legais. O senso comum, que qualquer um entende, aponta para algo muito simples: se a velocidade média exceder o limite para a velocidade instantânea no troço, o condutor terá de certeza excedido, em algum momento, esse mesmo limite.

2. O TEOREMA DE LAGRANGE

O facto matemático que aqui está presente, e que subjaz ao tal "senso comum", é um dos teoremas mais fundamentais do cálculo diferencial elementar, o Teorema de Lagrange ou do valor médio. Diz o teorema que, se uma função real for contínua num intervalo fechado e diferenciável no seu interior, então existe um ponto no interior onde a derivada da função coincide com o valor médio dela no intervalo. Em símbolos: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, existe $\theta \in]a, b[$ tal que

$$f'(\theta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Sobre este teorema podemos fazer várias observações:

1. A demonstração é simples e pode ver-se em qualquer livro introdutório de Análise. Reduzimo-nos primeiro ao caso particular em que $f(a) = f(b)$ (situação em que ao resultado se chama por vezes Teorema de Rolle) e usamos de forma decisiva a completude do conjunto dos números reais. Esta propriedade básica de $\mathbb{R}$ pode ser apresentada de várias maneiras quando se ensina Análise, sendo uma das mais habituais a seguinte: qualquer que seja a forma de escrever $\mathbb{R}$ como uma reunião de dois subconjuntos A e B tais que qualquer elemento de A é menor do que qualquer elemento de B, existe de certeza $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall_{a \in A, b \in B} \quad a \leq c \leq b$.

   Isto é parecido com a definição de $\mathbb{R}$ pelos chamados "cortes de Dedekind" mas não é a mesma coisa.

2. Curiosamente, não só o Teorema de Lagrange é consequência da completude de $\mathbb{R}$ como lhe é mesmo equivalente [4].

3. O Teorema de Lagrange é, como muitos teoremas em Matemática, uma afirmação apenas da existência de algo. Nada no enunciado ou na demonstração diz seja o que for sobre o valor de θ. Os teoremas de existência "não construtivos", como este, são causa de alguma confusão para os não-matemáticos: pois como se pode afirmar e provar a existência de algo sem o exibir ou construir explicitamente? Não só se pode como a situação é muito frequente.[1]

O Teorema de Lagrange é exactamente o facto matemático de que precisamos para justificar a prescrição legal do n.º 4 do artigo 27.º do Código da Estrada. E este tipo de questão é normalmente uma das primeiras aplicações do teorema vistas no estudo do cálculo diferencial.

3. PROBLEMAS POSSÍVEIS

Mas há problemas potenciais. Por exemplo: como a demonstração não é construtiva, as autoridades não podem dizer quando é que o veículo, no troço em causa, excedeu o limite legal para a velocidade instantânea. O legislador provavelmente pensou nisto e resolveu o problema escrevendo que se entende que "a contraordenação é praticada no local em que terminar o percurso controlado". Esta redacção resolve um problema formal mas tem vulnerabilidades. O condutor pode dizer − e se calhar até provar − que no final do percurso controlado a sua velocidade era inferior ao limite legal: "Eu nesse momento até ia a 10 km/h..."

Um problema de outro tipo pode surgir se o condutor afirmar que a forma como percorreu a distância em causa não satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange, mais precisamente a da diferenciabilidade da função espaço percorrido (a da continuidade seria mais difícil de contestar). Isto é, o automobilista pode dizer que a sua técnica de condução é tal que, por vezes, não há diferenciabilidade da função. Aqui o condutor não terá sorte, porque há versões do Teorema de Lagrange para o caso em que f pode não ser diferenciável em todos os pontos de $]a, b[$. Por exemplo [2], se o conjunto D dos pontos em que f não é diferenciável for finito (ou mesmo numerável) então

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \sup_{\theta \in]a,b[\setminus D} f'(\theta)$$

e portanto a velocidade média continua a dar a informação desejada.

Mesmo assim, seria interessante assistir a uma contestação judicial de um condutor a uma multa aplicada ao abrigo do n.º 4 do Artigo 27.º do Código da Estrada. Poderia haver uma discussão matemática em tribunal de consequências imprevisíveis, com análise das condições de aplicação do Teorema de Lagrange e da sua conclusão, divergências sobre a natureza dos números reais, intervenção de advogados da escola intuicionista, etc. Quem sabe se não se acabaria num recurso para o Tribunal Constitucional, com este a consultar pareceres da Sociedade Portuguesa de Matemática?

4. UM PARADOXO NO ATLETISMO

Uma pergunta natural, relacionada com o tema anterior, é se a velocidade média numa certa distância nos diz alguma coisa sobre a velocidade média em partes dessa distância. O problema colocou-se com alguma publicidade a propósito de uma prova de atletismo [1].

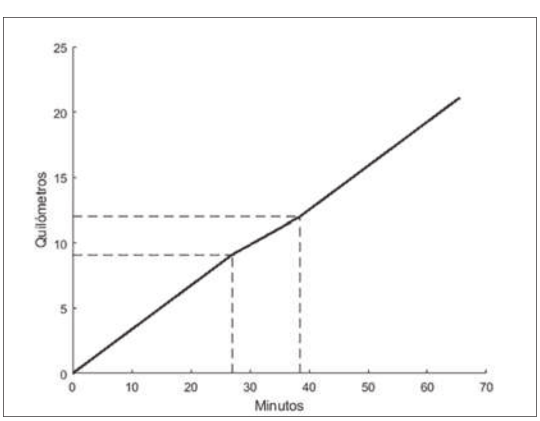
Em 2013, a atleta americana Molly Huddle estabeleceu uma nova melhor marca mundial para a distância de 12 km. Alguém observou então que o recorde mundial da meia-maratona (cerca de 21,1 km), da atleta queniana Mary Jepkosgei Keitany, tinha uma média por km inferior à de Huddle nos 12 km. Portanto, em algum troço de 12 km da sua meia-maratona, Keitany teria feito um tempo mais baixo do que o de Huddle, não sendo justo atribuir a melhor marca sobre essa distância a esta atleta.

Esta conclusão, curiosamente, não está correcta, isto é, não é obrigatório que exista um tal troço de 12 km. Por outras palavras, a corrida de Keitany podia ter sido conduzida de tal forma que, em qualquer troço de 12 km da meia-maratona, o seu tempo fosse pior do que o tempo total de Huddle.

Por exemplo [1]: suponhamos que Keitany correu os primeiros 9,1 km em 27 minutos, os 2,9 km seguintes em 11 minutos e 50 segundos e os 9,1 km finais de novo em 27 minutos, perfazendo os 65 minutos e 50 segundos do seu recorde. Supõe-se a velocidade constante em cada um dos três subintervalos.

Então o seu tempo em qualquer subtroço de 12 km seria 38 minutos e 50 segundos, acima dos 37 minutos e 49 segundos de Huddle.

Há uma situação em que se pode garantir que existe uma parte da distância percorrida à mesma velocidade média que a velocidade média da corrida completa: isso acontece se a distância total for um múltiplo inteiro do subtroço em causa.



Para o mostrar, suponhamos, sem perda de generalidade, que a distância total é de n km, com n um número natural. Vamos provar que existe 1 km na corrida percorrido exactamente à velocidade média da corrida total.

Seja t o tempo total da corrida. Existe de certeza um subintervalo de tempo de duração t/n em que o corredor percorreu pelo menos 1 km: se não, a distância total percorrida seria menos de n km. Analogamente, existe um subintervalo de tempo de duração t/n em que o corredor percorreu no máximo 1 km. Como o espaço percorrido num intervalo é uma função contínua dos extremos do intervalo, tem de existir, pelo Teorema de Bolzano, ou dos valores intermédios (que é equivalente ao Teorema de Lagrange [4]), um subintervalo de duração t/n em que o corredor percorreu exactamente 1 km e em que, portanto, a sua velocidade média foi n/t, igual à velocidade média na distância total.

Em [1] mostra-se que, extraordinariamente, este é o único caso em que se pode dar uma tal garantia: se a distância parcial não for um submúltiplo inteiro da distância total, existe sempre uma forma de conduzir a corrida tal que em qualquer troço de comprimento igual à distância parcial a velocidade média é inferior à velocidade média na corrida completa.

5. REFERÊNCIAS

[1] K. Burns, O. Davidovich, D. Davis, "Average pace and horizontal chords", *The Mathematical Intelligencer* 39 (2017), 41-45.

[2] Jean Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, New York, Academic Press, 1960.

[3] Miguel de Guzmán, *Aventuras Matemáticas* (trad. J. F. Queiró), Lisboa, Gradiva, 1990.

[4] H. Teismann, "Toward a more complete list of completeness axioms", *The American Mathematical Monthly* 120 (2013), 99-114.

[5] *Código da Estrada* - Lei n.º 72/2013, Diário da República n.º 169/2013, Série I, 3 de Setembro de 2013.

[1] Para um exemplo muito simples e curioso veja-se [3, p. 94], onde se prova em poucas linhas que em Madrid existem de certeza mais de 20 pessoas com o mesmo número de cabelos.