

Duas ou três histórias da História da Matemática¹

João Filipe Queiró

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Gazeta de Matemática, n.º 138, Janeiro 2000, 13-24

Começo por agradecer o honroso convite da Comissão Organizadora para participar nesta homenagem. É uma honra para mim, e é também com grande gosto que aqui estou.

Eu não fui aluno do Professor José Morgado, nem colega na mesma instituição, mas, como todos os matemáticos portugueses, conheço o seu percurso pessoal, a cuja evocação já hoje assistimos, e conheço a sua paixão de sempre pela Matemática.

Gostaria de começar esta palestra precisamente por aí, pela paixão, regularmente demonstrada, e de muitas maneiras, até hoje, do Professor José Morgado pela Matemática e, mais geralmente, pelas virtualidades do espírito racional. Trata-se de características essenciais do espírito moderno, que tanta influência tiveram na evolução do Mundo nos últimos séculos.

É evidente que a atitude perante a ciência e o espírito científico não pode hoje ser a mesma que era um século atrás. O optimismo dos meios cultos oitocentistas relativamente à noção de progresso unidireccional das sociedades, movido pela racionalidade e pelos avanços da Ciência, tem hoje que ser temperado pela constatação de muitos problemas observados no século XX.

Para usar uma frase do gosto de José Anastácio da Cunha, “a Experiência tem mostrado”, não tanto que a Ciência não é uma panaceia universal, mas que a Ciência deve ser prudente, não deve pretender que pode e sabe mais do que em cada momento realmente pode e sabe, e deve saber ser humilde na busca da verdade.

Mas ao mesmo tempo que devem ser humildes, os cientistas têm que estar atentos à tendência, sobretudo em certos meios educativos, para a importação de ideologias anti-científicas que parecem perigosas, num sentido que já direi qual é. Refiro-me àquele tipo de concepções, às vezes chamadas “pós-modernas”, que vêem as ciências como meras “construções sociais”, com tudo o que isso implica, por um lado, de contingência e relativização, e, por outro lado e conseqüentemente, de deslegitimação e desvalorização.

¹Palestra na sessão de homenagem ao Prof. José Morgado realizada na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em 19 de Fevereiro de 1999.

Claro que o debate académico é por definição livre, e quem quiser recusar a existência de uma realidade objectiva e olhar para os físicos, químicos, matemáticos e biólogos como construtores de narrativas contingentes tem com certeza liberdade para o fazer.

Convém no entanto estar atento à influência negativa que essas correntes de opinião podem ter no sistema educativo. O perigo a que me referi há pouco é esse: precisamente porque em Portugal há Ciência e cultura científica a menos, temos poucos mecanismos de defesa em relação ao crescimento dessas concepções na decisiva matéria da instrução e educação.

A cultura científica, em cujo cerne reside a Matemática, é hoje condição do desenvolvimento cívico dos portugueses, permitindo-lhes uma intervenção crítica e informada sobre o funcionamento e os rumos da sociedade nos aspectos mais diversos.

O Professor José Morgado destaca-se, como já disse, pelo entusiasmo que sempre revelou pela Matemática, pelo seu estudo e pela sua divulgação. Esse entusiasmo, demonstrado ao longo de tanto tempo, e em contextos tão variados, tem a marca da autenticidade, e não pode deixar de ser para nós fonte de inspiração.

*

Uma das áreas pelas quais o Professor José Morgado revelou grande interesse é a História da Matemática, e foi para falar de História da Matemática que fui convidado. Temo que ao ter aceite esse convite não tenha dado sinais da tal prudência a que me referi atrás. De facto, não é segredo que não sou historiador. Tenho apenas um interesse de alguns anos pela História em geral, e pela História da Matemática em particular.

Falando da palavra “história”, a língua inglesa, e agora também o português do Brasil, têm duas palavras onde nós só temos uma. No contexto desta palestra não parece mal que só tenhamos uma: de facto, a História da Matemática está cheia de personalidades e de episódios que propiciam verdadeiras “histórias”, fascinantes pelo dramatismo, pelo brilho da inteligência e pelo rasto que deixaram e consequências que tiveram.

E tal como nas histórias “normais”, dos livros de quadradinhos aos romances clássicos, também na História da Matemática se podem encontrar heróis, que acompanhamos no seu génio, nas suas aventuras e desventuras, e que deixam em nós um rasto de admiração e fascínio.

Claro que tentar perceber a História da Ciência, e da Matemática em particular, por uma lista de heróis é como tentar perceber o mundo de hoje pelos títulos dos jornais.

Vale a pena, portanto, olhar as pessoas e as coisas de perto. Vale a pena fazer viagens ao passado e contactar directamente com as obras e, através delas, com os seus autores. Rapidamente desaparece alguma ideia que tivéssemos de que os grandes nomes do passado são uma espécie de figuras empalhadas, que rotineiramente debitariam teorias acabadas e perfeitas nas horas de expediente.

Nos génios quase tudo pode ser interessante. Só para dar um exemplo, do domínio do anedótico: há tempos, lendo um livro sobre Galileu, deparei com um episódio que ilustra que os génios também se enganam (se calhar é preciso errar muito para acertar muito), mas que até a defender um erro se pode ser genial.

Galileu é uma das maiores figuras de sempre da História da Ciência, sendo a introdução e o uso sistemático do método experimental uma das suas grandes contribuições.

Em 1623, Galileu publicou um livro intitulado *Il Saggiatore* em que responde a diversas críticas científicas de um padre jesuíta, Horácio Grassi, publicadas quatro anos antes. Uma das matérias controversas era a de saber se o atrito do ar aquece ou arrefece os corpos. Grassi sustentava que aquece, e em defesa desta tese resolveu citar um autor grego do século X, Suidas. Segundo Suidas, os antigos Babilónios coziam ovos da seguinte maneira: colocavam-nos numa funda e depois rodavam a funda vigorosamente.

Galileu defendia a tese de que o atrito do ar arrefece os corpos. Numa aplicação ir-repreensível dos princípios do método experimental, e numa manifestação da sua tendência para o sarcasmo mortífero, não perdeu a oportunidade. Escreveu ele em *Il Saggiatore*:

Se [Grassi] quer que eu acredite, com Suidas, que os Babilónios coziam os ovos rodando-os com uma funda, assim farei. Mas devo dizer que a causa deste efeito era muito diferente do que ele sugere. Para descobrir a verdadeira causa raciocino assim: “Se não conseguimos obter um efeito que outros anteriormente obtiveram, é porque nas nossas operações nos falta qualquer coisa que produzia o sucesso deles. E se só nos falta uma coisa, então só essa coisa pode ser a verdadeira causa. Ora não nos faltam ovos, nem fundas, nem homens vigorosos para as rodar; mas os nossos ovos não ficam cozidos, apenas arrefecem mais depressa se por acaso estivessem quentes. E como nada nos falta

excepto sermos Babilónios, então ser Babilónio é verdadeira causa de os ovos ficarem cozidos, e não o atrito do ar.”

*

Estudar História da Matemática acaba por ser isto mesmo: ver os nomes tornarem-se pessoas, perceber melhor o que cada um fez, conhecer o contexto em que germinaram as ideias, contactar com lapsos e incertezas, numa palavra, apercebermo-nos da “espessura” que faz a verdadeira história. É um exercício que pode ter muito interesse.

Várias vezes ouvi, e os presentes também ouviram, o Professor José Morgado contar histórias da Matemática. Para esta palestra escolhi como objectivo central, precisamente, seguindo o seu exemplo, contar ou recordar brevemente duas histórias da Matemática. Uma respeitante a um grande episódio da História da Matemática universal, e a outra a um pequeno episódio da História da Matemática em Portugal. Estas histórias envolvem, entre outros, dois matemáticos bem conhecidos de todos: Galois e Anastácio da Cunha. Não vou aqui repetir apologias, mas apenas olhar com alguma atenção para certos aspectos das suas obras.

Quanto a Galois, pelo seu génio e pelo dramatismo da sua curtíssima vida é difícil que não pertença à galeria de heróis de todas as pessoas que se interessam pela Matemática. Tentarei sublinhar, por um lado, que o seu trabalho genial sobre as equações polinomiais se inscreve num contexto e numa tradição que começam em Lagrange, e, por outro lado, que se faz injustiça a Galois ao reduzir a importância do seu trabalho algébrico à questão das equações.

Sobre Anastácio da Cunha, recordarei uma polémica matemática em que esteve envolvido, polémica mais tarde “arbitrada” por Gomes Teixeira, que não lhe deu a razão toda.

Em ambos os casos, não se trata de diminuir a importância da personalidade envolvida, objectivo que seria um pouco estúpido, mas de a olhar mais de perto, na convicção de que assim a compreenderemos, e às condições em que se manifestou, um pouco melhor.

*

A primeira história que vou recordar é bem conhecida de todas as pessoas com interesse

pela Matemática. Refiro-me à aventura de séculos à procura de fórmulas resolventes para equações polinomiais numa incógnita.

Este é sempre um assunto fácil de introduzir, porque toda a gente conhece de cor a fórmula para o caso do segundo grau.

Para os terceiro e quarto graus as fórmulas foram descobertas por matemáticos italianos em meados do século XVI. A seguir, durante dois séculos, inúmeros matemáticos dedicaram grande engenho e esforço à busca de uma fórmula para o caso das equações do quinto grau.

Todos sabemos hoje que esses esforços não podiam levar a nada, porque tal fórmula não existe, conforme demonstrado no início do século XIX por Abel, sendo o resultado deste ampliado e explicado por Galois.

Mas o que não é talvez tão familiar é que a viragem conceptual decisiva que conduziu a tal desfecho se deu décadas antes, e se deveu a Lagrange.

Numas *Reflexões sobre a resolução algébrica das equações*, em 1770, Lagrange resolve estudar de forma sistemática todos os métodos propostos até aí para as equações de graus 2, 3 e 4, com o objectivo de os reduzir a princípios gerais que permitissem compreender *a priori* o que é que os faz funcionar, para depois tentar a sua aplicação ao estudo das equações de graus superiores.

Este longo trabalho, de grande clareza, lê-se ainda hoje com proveito e com interesse, sobretudo conhecendo nós a sequência da história. Está reproduzido nas *Obras Completas* de Lagrange.

O caso da equação geral do segundo grau permite ilustrar algumas das ideias de Lagrange. Suponhamos que as raízes são λ_1 e λ_2 :

$$x^2 + a_1x + a_2 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

(igualdade de onde se tiram as conhecidas relações $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$, $\lambda_1\lambda_2 = a_2$).

Note-se que as raízes se podem escrever da seguinte forma:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)] \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)]$$

o que se pode resumir numa expressão comum:

$$\frac{1}{2} \left[\lambda_1 + \lambda_2 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right]$$

Mas $\lambda_1 + \lambda_2$ e $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ são polinómios simétricos em λ_1 e λ_2 . Logo (pelo teorema fundamental da teoria dos polinómios simétricos), são polinómios nos polinómios simétricos elementares $\lambda_1 + \lambda_2$ e $\lambda_1\lambda_2$, isto é, são polinómios nos coeficientes da equação. De facto, tem-se

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1, \quad (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = a_1^2 - 4a_2$$

Sai então a expressão para as raízes

$$\frac{1}{2} \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \right)$$

que é a nossa bem conhecida fórmula resolvente.

Passemos ao terceiro grau, e à equação

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

com raízes λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Lagrange observa que em todos os métodos de obtenção da fórmula resolvente desempenham papel central funções do tipo

$$y = \lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3$$

onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Note-se que, como $1 + \omega + \omega^2 = 0$, as raízes se podem escrever da seguinte forma:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3) + (\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3)]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \omega^2(\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3) + \omega(\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3)]$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \omega(\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3) + \omega^2(\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3)]$$

Na expressão $y = \lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3$, permutemos λ_1 , λ_2 e λ_3 de todas as maneiras possíveis. Obtemos ao todo seis expressões, que, escrevendo

$$z = \lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3,$$

são as seguintes:

$$y, \omega y, \omega^2 y, z, \omega z, \omega^2 z.$$

Temos aqui seis valores diferentes, e, portanto, para os obter, e com eles as raízes da equação proposta, teríamos de resolver uma equação de grau 6. Mas, como se vê imediatamente, elevando-os ao cubo ficam apenas dois valores diferentes, y^3 e z^3 , que vamos designar por Y e Z . Por serem apenas dois é possível obtê-los como soluções de uma equação do segundo grau, a que Lagrange chama “equação reduzida” (*réduite*), no que constitui o passo decisivo para a fórmula resolvente das equações de grau 3. É que os coeficientes desta equação auxiliar

$$(\xi - Y)(\xi - Z) = \xi^2 - (Y + Z)\xi + YZ = 0$$

são simétricos em Y e Z e portanto são insensíveis a permutações de λ_1, λ_2 e λ_3 , que, ou não alteram Y e Z , ou os transformam um no outro. Esses coeficientes são, portanto (pelo teorema fundamental da teoria dos polinômios simétricos), polinômios nos coeficientes da equação original. As expressões exactas são:

$$Y + Z = -2a_1^3 + 9a_1a_2 - 27a_3, \quad YZ = (a_1^2 - 3a_2)^3$$

Determinados $Y = y^3$ e $Z = z^3$ em função de a_1, a_2 e a_3 através da resolução daquela equação, vêm y e z escritos em função de ω e dos coeficientes da equação. Usando as expressões acima apresentadas para λ_1, λ_2 e λ_3 , vêm finalmente as três raízes expressas em termos dos coeficientes usando radicais. No caso em que $a_1 = 0$ vem a expressão

$$\frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{Y} + \sqrt[3]{Z} \right)$$

que é a fórmula resolvente de Cardano-Tartaglia.

Analogamente, Lagrange mostra que todos os processos conhecidos para chegar à fórmula resolvente da equação do quarto grau dependem da possibilidade de achar funções das raízes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 que, quando estas são permutadas de todas as 24 maneiras possíveis, tomem apenas três valores diferentes, de modo a esses valores serem as raízes de uma equação cúbica auxiliar cujos coeficientes são polinômios nos coeficientes da equação original.

Lagrange é assim conduzido ao estudo sistemático de funções de muitas variáveis e do seu comportamento (em particular o número de valores que tomam) sob permutações dessas variáveis. Demonstra muitas proposições a respeito desta questão, podendo dizer-se que o cálculo das permutações de facto nasce aqui.

A aplicação do seu método de análise *a priori* das equações para os graus 3 e 4 contém já várias das ideias fundamentais da futura teoria de Galois, como o objectivo essencial de exprimir racionalmente as raízes da equação proposta em termos de quantidades intermédias que por sua vez se obtêm dos coeficientes usando extracções sucessivas de radicais.

Diz Lagrange, já perto do fim:

Eis aqui, se não me engano, os verdadeiros princípios da resolução das equações e a análise mais própria para lá chegar; tudo se reduz, como vemos, a uma espécie de cálculo das combinações, pelo qual encontramos *a priori* os resultados que devemos esperar. Seria oportuno aplicá-los às equações do quinto grau e dos graus superiores, cuja resolução é até ao momento desconhecida; mas esta aplicação exige um número demasiado grande de investigações e de combinações, cujo sucesso é de resto muito duvidoso, para que possamos neste momento dedicar-nos a tal trabalho; esperamos no entanto poder voltar a isso noutra altura, e contentar-nos-emos aqui com ter lançado os fundamentos de uma teoria que nos parece nova e geral.

Noutra passagem, Lagrange admite que para o quinto grau pode não haver uma fórmula resolvente com radicais como as que existem para os graus anteriores.

Este trabalho de Lagrange teve enorme influência. O italiano Paolo Ruffini, no virar para o século XIX, coloca-se exactamente no mesmo ponto de vista e apresenta uma demonstração da inexistência de uma fórmula resolvente para as equações de grau 5. Embora o seu raciocínio tenha uma lacuna, Ruffini procede a uma análise pormenorizada do que hoje chamaríamos os subgrupos do grupo simétrico S_5 . Alguns anos mais tarde, Cauchy elogia Ruffini e generaliza os seus resultados sobre permutações. Pouco depois, Abel completa a demonstração da inexistência de tal fórmula resolvente. O raciocínio de Abel combina as técnicas de Lagrange com os resultados de Ruffini e Cauchy sobre permutações.

O jovem Galois entra em cena logo a seguir, por volta de 1830. Todos já ouvimos falar da sua vida dramática, da sua morte num duelo aos 20 anos, da noite anterior ao duelo fatal passada a escrever cartas e resumos das suas descobertas.

Qual é a sua contribuição exactamente na questão das equações? Ouçamos as suas palavras:

Dada uma equação algébrica de coeficientes quaisquer, numéricos ou literais, reconhecer se as raízes podem ou não exprimir-se por radicais, tal é a questão de que oferecemos uma solução completa.

A questão é muito mais subtil do que a de saber se existe ou não uma fórmula resolvente geral. Demonstrada a inexistência de uma tal fórmula geral para as equações de grau superior a 4, podia em princípio dar-se o caso de para cada equação numérica particular as suas raízes se exprimirem usando radicais em função dos coeficientes, sem essas expressões provirem de uma fórmula geral. Mas de facto não é assim: há equações para as quais isso é possível e há outras para as quais não é. É natural que tal possibilidade dependa da forma particular da equação e das suas raízes, e Galois esclareceu como se processa essa dependência.

A solução de Galois é completa, mas o importante não é tanto o esclarecimento da velhíssima questão das equações. O importante é a extraordinária fecundidade do novo ponto de vista proposto, que é nem mais nem menos que o da Teoria dos Grupos, criada de modo fulgurante por Galois depois do tactear de Lagrange, Ruffini e Cauchy com as permutações. O próprio Galois diz da questão da resolubilidade das equações por radicais:

Podemos afirmar que não existe na Análise pura matéria mais obscura e talvez mais isolada de tudo o resto.

O objecto de aplicação da nova teoria são as equações. A cada equação Galois associa de forma precisa um grupo de permutações das suas raízes. E demonstra com extraordinária elegância conceptual (e concisão, o que não ajudou os seus contemporâneos a entendê-lo) que a resolubilidade da equação por radicais depende de o grupo ter ou não ter certa propriedade (a que hoje se chama *solubilidade*), relacionada com a sua estrutura de subgrupos. O grupo da equação reflecte portanto se esta goza ou não da propriedade de ser resolúvel por radicais: tal acontece se e só se o grupo for solúvel.

O que importa aqui é este original ponto de vista. Na História da Matemática Galois é uma figura virada para o futuro, e não, como aconteceria se se tivesse limitado a esclarecer

a obscura e isolada matéria das equações, virada para o passado. A teoria dos grupos, sobretudo a maneira como o seu criador a usou, veio a invadir e a influenciar decisivamente domínios variados da Matemática e das suas aplicações.

Da plataforma iniciada por Lagrange e continuada por Ruffini, Cauchy e Abel, Galois transporta a questão para um nível completamente diferente, com uma invenção conceptual que se liberta do contexto original e se coloca no centro da abordagem matemática moderna a muitas questões de Geometria e Análise.

Uma analogia geométrica simples e sugestiva permite compreender melhor a definição do grupo de uma equação. Trata-se da noção de simetria de uma figura plana. Pense-se em todas as bijecções do plano nele próprio que conservam distâncias (as chamadas *isometrias* do plano), e dessas tomem-se apenas as que transformam a figura dada nela própria. Este conjunto é um grupo, que se chama *grupo das simetrias* da figura, e reflecte de forma natural a forma da figura, pois traduz as possibilidades de, movendo-a sem a deformar, fazê-la coincidir com ela própria.

Suponhamos por exemplo que a figura dada é um quadrado. Facilmente se vê que uma isometria que transforme o quadrado nele próprio tem que aplicar vértices em vértices. O grupo procurado é portanto, numerando os vértices de 1 a 4, um subgrupo do grupo simétrico S_4 . Mas não é todo o S_4 . É simples ver que, designando por R a rotação de 90° no sentido directo em torno do centro do quadrado, e por S, T, U e V as reflexões relativamente às medianas e às diagonais do quadrado, o grupo tem exactamente oito elementos: $I, R, R^2, R^3, S, T, U, V$. A sua tabela é a seguinte:

o	I	R	R^2	R^3	S	T	U	V
I	I	R	R^2	R^3	S	T	U	V
R	R	R^2	R^3	I	T	U	V	S
R^2	R^2	R^3	I	R	U	V	S	T
R^3	R^3	I	R	R^2	V	S	T	U
S	S	V	U	T	I	R^3	R^2	R
T	T	S	V	U	R	I	R^3	R^2
U	U	T	S	V	R^2	R	I	R^3
V	V	U	T	S	R^3	R^2	R	I

Mas se tivermos um rectângulo (não quadrado), o grupo de simetrias é mais pequeno. Mantendo as notações acima, o grupo terá apenas os elementos I, R^2, S, U . Um rectângulo é uma figura “menos simétrica” do que um quadrado, e esse facto é reflectido pela menor riqueza do seu grupo de simetrias. Já uma circunferência tem um grupo de simetrias infinito. O grupo de simetrias de uma figura “mede” assim a suas propriedades de simetria.

A analogia agora é a seguinte. Seja dada uma equação $p(x) = 0$, com $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ as raízes da equação. A extensão $\mathbb{M} = \mathbb{K}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vai desempenhar aqui o papel do plano no exemplo acima, enquanto a equação desempenha o papel da figura a estudar. As transformações bijectivas são as aplicações de \mathbb{M} nele próprio que conservam as operações de corpo, a que se costuma chamar automorfismos de \mathbb{M} ; e dessas tomamos apenas aquelas que fixam os elementos de \mathbb{K} (e portanto transformam o polinómio $p(x)$ nele próprio). Estes automorfismos são os elementos do grupo de Galois da equação.

Facilmente se vê que um automorfismo de \mathbb{M} que fixe os elementos de \mathbb{K} tem que aplicar raízes de $p(x)$ em raízes de $p(x)$. (As raízes desempenham aqui o papel dos vértices.) O grupo em causa pode portanto ser visto como um subgrupo de S_n .

De novo podemos olhar para o grupo de uma equação como, de alguma forma, medindo a “simetria” da equação. Para equações de grau 4 ou menor, os seus grupos são todos solúveis, e as equações são solúveis por radicais.

Para o grau 5 ou superior, existem equações tão “simétricas” que os seus grupos já não são solúveis, e é portanto impossível, pelo teorema de Galois, exprimir as raízes dessas equações em termos dos coeficientes usando radicais. Por exemplo, pode mostrar-se que o grupo da equação $x^5 - 4x + 2 = 0$ é S_5 . Este grupo não é solúvel, o que significa que é impossível exprimir as raízes dessa equação a partir dos coeficientes usando as quatro operações algébricas e a extracção de radicais.

Este ponto de vista concreto, em que os grupos aparecem como grupos de transformações – não necessariamente finitos – que deixam invariantes os objectos mais variados, revelou-se extremamente fecundo noutros campos da Matemática, nas mãos de Klein, Lie, Poincaré e Cartan. E sucederam-se também, até aos dias de hoje, as aplicações a outras áreas científicas, como a Cristalografia (na descrição das estruturas cristalinas que ocorrem na natureza) e a Física (na classificação das partículas fundamentais).

*

O segundo episódio que vou recordar, ao pé do anterior, é um *fait divers*, mas tem o interesse de se passar em Portugal. Trata-se de um conflito entre duas personalidades bem conhecidas da História da Matemática em Portugal, José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha, e de uma intervenção a respeito desse conflito, mais de um século mais tarde, de Francisco Gomes Teixeira, figura tutelar da casa onde nos encontramos e, na verdade, de toda a Ciência portuguesa.

José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha foram ambos professores na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra depois da grande reforma de 1772 (os únicos portugueses). As suas vidas foram muito diferentes.

O primeiro nasceu em 1744, foi tenente num regimento de artilharia, e indicado pelo próprio Marquês de Pombal ao Reitor da Universidade para professor na nova Faculdade. Quando D. José morreu e o governo do Marquês caiu, Anastácio da Cunha foi preso às ordens da Inquisição, condenado num auto-da-fé em Lisboa e impedido de voltar à Universidade. Morreu de doença com apenas 42 anos. Não há tempo para dar conta aqui das vicissitudes da sua vida, que estão bem documentadas. Deixou uma obra matemática notável, de que o aspecto mais saliente é a tentativa, em alguns aspectos bem sucedida, de fundamentar a Análise em bases rigorosas, tarefa que só no século XIX, com Cauchy, Weierstrass e outros, se viu levada a cabo por completo.

Quanto a Monteiro da Rocha, era 10 anos mais velho. Foi jesuíta no Brasil, tendo abandonado a Companhia quando Pombal a expulsou do país. Regressado a Portugal na década de 60 do século XVIII, teve papel importante na redacção dos novos Estatutos para a Universidade, sendo com naturalidade nomeado professor na Faculdade de Matemática logo que esta foi criada. Aqui ficou muitos anos, vindo a ser director da Faculdade, director do Observatório Astronómico (que ele próprio criou) e vice-reitor da Universidade. Foi um dos primeiros sócios da Academia das Ciências de Lisboa. Deixou vários trabalhos sobre Matemática e Astronomia, e traduziu alguns manuais para uso no ensino da Faculdade.

Das relações entre estas duas figuras no início, enquanto conviveram na Faculdade em Coimbra, não temos informação precisa. Talvez o indício mais revelador seja um poema muito interessante de Anastácio da Cunha, intitulado *Contra os vícios que impedem o progresso das ciências*. O poema é um diálogo entre dois personagens, Alcino e Montésio. É provável que se trate do próprio Anastácio e de Monteiro. A ser assim, o poema revela

da parte do primeiro certo respeito e mesmo ternura pelo segundo, embora com alguma ironia:

Que te serve, Montésio, envelheceres
Curvado sobre os livros, noite e dia...

Na resposta a Alcino, diz Montésio que os fins que se propõe, em seus trabalhos, são:

O ser útil ao rei, à pátria, ao estado;
O respeitar das leis o mando augusto...

Seja como for, não é difícil imaginar o contraste entre as duas personalidades. Anastácio da Cunha é um espírito livre, um poeta apaixonado. Monteiro da Rocha é a imagem do rigor austero, um construtor de instituições, defensor dos estatutos pombalinos durante anos, muito tempo depois da queda do Marquês.

Nos anos de 1785-86, com Monteiro em Coimbra e Cunha já em Lisboa (professor na Casa Pia), os dois travam uma polémica escrita muito violenta, que revela grande degradação nas suas relações. Tudo começa com uma carta de Anastácio da Cunha a uma terceira pessoa, carta cujo texto se torna público. Monteiro da Rocha responde, e há uma réplica de Cunha. A causa próxima da controvérsia é uma crítica de Anastácio da Cunha, na primeira carta, a um prémio atribuído pela Academia das Ciências de Lisboa, num processo em que esteve envolvido Monteiro da Rocha.

Estes textos (publicados, com extensas notas, por António José Teixeira na revista *O Instituto* entre 1890 e 1892) são extremamente interessantes e reveladores, pela variedade de assuntos tratados, pela vivacidade, pela dureza. Neles há de tudo um pouco: análise de questões matemáticas, reflexões sobre pedagogia, acusações de incompetência, remoques pessoais.

É impossível resumir estes textos aqui, e é pena (essa é que seria uma verdadeira história de contar!). Mas das várias questões matemáticas abordadas, pode ter interesse recordar uma, precisamente porque Gomes Teixeira, em 1905, dedicou um artigo ao esclarecimento dela.

Na réplica final de Anastácio da Cunha – a que Monteiro da Rocha, que se saiba, já não respondeu – lê-se a certa altura:

Não é possível tirar-se-lhe [a Monteiro da Rocha] o costume de dar por erróneo o que não entende! Podia lembrar-se do que lhe sucedeu com a equação da catenária na sua *Tradução da Mecânica* do Abade Marie; do absurdo que imprimiu nas erratas presumindo que emendava o autor; e devia ter algum respeito a quem está acostumado há muito tempo a emendar-lhe os seus erros. Mas só calcula bem os nossos lugares relativos. Fia-se em estar de alto, e eu por terra.

A *Mecânica* do Abade Marie foi um dos livros traduzidos por Monteiro da Rocha. Em determinada trecho desta obra, discute-se a catenária, a curva cuja forma é assumida por um cabo suspenso pelos extremos. Claro que na situação de um cabo sujeito à força da gravidade se podem supor as forças paralelas. O livro de Marie analisa a seguir o caso em que as forças apontam para um ponto, um centro de atracção. Depois de certas considerações, chega-se à representação paramétrica

$$x = z \cos(\theta - \varphi), \quad y = z \sin(\theta - \varphi)$$

onde

$$z = \frac{1 - m^2}{2} + \frac{1 + m^2}{2} \cos \frac{2m}{1 + m^2} \varphi$$

e

$$m^2 = \frac{b + a}{b - a} \quad (b > a).$$

φ é o parâmetro da curva. a , b e θ são constantes, e z é a norma do vector (x, y) , supondo que a origem das coordenadas está no centro de atracção das forças.

Diz Marie, sem demonstração ou mais comentários:

Se m for um número inteiro, a curva é algébrica.

Na sua errata, Monteiro da Rocha, nesta frase, manda substituir m por $m + \frac{1}{m}$. É esta correcção que Anastácio da Cunha qualifica de “absurda”, e é esta divergência que Gomes Teixeira analisa, análise que, apesar de se tratar sem dúvida de uma questão de pormenor e não muito difícil, se revela interessante.

O texto de Gomes Teixeira, “Sobre uma questão entre Monteiro da Rocha e Anastácio da Cunha”, é o primeiro artigo do primeiro volume dos *Anais científicos da Academia Politécnica do Porto*, que ele próprio fundou em 1905.

Para analisar a questão da algebricidade da curva é bastante óbvio que é preciso ir à procura de relações algébricas entre $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ e $\cos \frac{2m}{1+m^2}\varphi$. Gomes Teixeira procede assim. Suponha-se que $\frac{2m}{1+m^2}$ é racional, digamos

$$\frac{2m}{1+m^2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

com α e β inteiros. Recordem-se as fórmulas de Bernoulli para o coseno e o seno do múltiplo de um ângulo:

$$\cos k\omega = \frac{1}{2} \left[(2 \cos \omega)^k - \frac{k}{1!} (2 \cos \omega)^{k-2} + \frac{k(k-3)}{2!} (2 \cos \omega)^{k-4} - \dots \right]$$

$$\sin k\omega = \sin \omega \left[(2 \cos \omega)^{k-1} - \frac{k-2}{1!} (2 \cos \omega)^{k-3} + \frac{(k-3)(k-4)}{2!} (2 \cos \omega)^{k-5} - \dots \right]$$

Aplicando a primeira delas com $k = \alpha$ e $\omega = \frac{\varphi}{\beta}$ obtém-se

$$\cos \alpha \frac{\varphi}{\beta} = \frac{1}{2} \left[\left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta} \right)^\alpha - \frac{\alpha}{1!} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta} \right)^{\alpha-2} + \frac{\alpha(\alpha-3)}{2!} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta} \right)^{\alpha-4} + \dots \right]$$

Aplicando as duas com $k = \beta$ e $\omega = \frac{\varphi}{\beta}$ obtém-se

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \left[\left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta} \right)^\beta - \frac{\beta}{1!} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta} \right)^{\beta-2} + \frac{\beta(\beta-3)}{2!} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta} \right)^{\beta-4} + \dots \right]$$

$$\sin \varphi = \sin \frac{\varphi}{\beta} \left[\left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta} \right)^{\beta-1} - \frac{\beta-2}{1!} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta} \right)^{\beta-3} + \frac{(\beta-3)(\beta-4)}{2!} \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta} \right)^{\beta-5} + \dots \right]$$

Agora tomemos as expressões para x e y , recordando que $\frac{2m}{1+m^2} = \frac{\alpha}{\beta}$:

$$x = z \cos(\theta - \varphi) = \left(\frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2} \cos \frac{\alpha}{\beta} \varphi \right) (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi)$$

$$y = z \sin(\theta - \varphi) = \left(\frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2} \cos \frac{\alpha}{\beta} \varphi \right) (\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi)$$

Nestas duas expressões vamos substituir $\cos \frac{\alpha}{\beta} \varphi$, $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$ pelas fórmulas anteriormente obtidas. Para aligeirar a escrita ponhamos $Z = \cos \frac{\varphi}{\beta}$ e $W = \sin \frac{\varphi}{\beta}$. Chegamos a um resultado da forma

$$x = A_1.Z^{\alpha+\beta} + A_2.Z^{\alpha+\beta-1} + \dots + W.(B_1.Z^{\alpha+\beta-1} + B_2.Z^{\alpha+\beta-2} + \dots)$$

$$y = a_1.Z^{\alpha+\beta} + a_2.Z^{\alpha+\beta-1} + \dots + W. (b_1.Z^{\alpha+\beta-1} + b_2.Z^{\alpha+\beta-2} + \dots)$$

Aqui Gomes Teixeira diz que os coeficientes $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ são “quantidades constantes”. Este é um ponto interessante. É evidente que estes coeficientes são funções racionais das constantes originais a e b , e também, não de θ , mas de $\cos \theta$ e $\sin \theta$. Claramente os coeficientes da relação algébrica procurada entre x e y vão ser deste tipo.

A existência dessa relação é agora fácil de estabelecer. Já temos duas relações polinomiais entre x, y, Z e W . Como também se tem

$$Z^2 + W^2 = 1,$$

eliminando Z e W entre as três equações temos uma relação algébrica do tipo $g(x, y) = 0$ entre x e y .

Conclusão: sob a hipótese feita de $\frac{2m}{1+m^2}$ ser racional, a curva em causa é algébrica (com coeficientes do tipo descrito).

Esta análise de Gomes Teixeira dá razão tanto a Marie como, de certa forma, também a Monteiro da Rocha, porque mostra que a curva é algébrica tanto quando m é inteiro (como diz Marie) como quando $m + \frac{1}{m}$ é inteiro (como diz Monteiro da Rocha), já que em ambos os casos $\frac{2m}{1+m^2}$ é racional. Claro que Monteiro da Rocha erra ao corrigir Marie, mas não erra na “correção” que propõe.

Mas Gomes Teixeira não pára aqui, e mostra que uma pequena variante do mesmo raciocínio sugeriria que a curva só é algébrica se m for inteiro (caminho provavelmente seguido por Marie, e compreendido por José Anastácio da Cunha) e outra variante sugeriria que isso só acontece se $m + \frac{1}{m}$ for inteiro (caminho provavelmente seguido por Monteiro da Rocha, e que o terá levado à errata criticada por Anastácio da Cunha).

Diz Gomes Teixeira no início do seu artigo:

Na lista dos matemáticos notáveis que teve Portugal no século XVIII, ocupam o lugar primordial José Monteiro da Rocha e José Anastácio da Cunha. Foram ambos lentes na Universidade de Coimbra na ocasião da célebre reforma desta grande instituição pelo Marquês de Pombal e foram ambos considerados pelos

seus contemporâneos como homens de grande valor, conceito que a história da ciência portuguesa confirmou. Este valor, só eles, inimigos irreconciliáveis, o não reconheciam um ao outro; e por isso quem formasse opinião a respeito deles pelo que cada um dizia do seu adversário, faria de ambos juízo bem injusto.

*

Estas duas histórias não pretendem ter moral nenhuma, mas apenas, como disse atrás, ilustrar o interesse que tem olhar de perto para certos episódios e personalidades neles intervenientes. Só assim se apreende completamente a “espessura” dessas personalidades, que faz a verdadeira história.

O Professor José Morgado pertence seguramente à espessura, à substância da Matemática em Portugal neste século. Creio que é isso mesmo que aqui estamos a assinalar e a celebrar.