NÃO-NEGATIVIDADE, SOMAS DE QUADRADOS E OPTIMIZAÇÃO

JOÃO GOUVEIA

Resumo. Quando é que um polinómio é não-negativo? E quando é que o podemos escrever como uma soma de quadrados de outros polinómios? Perguntas como estas têm ocupado matemáticos desde Hilbert. Nos últimos anos, estas questões ganharam especial importância quando foi descoberto como se podiam utilizar eficientemente para encontrar mínimos de polinómios, permitindo inúmeras aplicações às mais diversas áreas. Este artigo pretende mostrar ao leitor uma breve história desta área, partindo dos resultados de Hilbert e viajando no tempo até às fronteiras actuais da investigação.

1. Uma breve história das somas de quadrados

Os polinómios de coeficientes reais são objectos aparentemente simples, no entanto o seu estudo tem sido historicamente uma fonte inesgotável de problemas. Áreas inteiras da matemática nasceram motivadas por estes objectos: das fórmulas resolventes à teoria de Galois, do estudo de curvas algébricas à geometria algébrica. Neste artigo debruçar-nos-emos sobre uma propriedade destes polinómios que motivou a criação da área da geometria algébrica real com ligações surpreendentes a problemas práticos de optimização.

De facto, muitos problemas importantes de optimização, por exemplo nas áreas de visão computadorizada, bioestatística ou localização de sensores, envolvem apenas polinómios. A resolução exacta destes problemas é muito difícil, tornando-se por isso importante desenvolver métodos para aproximar soluções. A ferramenta que nos permitirá desenvolver esses métodos é a teoria dos *polinómios não-negativos*, isto é, daqueles que tomam valores não-negativos quaisquer que sejam os valores (reais) das variáveis.

Esta propriedade é em geral muito complicada de verificar. Consideremos por exemplo o polinómio

$$p(x,y) = x^2 + x^4 + y^2 - x^2y^2 - 2y^3 + y^4.$$

Será que p é não-negativo? Olhando para o gráfico deste polinómio, na Figura 1, parece provável que tal seja o caso, mas esta está longe de ser uma garantia de não-negatividade. Para termos a certeza de que o polinómio é realmente não-negativo, é necessária uma melhor justificação. Uma forma de certificar que o polinómio p é não-negativo é apresentar uma decomposição de p como soma de quadrados de outros polinómios. Por exemplo, neste caso, verificamos que

$$p(x,y) = (x^2 - y^2 + y)^2 + (xy - x)^2. \tag{1}$$

Para qualquer valor de x e y, a expressão da direita é sempre não-negativa, logo p é um polinómio não-negativo, confirmando o resultado sugerido pelo gráfico.

Uma questão que se levanta é se para qualquer polinómio não-negativo poderemos encontrar um certificado deste tipo. A procura destas decomposições é um

Publicado em *Números, cirurgias e nós de gravata: 10 anos de Seminário Diagonal no IST*, J. P. Boavida, R. P. Carpentier, L. Cruz-Filipe, P. S. Gonçalves, E. Grifo, D. Henriques, A. R. Pires (editores), IST Press, 2012.

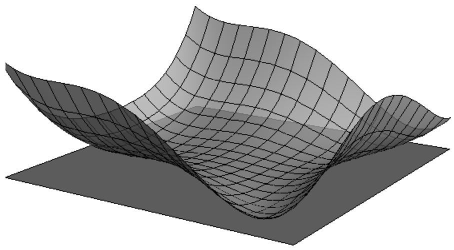

FIGURA 1: Gráfico do polinómio $x^2+x^4+y^2-x^2y^2-2y^3+y^4$. Figura criada pelo autor usando o programa Mathematica.

tópico muito antigo. Em meados do século XIX já era conhecido o facto de um polinómio não-negativo de uma variável ou de segundo grau ser sempre uma soma de quadrados, mas nada se sabia para além disso. A questão da existência destes certificados foi completamente resolvida por Hilbert em 1888 [2], que mostrou que, para polinómios de grau $2d$ em n variáveis, ser não-negativo ou ser decomponível em soma de quadrados são condições equivalentes se e só se: $d=1$; $n=1$; ou $d=2$ e $n=2$. Para todos os outros valores de d e n, existem polinómios de grau $2d$ que são não-negativos mas não têm qualquer decomposição em soma de quadrados.

Assim, para além de polinómios de uma variável e polinómios de segundo grau, a única classe em que esperamos que todos os polinómios não-negativos tenham certificados em termos de somas de quadrados é o caso de polinómios de quarto grau em duas variáveis. Em particular, o exemplo acima está nestas condições.

O processo que Hilbert utilizou para provar a existência de polinómios não-negativos que não são somas de quadrados não oferece nenhum método para construir um destes polinómios. De facto, o primeiro exemplo concreto de um destes polinómios foi apenas obtido em 1967 por Motzkin [7], quase 80 anos depois da demonstração de Hilbert.

O polinómio de Motzkin, dado por

$$M(x,y)=x^4y^2+y^4x^2+1-3x^2y^2,$$

é não-negativo, mas não é uma soma de quadrados.

A prova de que este polinómio não é uma soma de quadrados é bastante simples, e um leitor com algum tempo nas mãos poderá tentar reconstruí-la. A não-negatividade pode ser provada usando a desigualdade aritmética-geométrica. Estes métodos são simples, mas dependem fortemente da estrutura deste polinómio em particular, não sendo fáceis de generalizar. Isto parece sugerir que talvez existam poucos polinómios nestas condições, mas tal não é o caso. De facto, Blekherman [1] provou que, para grau maior que dois, se fixarmos o grau e deixarmos o número de variáveis tender para infinito, a proporção entre polinómios que são somas de quadrados e polinómios não-negativos tende para zero. Isto significa, de certa forma, que existem muito mais polinómios não-negativos que somas de quadrados, e que aqueles que têm certificados são a excepção e não a regra.

As investigações de Hilbert sobre somas de quadrados levaram-no a incluir nos seus famosos vinte e três problemas a seguinte questão:

17º Problema de Hilbert. Dado um qualquer polinómio não-negativo, será sempre possível escrevê-lo como uma soma de quadrados de funções racionais (i.e., de quocientes de polinómios)?

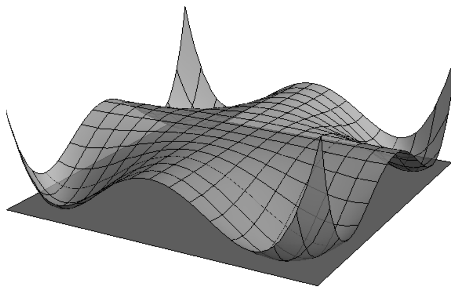

FIGURA 2: $M(x,y)$ é não-negativo e tem quatro zeros, em $(\pm 1, \pm 1)$. Figura criada pelo autor usando o programa Mathematica.

Por exemplo, o polinómio de Motzkin tem uma expressão deste tipo,

$$M(x,y) = (x^2+y^2+1)\left(\frac{x^3y+xy^3-2xy}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2,$$

o que em particular prova que é sempre não-negativo. Em 1927, Artin provou que a resposta ao 17º Problema de Hilbert é afirmativa. Este problema foi uma das questões que deu origem à geometria algébrica real, uma área que trata em particular estes problemas de não-negatividade. Nesta introdução, vamos concentrar-nos apenas nas somas de quadrados de polinómios e nas suas aplicações.

2. Somas de quadrados e matrizes

Se verificar que um polinómio é uma soma de quadrados fosse tão difícil como verificar que é não-negativo, os certificados que discutimos anteriormente teriam pouca aplicabilidade. Felizmente, este não é o caso. Mas primeiro temos de introduzir algumas definições de álgebra linear.

Dizemos que uma matriz M, n por n, real e simétrica é *semidefinida positiva* ou, de forma abreviada, SDP, se, para todos os vectores reais $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (que consideraremos sempre como vectores coluna), o produto $\mathbf{v}^{\mathrm{T}} M \mathbf{v}$ for não-negativo. Se M é uma matriz $n \times n$ real e simétrica, as seguintes condições são equivalentes:

- M é semidefinida positiva.
- Existem n vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ tais que $M = \mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \mathbf{v}_n\,\mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}$.
- Todos os valores próprios de M são não-negativos.

Este é um resultado clássico que pode ser encontrado na maioria dos textos de Álgebra Linear. Neste texto apenas precisaremos da equivalência entre as duas primeiras condições, que nos permitirá relacionar somas de quadrados com matrizes. Comecemos, como ilustração, com a soma de quadrados que já vimos em (1). Consideremos o vector $[x,y]_2$ de todos os monómios em x e y de grau menor ou igual a dois, isto é,

$$[x,y]_2 = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Para simplificar a notação usaremos $\mathbf{x}$ para (x,y), e escreveremos apenas $[\mathbf{x}]_2$. Então o polinómio (x^2-y^2+y), que usámos na decomposição em soma de quadrados (1), pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}[\mathbf{x}]_2,$$

e o polinómio $(xy-x)$, que também foi usado nessa decomposição, como

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}[\mathbf{x}]_2.$$

Designemos o primeiro vector de coeficientes por $\mathbf{v}_1$ e o segundo por $\mathbf{v}_2$, tendo o cuidado de os transpor para trabalharmos com vectores coluna como anteriormente. Podemos reescrever (1) como

$$p(x,y) = (\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}[\mathbf{x}]_2)^2 + (\mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}[\mathbf{x}]_2)^2 = [\mathbf{x}]_2^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}[\mathbf{x}]_2 + [\mathbf{x}]_2^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}[\mathbf{x}]_2.$$

Se definirmos $A = \mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} + \mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}$, esta matriz é SDP (por uma das equivalências listadas acima) e, efectuando todas as somas e multiplicações, obtemos

$$p(x,y) = [\mathbf{x}]_2^{\mathrm{T}} A\,[\mathbf{x}]_2 = [\mathbf{x}]_2^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_2.$$

Por outro lado, usando as mesmas equivalências, é fácil ver que a identidade $p(x,y) = [\mathbf{x}]_2^{\mathrm{T}} A\,[\mathbf{x}]_2$, onde A é uma qualquer matriz SDP, é uma garantia de que $p(x,y)$ é uma soma de quadrados, uma vez que podemos decompor A como uma soma de $\mathbf{v}_i\,\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}$, e cada $(\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}[\mathbf{x}]_2)^2$ nos dará um termo da soma de quadrados. Como o raciocínio é válido para qualquer polinómio, obtemos a seguinte proposição:

Seja $p(\mathbf{x})$ um polinómio de grau $2d$ em n variáveis $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Designemos por $[\mathbf{x}]_d$ o vector de monómios nas variáveis $\mathbf{x}$ de grau menor ou igual a d, isto é,

$$[\mathbf{x}]_d = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_n^d \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Então $p(\mathbf{x})$ é uma soma de quadrados se e só se existir uma matriz SDP A_p tal que

$$p(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_d^{\mathrm{T}} A_p [\mathbf{x}]_d.$$

Uma matriz A_p que satisfaça esta condição designa-se por *matriz de Hankel* de p.

Note-se que as matrizes de Hankel de um polinómio fixo não são em geral únicas, e que um polinómio pode ter muitas representações diferentes como soma de quadrados. De facto, a condição $p(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_d^{\mathrm{T}} A_p [\mathbf{x}]_d$ impõe condições afins, cortando um subespaço afim no conjunto de todas as matrizes desse tamanho. Uma matriz de Hankel de p será uma matriz que está na intersecção deste espaço afim com o conjunto de todas as matrizes SDP. Torna-se portanto importante encontrar ferramentas para trabalhar com este tipo de objectos.

3. Programação semidefinida

Na secção anterior demos uma caracterização equivalente a um polinómio ter uma decomposição como soma de quadrados, mas não temos para já qualquer forma fácil de verificar este critério. Para isso, necessitamos de uma ferramenta vinda da optimização: *programação semidefinida* (PSD). Para os propósitos deste artigo, um programa semidefinido é um problema de maximização de uma função linear $\ell(X) = \sum a_{ij}X_{ij}$, em que X é uma matriz SDP. Podemos ainda adicionar condições lineares nas entradas de X, isto é, condições do tipo $\sum b_{ij}X_{ij} = b_0$, com b_0 e b_{ij} números reais. Em suma, um programa semidefinido é um problema do tipo

(2)

$$P = \max_{X \in \mathbb{R}^{n\times n}} \sum a_{ij}X_{ij}, \quad \text{restringindo a } X \text{ SDP e tal que } \begin{cases} \sum b_{ij}^1 X_{ij} = b_0^1, \\ \sum b_{ij}^2 X_{ij} = b_0^2, \\ \qquad \vdots \\ \sum b_{ij}^m X_{ij} = b_0^m, \end{cases}$$

onde os a_{ij}, b_{ij}^k e b_0^k são números reais e m o número de condições lineares impostas. Isto permitir-nos-á finalmente manipular eficientemente somas de quadrados, usando as observações do final da secção anterior.

Consideremos como exemplo um polinómio p de quarto grau em duas variáveis. Já vimos que mostrar que este polinómio é uma soma de quadrados é o mesmo que mostrar que

$$p(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \\ xy \\ y^2 \end{bmatrix}$$

para alguma matriz semidefinida positiva A. Expandindo o produto de matrizes, temos

$$\begin{aligned} p(x,y) = A_{11} &+ 2A_{12}x + 2A_{13}y + (2A_{14}+A_{22})x^2 + (2A_{15}+2A_{23})xy + (2A_{16}+A_{33})y^2 \\ &+ 2A_{24}x^3 + (2A_{34}+2A_{25})x^2y + (2A_{26}+2A_{35})xy^2 + 2A_{36}y^3 \\ &+ A_{44}x^4 + 2A_{45}x^3y + (A_{55}+2A_{46})x^2y^2 + 2A_{56}xy^3 + A_{66}y^4, \end{aligned}$$

e comparando coeficientes podemos transformar esta igualdade de polinómios num sistema de equações lineares onde as variáveis são entradas de A. Mas então o problema de verificar se um polinómio p é uma soma de quadrados é equivalente a verificar se existe alguma matriz SDP que verifique essas equações lineares, ou seja, se um problema do tipo (2) tem solução. Este é um problema típico de programação semidefinida e existem algoritmos eficientes que o resolvem numericamente com precisão arbitrária, estando disponíveis gratuitamente.

Uma mais-valia importante desta técnica de verificar se um polinómio é soma de quadrados é que também pode ser adaptada a problemas mais complicados, nomeadamente na optimização polinomial que nos serviu de motivação. Dado um polinómio $p(\mathbf{x})$, o problema

$$p_{\min} = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}), \tag{3}$$

de encontrar o mínimo de p, é extremamente difícil de resolver. No entanto, é um problema importante, com muitas aplicações práticas. Uma técnica que se usa para aproximar a solução deste problema passa por notar que este é equivalente a

$$p_{\min} = \max\{\lambda \in \mathbb{R} : p(\mathbf{x}) - \lambda \text{ é não-negativo}\}.$$

Podemos então substituir a condição de ser não-negativo pela condição mais restritiva de ser uma soma de quadrados, e obtemos o problema

$$p_{sos} = \max\{\lambda \in \mathbb{R} : p(\mathbf{x}) - \lambda \text{ é soma de quadrados}\}. \tag{4}$$

É fácil de ver que $p_{sos} \le p_{\min}$, por isso temos sempre pelo menos um limite inferior para o problema (3). Por outro lado, o problema (4) é um programa semidefinido, e podemos resolvê-lo eficientemente. O programa Yalmip [5], por exemplo, consegue lidar directamente com polinómios, construindo e resolvendo automaticamente o programa semidefinido correspondente. Suponhamos por exemplo que queremos minimizar o polinómio

$$p = x^6 - 2x^4y^2 + 3y^6 - 5xy^3 + 2.$$

Para calcular p_{sos} usando o *software* Yalmip, que corre em Matlab, bastam as seguintes quatro linhas de código.

```
sdpvar x y lambda
p=(x^6 - 2*x^4*y^2 + 3*y^6 - 5*x*y^3 + 2);
solvesos(sos(p-lambda),-lambda,[],lambda)
double(lambda)
```

Correndo este programa, obtemos a resposta -7.7112.

4. Optimização com restrições

Na última secção, vimos como podemos utilizar programação semidefinida para aproximar o mínimo global de um polinómio. Em muitas aplicações estamos interessados em encontrar o mínimo de um polinómio, não em todo o seu domínio, mas apenas numa área mais restrita. Na prática, é este o tipo de problemas que aparece na maioria das aplicações. Nesta secção mostraremos como as mesmas ideias podem ser adaptadas para o problema

$$p_{\min} = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}), \quad \text{restringindo a } \mathbf{x} \text{ tal que } \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) \geq 0, \\ \quad\vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

onde os $g_i(\mathbf{x})$ são polinómios. Isto é, dado o conjunto de polinómios $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_m\}$, queremos encontrar o valor mínimo que o polinómio p atinge no conjunto $S(\mathcal{G})$ definido por

$$S(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ g_1(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots, g_m(\mathbf{x}) \geq 0\}.$$

Estes conjuntos são designados *conjuntos semialgébricos básicos fechados*. Na Figura 3 podemos ver um exemplo de uma destas regiões. Note-se que estas regiões não são necessariamente convexas ou sequer conexas.

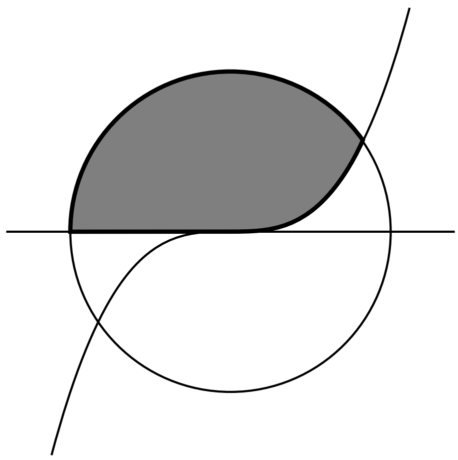

Figura 3: $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0, 1 - x^2 - y^2 \geq 0, y - x^3 \geq 0\}$.

Para utilizarmos técnicas análogas às que utilizámos na secção anterior, temos de encontrar um certificado que garanta que um polinómio é não-negativo em $S(\mathcal{G})$. Uma possibilidade é encontrar uma decomposição do tipo

$$p(\mathbf{x}) = \sigma_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{t} \sigma_i(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}), \tag{6}$$

onde todos os σ_i sejam somas de quadrados. Como somas de quadrados são sempre não-negativas e os polinómios g_i são não-negativos em $S(\mathcal{G})$, qualquer função com uma decomposição deste tipo será não-negativa em $S(\mathcal{G})$. Ao conjunto de todos os polinómios com representações do tipo (6) chamamos *módulo quadrático* de $\mathcal{G}$ e denotamo-lo por $\mathrm{MQ}(\mathcal{G})$. O problema deste certificado é que não sabemos os graus das somas de quadrados σ_i, uma vez que podem existir cancelamentos de monómios quando somamos todos os termos. Isto leva-nos a estabelecer a noção de *módulo quadrático truncado* de $\mathcal{G}$, que denotamos por $\mathrm{MQ}_k(\mathcal{G})$, e que é o conjunto de todos os polinómios com representações do tipo (6) em que os graus de σ_0 e de $\sigma_i g_i$ são menores que $2k$ para todo o i. Usando as ideias da secção anterior, podemos verificar que decidir se um polinómio pertence a $\mathrm{MQ}_k(\mathcal{G})$ corresponde de novo a decidir a exequibilidade de um programa semidefinido. Podemos portanto aproximar o problema (5) pelo problema

$$p^{\mathcal{G}}_{sos,k} = \max\{\lambda \in \mathbb{R} \;:\; p(\mathbf{x}) - \lambda \in \mathrm{MQ}_k(\mathcal{G})\}. \tag{7}$$

Para cada k temos uma aproximação e temos a relação

$$p^{\mathcal{G}}_{sos,1} \leq p^{\mathcal{G}}_{sos,2} \leq \cdots \leq p^{\mathcal{G}}_{sos,k} \leq \cdots \leq p_{\min}.$$

Interessa saber se estas aproximações estão perto do valor $p_{\min}$. O seguinte resultado mostra que, se o problema verificar algumas condições técnicas, as aproximações funcionam, pelo menos no limite. Trata-se do teorema de Putinar:

Seja $S(\mathcal{G})$ 'suficientemente' compacto; então

$$\lim_{k\to\infty} p^{\mathcal{G}}_{sos,k} = p_{\min}.$$

A condição 'suficientemente' compacto é apenas uma condição técnica que pode ser traduzida por exigirmos que para algum $N \in \mathbb{N}$, o polinómio $N - \sum x_i^2$ pertença a $\mathrm{MQ}(\mathcal{G})$. Isto corresponde, de certa forma, à existência de um certificado algébrico de compacidade.

Podemos criar uma versão mais geométrica deste método considerando polinómios lineares. Para cada vector $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, consideremos o polinómio $p(\mathbf{x}) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ e o problema (7), que nos garante que $p(\mathbf{x}) - p^{\mathcal{G}}_{sos,k} \geq 0$ em $S(\mathcal{G})$. Para cada valor de $\mathbf{c}$, obtemos uma inequação linear que é válida em todo o conjunto $S(\mathcal{G})$, e define um semi-espaço. Intersectando todos estes semi-espaços, obtemos um conjunto convexo e fechado que contém $S(\mathcal{G})$. Este conjunto é denotado por $L_k(\mathcal{G})$ e chama-se a *k–ésima aproximação de Lasserre*. Estas formam uma hierarquia de aproximações convexas de $S(\mathcal{G})$, e verificam

$$L_1(\mathcal{G}) \supseteq L_2(\mathcal{G}) \supseteq \cdots \supseteq L_k(\mathcal{G}) \supseteq \cdots \supseteq S(\mathcal{G}).$$

Estas aproximações (e outras relacionadas) permitem atacar problemas de optimização polinomial, e têm inúmeras aplicações quer em optimização combinatória quer em optimização contínua. Para ilustração retomemos o exemplo da Figura 3. Usando Yalmip, podemos escolher diversas direcções $\mathbf{c} = (\cos\theta, \sin\theta)$, maximizar λ tal que $c_1x + c_2y - \lambda$ pertence a $\mathrm{MQ}_2(\mathcal{G})$, e desenhar $c_1x + c_2y - \lambda = 0$ para esse valor de λ. Repetindo o processo 128 vezes obtemos a Figura 4.

Podemos observar nessa figura que $L_2(\mathcal{G})$ coincide com $S(\mathcal{G})$ em quase toda a fronteira, excepto perto da origem, onde $L_2(\mathcal{G})$ é um pouco maior, contendo a região a branco. Usando a mesma ideia, podemos visualizar a hierarquia de aproximações para qualquer conjunto semialgébrico.

5. Para saber mais

Um livro que trata o problema das somas de quadrados na perspectiva da geometria algébrica real é *Positive polynomials and sums of squares* de Murray Marshall [6]. Para uma perspectiva vinda da optimização, o livro *Moments, positive polynomials and their applications* de Jean Bernard Lasserre [3] é uma boa opção. Dois

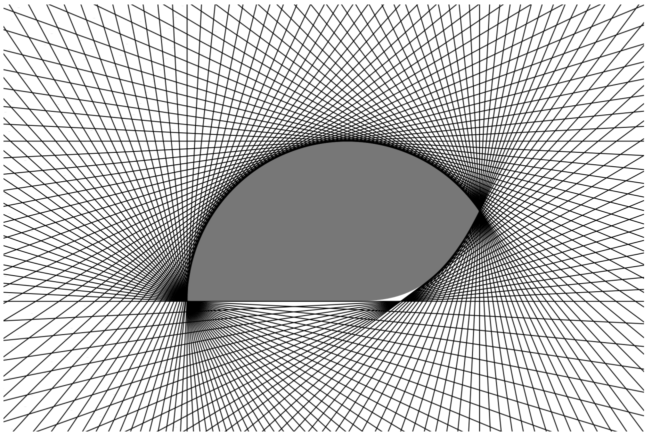

FIGURA 4: $S(\mathcal{G})$ comparado com $L_2(\mathcal{G})$.

bons textos que resumem diferentes partes desta área são o artigo de Monique Laurent [4] sobre somas de quadrados e o artigo de Bruce Resznick [8] que desenvolve em mais pormenor a história do 17º problema de Hilbert, e os resultados que nele tiveram origem.

Referências

[1] Grigoriy Blekherman, *There are significantly more nonnegative polynomials than sums of squares*, Israel J. Math., vol. 153, 2006, pp. 355–380.

[2] David Hilbert, *Ueber die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*, Math. Ann., vol. 32, no. 3, 1888, pp. 342–350.

[3] Jean Bernard Lasserre, *Moments, positive polynomials and their applications*, Imperial College Press Optimization Series, vol. 1, Imperial College Press, London, 2010.

[4] Monique Laurent, *Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials*, Emerging Applications of Algebraic Geometry, ima Volumes in Mathematics and its Applications, vol. 149, Springer, 2009.

[5] J. Löfberg, yalmip*: A Toolbox for Modeling and Optimization in* matlab, Proceedings of the cacsd Conference (Taipei, Taiwan, 2004). `http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip`

[6] Murray Marshall, *Positive polynomials and sums of squares*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 146, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[7] Theodore S. Motzkin, *The arithmetic-geometric inequality*, Inequalities (Proc. Sympos. Wright–Patterson Air Force Base, Ohio, 1965), Academic Press, New York, 1967, pp. 205–224

[8] Bruce Reznick, *Some concrete aspects of Hilbert's 17th Problem*, Real algebraic geometry and ordered structures (Baton Rouge, LA, 1996), Contemp. Math., vol. 253, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 251–272.