Representações mínimas de politopos

João Gouveia
Departamento de Matemática da FCTUC
Largo D. Dinis
3001-501 Coimbra, Portugal
e-mail: jgouveia@mat.uc.pt

Richard Z. Robinson, *Rekha Thomas*
University of Washington
Box 354350
Seattle, WA 98195-4350, USA
e-mail: rzr@uw.edu
rrthomas@uw.edu

Resumo: Polítopos com muitas facetas podem muitas vezes ser escritos como projecções de objectos muito mais simples, como por exemplo polítopos com muito menos facetas. Esta observação permite, por vezes, optimizar eficientemente sobre polítopos aparentemente muito complicados, técnica que tem dado frutos em optimização combinatória. Põe-se então a questão de, dado um polítopo, saber qual o conjunto "mais simples" do qual este é uma projecção. Apresentamos aqui o resultado clássico de Yannakakis, que responde a esta pergunta no caso de representações lineares, e generalizamo-lo para representações semidefinidas, resultado que utilizamos para caracterizar polítopos com representações semidefinidas mínimas.

Abstract: Polytopes with many facets can many times be written as projections of simpler objects, namely, polytopes with a much smaller number of facets. This observation allows us, sometimes, to optimize efficiently over apparently complicated polytopes, a technique that has been very useful in combinatorial optimization. The question arises of, given a polytope, determining the "simplest" set of which it is a projection. Here, we present the classic result of Yannakakis that solves the question for the case of linear representations, and we generalize it to semidefinite representations, allowing us to characterize polytopes with minimal such representations.

palavras-chave: Polítopos; Programação Semidefinida; Raízes de Hadamard.

keywords: Polytopes; Semidefinite Programming; Hadamard Square Roots.

1 Introdução

Um *polítopo* P é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ definido por um sistema de inequações lineares. Assumindo que P tem dimensão máxima, ou seja que o espaço afim mínimo que contém P é $\mathbb{R}^n$, existe um único (a menos de multiplicação por escalares positivos) sistema mínimo de inequações lineares não redundantes que definem P, cada uma das quais definindo uma *faceta* de P. Os *vértices* de P são o subconjunto V (finito) mínimo de P tal que P é o invólucro convexo de V. Qualquer polítopo pode ser representado por $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq 0\}$, onde os a_i são vectores em $\mathbb{R}^m$, m o número de facetas e a desigualdade é considerada entrada a entrada.

Um problema central da programação linear é a optimização de uma função linear sobre um polítopo. Os algoritmos correntes resolvem este problema em tempo polinomial no tamanho dos dados. Se representarmos o polítopo usando as facetas, isso significa que estes algoritmos terão problemas em polítopos com muitas facetas. Poderíamos em alternativa representar o polítopo pelos seus vértices, mas isso não resolveria esta situação quando os polítopos têm muitas facetas e muitos vértices simultaneamente.

Isto motiva a necessidade de encontrar formas alternativas de representar o polítopo, que permitam uma optimização mais eficiente. Uma forma clássica de o fazer é escrever o polítopo como projecção de um objecto mais simples. Neste artigo apresentamos alguns resultados sobre a existência de representações eficientes de polítopos por meio de programação linear e programação semidefinida.

2 Teorema de Yannakakis

Uma *representação linear* de um polítopo P é uma descrição do polítopo P dada por

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y, a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1}y_1 + \cdots a_{n+m}y_m \geq 0\},$$

ou seja, uma descrição de P como projecção de um polítopo numa dimensão maior. O *tamanho* da representação linear será o tamanho dos vectores a_i ou, equivalentemente, o número de facetas do polítopo cuja projecção é P. A motivação para considerar estas representações prende-se com o facto bem conhecido de um polítopo poder ter muito menos facetas que a sua projecção. Um exemplo deste fenómeno é o resultado de Ben-Tal e Nemirovski [1], de que o polígono regular de n-lados pode ser escrito como a projecção de um polítopo de $2\lceil \log_2(n) \rceil$ lados. Na Figura 1 podemos ver a ilustração desse

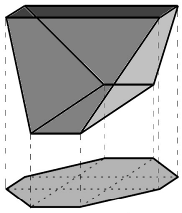

Figura 1: Octógono regular como projecção de um poliedro de seis facetas.

resultado para $n = 8$. Dado um polítopo fixo pretendemos caracterizar o número mínimo de facetas de um polítopo que o tenha como projecção. Para isto temos de introduzir duas definições adicionais. Seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(x) \geq 0, \ldots, h_f(x) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$. A *matriz de folgas de* P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ definida por $S_P(i,j) = h_i(p_j)$.

Seja M uma matriz m por n, não negativa. M tem uma *factorização não negativa* de ordem k, se existirem vectores não negativos $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$, ou seja, se existirem A, m por k, e B, k por n, não negativas com $M = AB$. A *característica não negativa* de M é o menor k para o qual tal factorização existe.

Teorema 2.1 (Yannakakis [4]) *Dado um polítopo P, o tamanho mínimo de uma sua representação linear corresponde à característica não negativa da sua matriz de folgas.*

3 Representações semidefinidas

Uma *representação semidefinida* de um polítopo P é uma descrição

$$P = \{x : \exists y, A_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n + A_{n+1} y_1 + \cdots A_{n+m} y_m \succeq 0\},$$

onde os A_i são matrizes reais simétricas e $A \succeq 0$ significa que A é uma matriz semidefinida positiva. Optimizar sobre esta representação pode ser feito em tempo polinomial no tamanho das matrizes A_i (que denominaremos por *tamanho da representação semidefinida*), recorrendo à programação semidefinida. Para estabelecer um paralelo com o teorema de Yannakakis temos de apresentar uma nova noção de factorização de matrizes: dizemos que uma matriz não negativa M, m por n, tem uma *factorização semidefinida* de ordem k, se existirem matrizes positivas semidefinidas $A_1, \cdots, A_m$ e $B_1, \cdots B_n$ em $\mathbb{R}^{k \times k}$ tais que $M_{i,j} = \langle A_i, B_j \rangle$ para todas as entradas de M.

A *característica semidefinida* de M é o menor k para o qual tal factorização existe.

Teorema 3.1 (G.-Parrilo-Thomas [2]) *Dado um polítopo P, o tamanho mínimo de uma sua representação semidefinida corresponde à característica semidefinida da sua matriz de folgas.*

Não é difícil provar que a matriz de folgas de um polítopo de dimensão d tem característica semidefinida maior ou igual que $d+1$, o que nos levou a questionar quais são exactamente os polítopos de dimensão d que possuem representações semidefinidas mínimas, isto é, de tamanho $d+1$. Terminaremos este artigo com alguns resultados nesta direcção.

Seja M uma matriz não negativa. Uma *raíz quadrada de Hadamard*, que denotaremos por $\sqrt[H]{M}$, é uma matriz cujo quadrado entrada a entrada coincide com M. Note-se que $\sqrt[H]{M}$ está definida apenas a menos de trocas de sinal nas suas entradas pelo que definiremos a *característica de Hadamard* de M como sendo a característica (usual) mínima de entre todas as suas raízes de Hadamard.

Teorema 3.2 *G.-Robinson-Thomas [3] Um polítopo P de dimensão d tem uma representação semidefinida de tamanho $d+1$ se e só se a sua matriz de folgas tiver característica de Hadamard $d+1$.*

Usando este resultado podemos obter resultados interessantes em dimensões baixas, incluindo a caracterização total para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, que pode ser encontrada parcialmente em [3], mas muito permanece ainda por fazer.

Referências

[1] A. Ben-Tal e A. Nemirovski, "On polyhedral approximations of the second-order cone", *Mathematics of Operations Research*, Vol. 26, No. 2 (2001), pp. 193–205.

[2] J. Gouveia, P. Parrilo e R. Thomas, "Lifts of convex sets and cone factorizations", *Mathematics of Operations Research*, a aparecer.

[3] J. Gouveia, R. Robinson e R. Thomas, "Polytopes of minimum positive semidefinite rank", *preprint*, arXiv:1205.5306.

[4] M. Yannakakis, "Expressing combinatorial optimization problems by linear programs", *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 43, No. 3 (1991), pp. 441–466.