Representações mínimas de polítopos

João Gouveia

Universidade de Coimbra

9 de Julho 2012 - Encontro Nacional da SPM

com Pablo Parrilo (MIT), Rekha Thomas (U.Washington) e Richard Z. Robinson (U.Washington)

Politopos

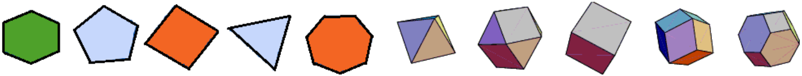
Politopo: Região compacta em $\mathbb{R}^n$ definida por intersecção de semi-espaços.

Polítopos

Polítopo: Região compacta em $\mathbb{R}^n$ definida por intersecção de semi-espaços. De forma equivalente, é o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^n$.

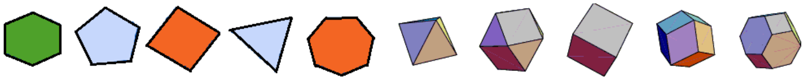
Polítopos

Polítopo: Região compacta em $\mathbb{R}^n$ definida por intersecção de semi-espaços. De forma equivalente, é o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^n$.



Polítopos

Polítopo: Região compacta em $\mathbb{R}^n$ definida por intersecção de semi-espaços. De forma equivalente, é o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^n$.



Optimizar um objectivo linear directamente sobre um polítopo depende do número de facetas e vértices.

Descrição de Polítopos

Para descrever um polítopo P é usual ou listar os vértices ou usar uma descriçao por desigualdades:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq b\},$$

onde b e os a_i são vectores reais e a desigualdade é tomada em cada entrada.

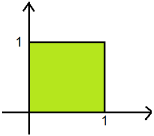
Descrição de Polítopos

Para descrever um polítopo P é usual ou listar os vértices ou usar uma descriçao por desigualdades:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq b\},$$

onde b e os a_i são vectores reais e a desigualdade é tomada em cada entrada.

Exemplo:



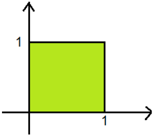
Descrição de Polítopos

Para descrever um polítopo P é usual ou listar os vértices ou usar uma descriçao por desigualdades:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq b\},$$

onde b e os a_i são vectores reais e a desigualdade é tomada em cada entrada.

Exemplo:



$$C = \left\{ (x, y) : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} y \geq \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Representação Linear de um Polítopo

Se um polítopo tem muitas faces, torna-se necessário encontrar descrições alternativas.

Representação Linear de um Polítopo

Se um polítopo tem muitas faces, torna-se necessário encontrar descrições alternativas.

Uma representação linear de um polítopo P é uma descrição

$$P = \{x : \exists y, a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_{n+1} y_1 + \cdots a_{n+m} y_m \geq b\},$$

ou seja, uma descrição de P como projecção de um polítopo numa dimensão maior.

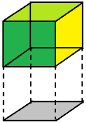
Representação Linear de um Polítopo

Se um polítopo tem muitas faces, torna-se necessário encontrar descrições alternativas.

Uma representação linear de um polítopo P é uma descrição

$$P = \{x : \exists y, a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_{n+1} y_1 + \cdots a_{n+m} y_m \geq b\},$$

ou seja, uma descrição de P como projecção de um polítopo numa dimensão maior.



Representação linear de um quadrado.

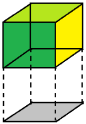
Representação Linear de um Polítopo

Se um polítopo tem muitas faces, torna-se necessário encontrar descrições alternativas.

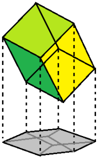
Uma representação linear de um polítopo P é uma descrição

$$P = \{x : \exists y, a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_{n+1} y_1 + \cdots a_{n+m} y_m \geq b\},$$

ou seja, uma descrição de P como projecção de um polítopo numa dimensão maior.



Representação linear de um quadrado.



Representação linear de um hexágono

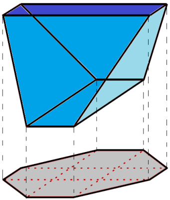
Motivação

A projecção de um polítopo pode ter muito mais facetas que o polítopo original:

Motivação

A projecção de um polítopo pode ter muito mais facetas que o polítopo original:

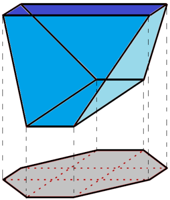
(Ben-Tal + Nemirovski, 2001): Um n-gono regular pode ser escrito como a projecção de um polítopo de $2\lceil \log_2(n) \rceil$ lados.



Motivação

A projecção de um polítopo pode ter muito mais facetas que o polítopo original:

(Ben-Tal + Nemirovski, 2001): Um n-gono regular pode ser escrito como a projecção de um polítopo de $2\lceil \log_2(n) \rceil$ lados.



Para optimizar no polítopo original, podemos optimizar no polítopo "de cima" e projectar a solução.

Representação Semidefinida de um Polítopo

Uma maneira alternativa de representar um polítopo é recorrer a representações semidefinidas.

Representação Semidefinida de um Polítopo

Uma maneira alternativa de representar um polítopo é recorrer a representações semidefinidas.

Uma representação semidefinida de um polítopo P é uma descrição

$$P = \{x : \exists y, A_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n + A_{n+1} y_1 + \cdots A_{n+m} y_m \succeq 0\},$$

onde os A_i são matrizes reais simétricas.

Representação Semidefinida de um Polítopo

Uma maneira alternativa de representar um polítopo é recorrer a representações semidefinidas.

Uma representação semidefinida de um polítopo P é uma descrição

$$P = \{x : \exists y, A_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n + A_{n+1} y_1 + \cdots A_{n+m} y_m \succeq 0\},$$

onde os A_i são matrizes reais simétricas.

Estamos a escrever P como a projecção de um espectraedro, a complexidade do problema de optimização é polinomial no tamanho dos A_i.

Representação Semidefinida de um Polítopo

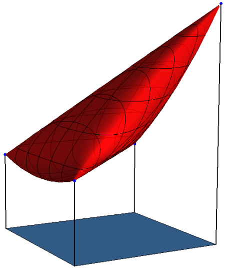
Uma maneira alternativa de representar um polítopo é recorrer a representações semidefinidas.

Uma representação semidefinida de um polítopo P é uma descrição

$$P = \{x : \exists y, A_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n + A_{n+1} y_1 + \cdots A_{n+m} y_m \succeq 0\},$$

onde os A_i são matrizes reais simétricas.

Estamos a escrever P como a projecção de um espectraedro, a complexidade do problema de optimização é polinomial no tamanho dos A_i.



Matriz de Folgas

Seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots, h_f(\mathbf{x}) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

Matriz de Folgas

Seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots, h_f(\mathbf{x}) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

Matriz de Folgas

A matriz de folgas de P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ definida por

$$S_P(i, j) = h_j(p_i).$$

Matriz de Folgas

Seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots, h_f(\mathbf{x}) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

Matriz de Folgas

A matriz de folgas de P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ definida por

$$S_P(i,j) = h_j(p_i).$$

No caso do cubo unitário:

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix} \end{array} \\
\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - y \geq 0 \\ 1 - z \geq 0 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de Folgas

Seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots, h_f(\mathbf{x}) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

Matriz de Folgas

A matriz de folgas de P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ definida por

$$S_P(i, j) = h_j(p_i).$$

No caso do cubo unitário:

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix} & \begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix} & \begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix} & \begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix} \end{array} \\
\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - y \geq 0 \\ 1 - z \geq 0 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de Folgas

Seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots, h_f(\mathbf{x}) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

Matriz de Folgas

A matriz de folgas de P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ definida por

$$S_P(i,j) = h_j(p_i).$$

No caso do cubo unitário:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix} \end{matrix} \\
\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - y \geq 0 \\ 1 - z \geq 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Factorizações de matrizes

Seja M uma matriz m por n, não negativa.

Factorizações de matrizes

Seja M uma matriz m por n, não negativa.

M tem uma factorização não negativa de ordem k, se existirem vectores não negativos $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

Factorizações de matrizes

Seja M uma matriz m por n, não negativa.

M tem uma factorização não negativa de ordem k, se existirem vectores não negativos $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

Ou seja, se existirem A, m por k, e B, k por n, não negativas com

$$M = A \times B.$$

Factorizações de matrizes

Seja M uma matriz m por n, não negativa.

M tem uma factorização não negativa de ordem k, se existirem vectores não negativos $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

Ou seja, se existirem A, m por k, e B, k por n, não negativas com

$$M = A \times B.$$

M tem uma factorização semidefinida de ordem k, se existirem matrizes positivas semidefinidas $A_1, \cdots, A_m$ e $B_1, \cdots B_n$ em $\mathbb{R}^{k \times k}$ tais que $M_{i,j} = \langle A_i, B_j \rangle$.

Teorema de Yannakakis

Teorema (Yannakakis 1991)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então os dois seguintes números são iguais.

Teorema de Yannakakis

Teorema (Yannakakis 1991)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então os dois seguintes números são iguais.

- O menor número de facetas possível de um polítopo Q cuja projecção seja P.

Teorema de Yannakakis

Teorema (Yannakakis 1991)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então os dois seguintes números são iguais.

- O menor número de facetas possível de um polítopo Q cuja projecção seja P.
- O menor número k tal que S tenha uma factorização não negativa de ordem k. [$\text{car}_+(S)$]

Teorema de Yannakakis

Teorema (Yannakakis 1991)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então os dois seguintes números são iguais.

- O menor número de facetas possível de um polítopo Q cuja projecção seja P.
- O menor número k tal que S tenha uma factorização não negativa de ordem k. [$\text{car}_+(S)$]

Teorema (G.-Parrilo-Thomas 2011)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então os dois seguintes números são iguais.

Teorema de Yannakakis

Teorema (Yannakakis 1991)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então os dois seguintes números são iguais.

- O menor número de facetas possível de um polítopo Q cuja projecção seja P.
- O menor número k tal que S tenha uma factorização não negativa de ordem k. [$\text{car}_+(S)$]

Teorema (G.-Parrilo-Thomas 2011)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então os dois seguintes números são iguais.

- O menor número k tal que P tenha uma representação semidefinida com matrizes $k \times k$.

Teorema de Yannakakis

Teorema (Yannakakis 1991)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então os dois seguintes números são iguais.

- O menor número de facetas possível de um polítopo Q cuja projecção seja P.
- O menor número k tal que S tenha uma factorização não negativa de ordem k. [$\text{car}_+(S)$]

Teorema (G.-Parrilo-Thomas 2011)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então os dois seguintes números são iguais.

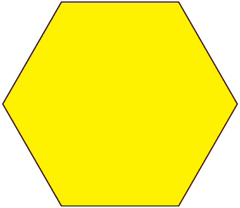
- O menor número k tal que P tenha uma representação semidefinida com matrizes $k \times k$.
- O menor número k tal que S tenha uma factorização semidefinida de ordem k. [$\text{car}_{\text{sdp}}(S)$]

O Hexágono

Considere-se o hexágono regular.

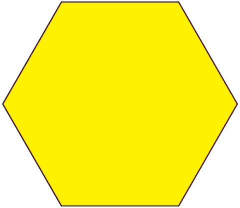
O Hexágono

Considere-se o hexágono regular.



O Hexágono

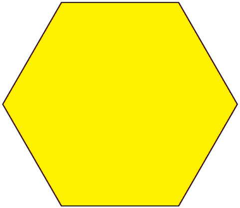
Considere-se o hexágono regular.



Tem uma matriz de folgas 6×6.

O Hexágono

Considere-se o hexágono regular.



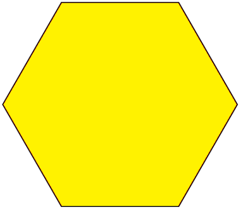
Tem uma matriz de folgas 6×6.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O Hexágono

Considere-se o hexágono regular.

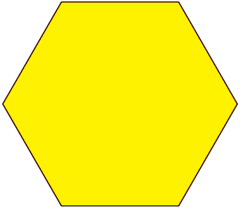
Tem uma matriz de folgas 6×6.



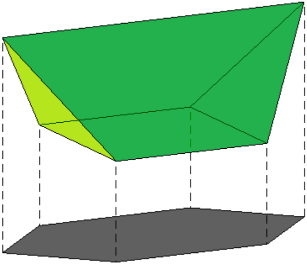
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O Hexágono

Considere-se o hexágono regular.



Tem uma matriz de folgas 6×6.



A questão

Pretendemos estudar quais os polítopos que têm representações “pequenas”.

A questão

Pretendemos estudar quais os polítopos que têm representações “pequenas”.

Um resultado simples permite-nos definir “pequeno”.

Lema (G.-Robinson-Thomas 2012)

Um polítopo de dimensão d não pode ter uma representação semidefinida de ordem menor que $d + 1$.

A questão

Pretendemos estudar quais os polítopos que têm representações "pequenas".

Um resultado simples permite-nos definir "pequeno".

Lema (G.-Robinson-Thomas 2012)

Um polítopo de dimensão d não pode ter uma representação semidefinida de ordem menor que $d + 1$.

Queremos saber que polítopos têm representações de tamanho $d + 1$.

Raízes Quadradas de Hadamard

Seja M uma matrix não negativa. Uma raíz quadrada de Hadamard $\sqrt[H]{M}$ é uma matriz tal que

$$\left(\left[\sqrt[H]{M}\right]_{i,j}\right)^2 = [M]_{i,j}\,.$$

Raízes Quadradas de Hadamard

Seja M uma matrix não negativa. Uma raíz quadrada de Hadamard $\sqrt[H]{M}$ é uma matriz tal que

$$\left(\left[\sqrt[H]{M}\right]_{i,j}\right)^2 = [M]_{i,j}\,.$$

Exemplo:

$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

Raízes Quadradas de Hadamard

Seja M uma matrix não negativa. Uma raíz quadrada de Hadamard $\sqrt[H]{M}$ é uma matriz tal que

$$\left(\left[\sqrt[H]{M}\right]_{i,j}\right)^2 = [M]_{i,j}\,.$$

Exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};\ \sqrt[H]{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Raízes Quadradas de Hadamard

Seja M uma matrix não negativa. Uma raíz quadrada de Hadamard $\sqrt[H]{M}$ é uma matriz tal que

$$\left(\left[\sqrt[H]{M}\right]_{i,j}\right)^2 = [M]_{i,j}\,.$$

Exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};\ \sqrt[H]{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt[H]{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ ou...}$$

Raízes Quadradas de Hadamard

Seja M uma matrix não negativa. Uma raíz quadrada de Hadamard $\sqrt[H]{M}$ é uma matriz tal que

$$\left(\left[\sqrt[H]{M}\right]_{i,j}\right)^2 = [M]_{i,j}\,.$$

Exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};\ \sqrt[H]{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt[H]{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ ou...}$$

Definimos $car_H(M) = \min\{car(\sqrt[H]{M})\}$.

Raízes Quadradas de Hadamard

Seja M uma matrix não negativa. Uma raíz quadrada de Hadamard $\sqrt[H]{M}$ é uma matriz tal que

$$\left(\left[\sqrt[H]{M}\right]_{i,j}\right)^2 = [M]_{i,j} \, .$$

Exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \; \sqrt[H]{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt[H]{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ ou...}$$

Definimos $\mathrm{car}_H(M) = \min\{car(\sqrt[H]{M})\}$.

Lema (G.-Parrilo-Thomas 2011)

Seja M não negativa, $\mathrm{car}_{\mathrm{sdp}}(M) \leq \mathrm{car}_H(M)$.

Polítopos com Representações mínimas

Teorema (G.-Robinson-Thomas 2012)

Um polítopo de dimensão d tem uma representação semidefinida de ordem $d+1$ se e só se a sua matriz de folgas S verificar $\mathrm{car}_H(S) = d+1$.

Polítopos com Representações mínimas

Teorema (G.-Robinson-Thomas 2012)

Um polítopo de dimensão d tem uma representação semidefinida de ordem $d+1$ se e só se a sua matriz de folgas S verificar $\text{car}_H(S) = d+1$.

Em particular recuperamos como corolário um resultado mais antigo obtido de forma totalmente distinta.

Teorema (G.-Parrilo-Thomas 2009)

Seja P um polítopo de dimensão d cuja matriz de folgas S tem apenas 0's e 1's. Então P tem uma representação semidefinida de ordem $d+1$.

Plano

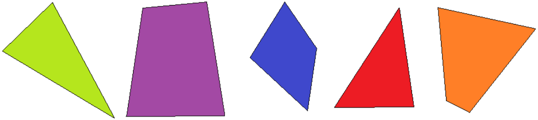
O que isto implica no plano?

Plano

O que isto implica no plano?

Proposição (G.-Robinson-Thomas 2012)

Um polígono convexo tem uma representação semidefinida de ordem 3 se e só se for um triângulo ou um quadrilátero.

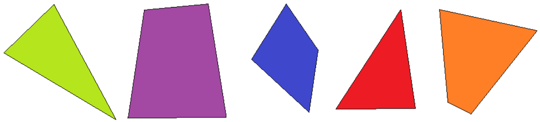


Plano

O que isto implica no plano?

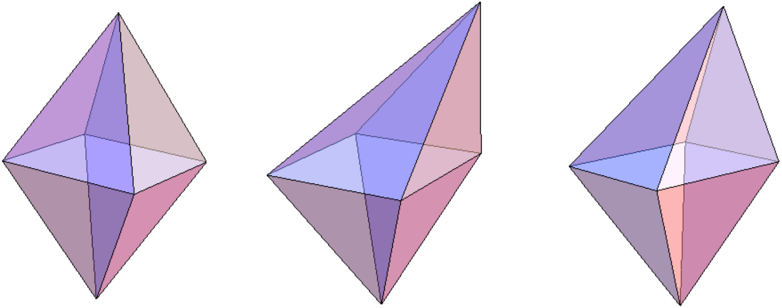
Proposição (G.-Robinson-Thomas 2012)

Um polígono convexo tem uma representação semidefinida de ordem 3 se e só se for um triângulo ou um quadrilátero.

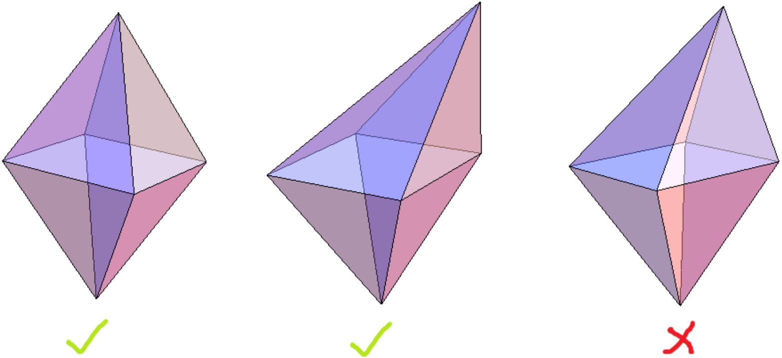


Nota: Transformações projectivas preservam a ordem das representações, logo uma direcção é simples.

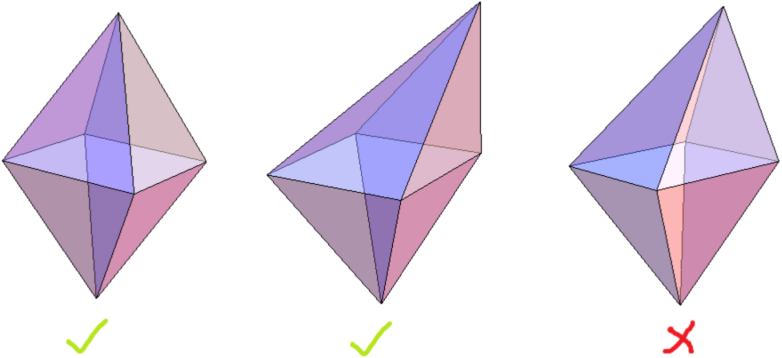
No espaço - Octaedros



No espaço - Octaedros

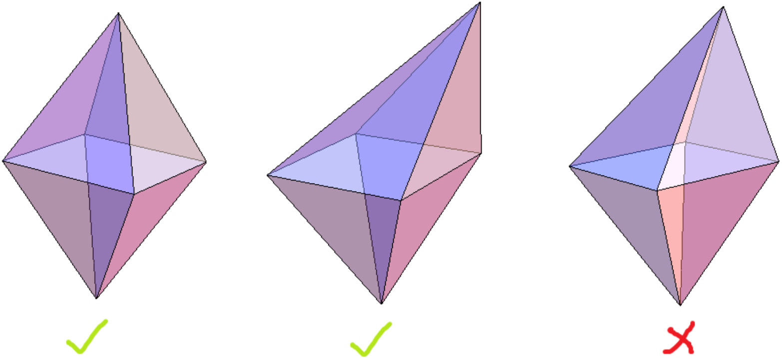


No espaço - Octaedros



Um octaedro regular tem uma representação de ordem 4 mas nem todas as suas perturbações.

No espaço - Octaedros



Um octaedro regular tem uma representação de ordem 4 mas nem todas as suas perturbações.
Falta uma caracterização mais geométrica/algébrica

O Fim

Muito Obrigado