Representação de polítopos: o teorema de Yannakakis

João Gouveia

CMUC - Universidade de Coimbra

15 de Julho de 2014 - *Encontro Nacional da SPM*

Secção 1

Definições e motivação

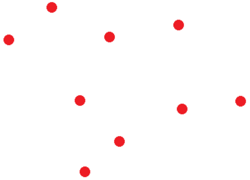
Polítopos

Um politopo é:

Polítopos

Um polítopo é:

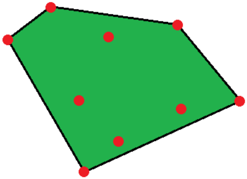
O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



Polítopos

Um polítopo é:

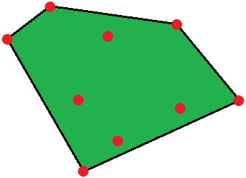
O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



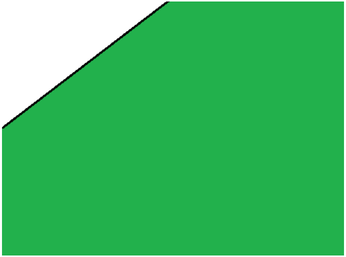
Polítopos

Um polítopo é:

O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



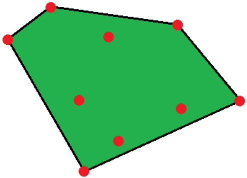
Uma intersecção (limitada) de semiespaços de $\mathbb{R}^n$.



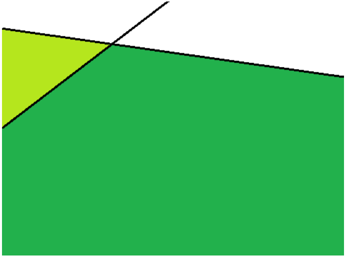
Polítopos

Um polítopo é:

O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



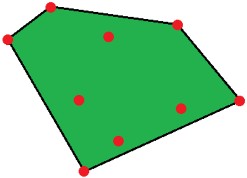
Uma intersecção (limitada) de semiespaços de $\mathbb{R}^n$.



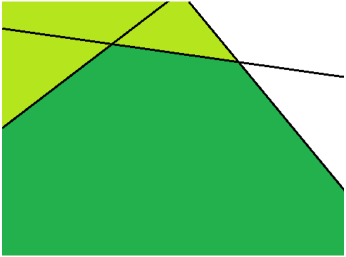
Polítopos

Um politopo é:

O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



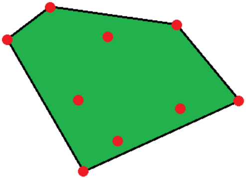
Uma intersecção (limitada) de semiespaços de $\mathbb{R}^n$.



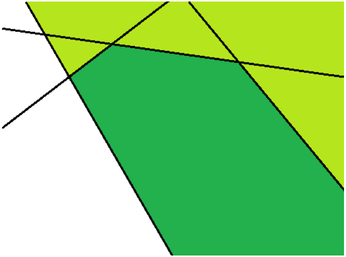
Polítopos

Um politopo é:

O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



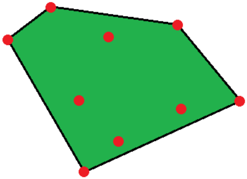
Uma intersecção (limitada) de semiespaços de $\mathbb{R}^n$.



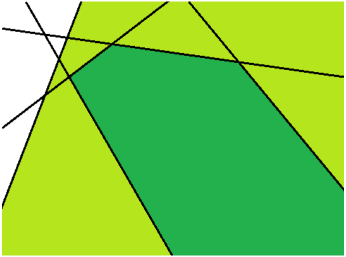
Polítopos

Um polítopo é:

O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



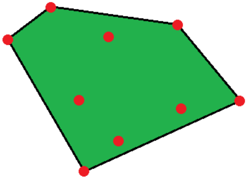
Uma intersecção (limitada) de semiespaços de $\mathbb{R}^n$.



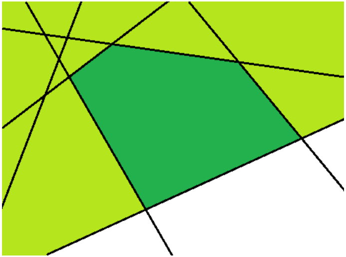
Polítopos

Um politopo é:

O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



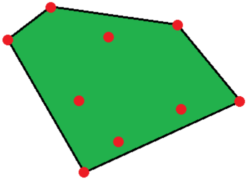
Uma intersecção (limitada) de semiespaços de $\mathbb{R}^n$.



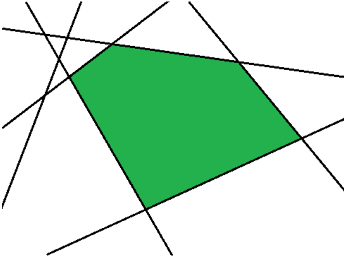
Polítopos

Um polítopo é:

O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



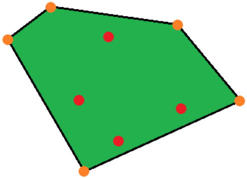
Uma intersecção (limitada) de semiespaços de $\mathbb{R}^n$.



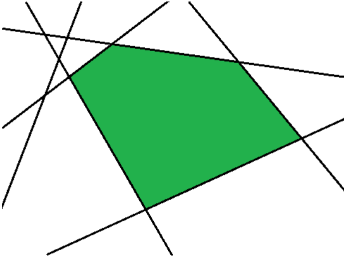
Polítopos

Um polítopo é:

O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



Uma intersecção (limitada) de semiespaços de $\mathbb{R}^n$.

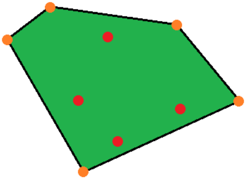


vértices do polítopo $\longleftrightarrow$ conjunto mínimo de pontos

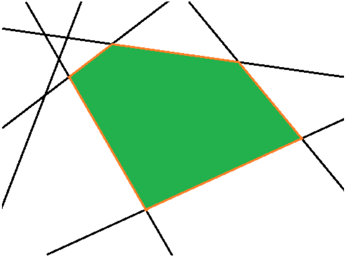
Polítopos

Um politopo é:

O invólucro convexo de um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}^n$.



Uma intersecção (limitada) de semiespaços de $\mathbb{R}^n$.



vértices do polítopo $\longleftrightarrow$ conjunto mínimo de pontos

facetas do polítopo $\longleftrightarrow$ conjunto mínimo de semiespaços

Programação linear e polítopos

Um programa linear é um problema de optimização do tipo:

$$\text{maximizar} \quad \langle c, x \rangle$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{array}{l} \langle a_1, x \rangle \leq b_1 \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \leq b_m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Programação linear e polítopos

Um programa linear é um problema de optimização do tipo:

$$\text{maximizar} \quad \langle c, x \rangle$$

$$\text{sujeito a} \quad \left.\begin{array}{l} \langle a_1, x \rangle \leq b_1 \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \leq b_m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ está num polítopo } P$$

Programação linear e polítopos

Um programa linear é um problema de optimização do tipo:

$$\text{maximizar} \quad \langle c, x \rangle$$

$$\text{sujeito a} \quad \left. \begin{array}{l} \langle a_1, x \rangle \leq b_1 \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \leq b_m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \Rightarrow x \text{ está num polítopo } P$$

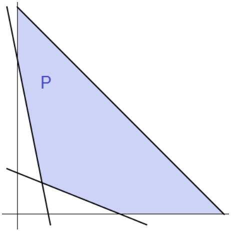
Queremos optimizar sobre um polítopo uma direcção dada

Um programa linear é um problema de optimização do tipo:

$$\text{maximizar} \quad \langle c, x \rangle$$

$$\text{sujeito a} \quad \left.\begin{array}{l} \langle a_1, x \rangle \leq b_1 \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \leq b_m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ está num polítopo } P$$

Queremos optimizar sobre um polítopo uma direcção dada



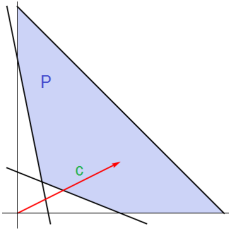
Programação linear e polítopos

Um programa linear é um problema de optimização do tipo:

$$\text{maximizar} \quad \langle c, x \rangle$$

$$\text{sujeito a} \quad \left.\begin{array}{l} \langle a_1, x \rangle \leq b_1 \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \leq b_m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ está num polítopo } P$$

Queremos optimizar sobre um polítopo uma direcção dada



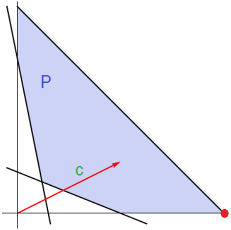
Programação linear e polítopos

Um programa linear é um problema de optimização do tipo:

$$\text{maximizar} \quad \langle c, x \rangle$$

$$\text{sujeito a} \quad \left.\begin{array}{l} \langle a_1, x \rangle \leq b_1 \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \leq b_m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ está num polítopo } P$$

Queremos optimizar sobre um polítopo uma direcção dada

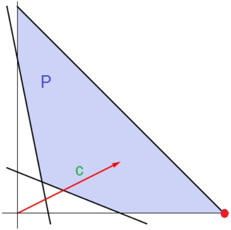


Um programa linear é um problema de optimização do tipo:

$$\text{maximizar} \quad \langle c, x \rangle$$

$$\text{sujeito a} \quad \left.\begin{array}{l} \langle a_1, x \rangle \leq b_1 \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \leq b_m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ está num polítopo } P$$

Queremos optimizar sobre um polítopo uma direcção dada



PL é fácil: polinomial no número de facetas/vértices

Optimização combinatória

Podemos transformar canonicamente muitos problemas de opimização combinatória em programas lineares.

Optimização combinatória

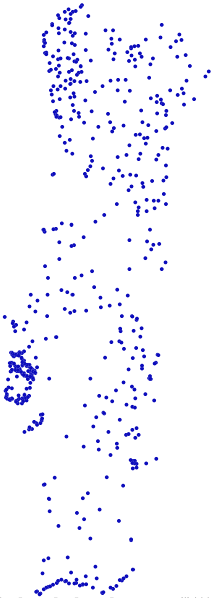
Podemos transformar canonicamente muitos problemas de opimização combinatória em programas lineares.

Problema do caixeiro viajante
Dadas algumas cidades, qual o caminho circular mais curto, passando por todas, sem repetição?

Optimização combinatória

Podemos transformar canonicamente muitos problemas de opimização combinatória em programas lineares.

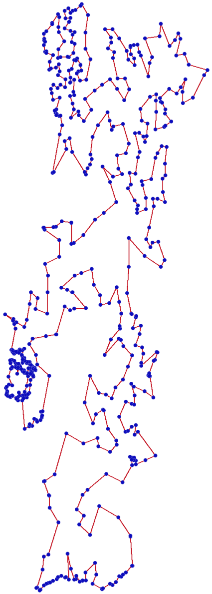
Problema do caixeiro viajante
Dadas algumas cidades, qual o caminho circular mais curto, passando por todas, sem repetição?



Optimização combinatória

Podemos transformar canonicamente muitos problemas de opimização combinatória em programas lineares.

Problema do caixeiro viajante
Dadas algumas cidades, qual o caminho circular mais curto, passando por todas, sem repetição?



Optimização combinatória

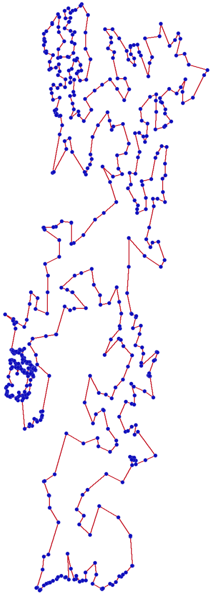
Podemos transformar canonicamente muitos problemas de opimização combinatória em programas lineares.

Problema do caixeiro viajante

Dadas algumas cidades, qual o caminho circular mais curto, passando por todas, sem repetição?

Polítopo do caixeiro viajante

Para cada circuito C de n cidades, seja $\chi_C \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ dado por $(\chi_C)_{\{i,j\}} = \delta_{\{i,j\} \in C}$.



Optimização combinatória

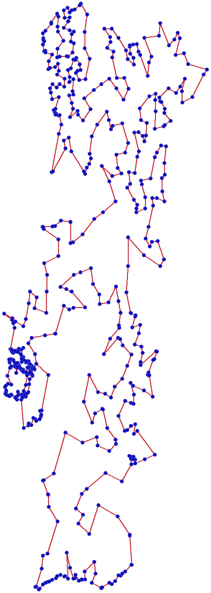
Podemos transformar canonicamente muitos problemas de opimização combinatória em programas lineares.

Problema do caixeiro viajante

Dadas algumas cidades, qual o caminho circular mais curto, passando por todas, sem repetição?

Polítopo do caixeiro viajante

Para cada circuito C de n cidades, seja $\chi_C \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ dado por $(\chi_C)_{\{i,j\}} = \delta_{\{i,j\}\in C}$. O seu invólucro convexo é o polítopo do caixeiro viajante, TSP(n).



Optimização combinatória

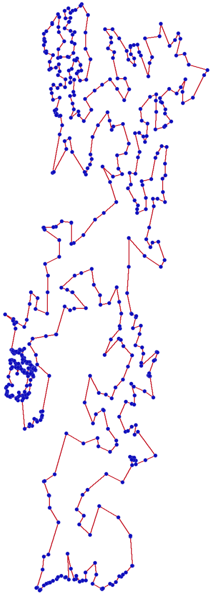
Podemos transformar canonicamente muitos problemas de opimização combinatória em programas lineares.

Problema do caixeiro viajante
Dadas algumas cidades, qual o caminho circular mais curto, passando por todas, sem repetição?

Polítopo do caixeiro viajante
Para cada circuito C de n cidades, seja $\chi_C \in \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ dado por $(\chi_C)_{\{i,j\}} = \delta_{\{i,j\} \in C}$. O seu invólucro convexo é o polítopo do caixeiro viajante, TSP(n).

Problema do caixeiro viajante reformulado Dadas distâncias $d_{\{i,j\}}$ da cidade i à j resolver

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \langle d, x \rangle \\ \text{sujeito a} & x \in \text{TSP}(n) \end{array}$$

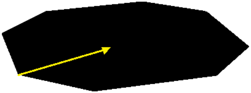


Projecções

Uma táctica para evitar demasiadas facetas é adicionar variáveis extra.

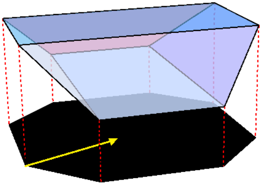
Projecções

Uma táctica para evitar demasiadas facetas é adicionar variáveis extra.



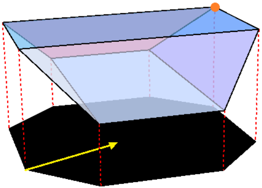
Projecções

Uma táctica para evitar demasiadas facetas é adicionar variáveis extra.



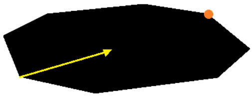
Projecções

Uma táctica para evitar demasiadas facetas é adicionar variáveis extra.



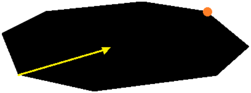
Projecções

Uma táctica para evitar demasiadas facetas é adicionar variáveis extra.



Projecções

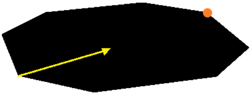
Uma táctica para evitar demasiadas facetas é adicionar variáveis extra.



Polítopos podem ser projecções de outros com muito menos facetas.

Projecções

Uma táctica para evitar demasiadas facetas é adicionar variáveis extra.



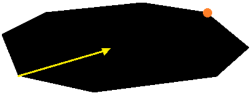
Polítopos podem ser projecções de outros com muito menos facetas.

Ben-Tal - Nemirovski

2^n-gonos regulares são projecções de polítopos com $2n$ facetas.

Projecções

Uma táctica para evitar demasiadas facetas é adicionar variáveis extra.



Polítopos podem ser projecções de outros com muito menos facetas.

Ben-Tal - Nemirovski

2^n-gonos regulares são projecções de polítopos com $2n$ facetas.

Polítopo de Paridade

P_n, o invólucro dos pontos $0/1$ com número par de 1's, tem 2^{n-1} facetas e vértices mas é a projecção de um polítopo com $O(n^2)$ facetas.

Questões

Várias perguntas se levantam:

Questão 1

Dado um polítopo P, qual o menor número possível de facetas de um polítopo que se projecta em P?

Questões

Várias perguntas se levantam:

Questão 1

Dado um polítopo P, qual o menor número possível de facetas de um polítopo que se projecta em P?

Esta é a complexidade de extensão de P e denota-se por $\mathrm{xc}(P)$.

Questões

Várias perguntas se levantam:

Questão 1

Dado um polítopo P, qual o menor número possível de facetas de um polítopo que se projecta em P?

Esta é a complexidade de extensão de P e denota-se por $\mathrm{xc}(P)$.

Questão 2

Será a complexidade de extensão de $\mathrm{TSP}(n)$ polinomial em n?

Questões

Várias perguntas se levantam:

Questão 1

Dado um polítopo P, qual o menor número possível de facetas de um polítopo que se projecta em P?

Esta é a complexidade de extensão de P e denota-se por $\mathrm{xc}(P)$.

Questão 2

Será a complexidade de extensão de $\mathrm{TSP}(n)$ polinomial em n?

Tentativas de provar $P = NP$ usavam extensões do TSP, e a motivação de Yannakakis era provar a sua inviabilidade.

Secção 2

Teorema de Yannakakis

Matriz de folgas

seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(x) \geq 0, \ldots, h_f(x) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

Matriz de folgas

seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(x) \geq 0, \ldots, h_f(x) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

A matriz de folgas de P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ dada por

$$S_P(i,j) = h_i(p_j).$$

Matriz de folgas

seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(x) \geq 0, \ldots, h_f(x) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

A matriz de folgas de P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ dada por

$$S_P(i,j) = h_i(p_j).$$

Example: Para o cubo unitário:

Matriz de folgas

seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(x) \geq 0, \ldots, h_f(x) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

A matriz de folgas de P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ dada por

$$S_P(i,j) = h_i(p_j).$$

Example: Para o cubo unitário:

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \\
\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - y \geq 0 \\ 1 - z \geq 0 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right]
\end{array}$$

Matriz de folgas

seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(x) \geq 0, \ldots, h_f(x) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

A matriz de folgas de P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ dada por

$$S_P(i,j) = h_i(p_j).$$

Example: Para o cubo unitário:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix} \end{array} \\
\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - y \geq 0 \\ 1 - z \geq 0 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}$$

Matriz de folgas

seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(x) \geq 0, \ldots, h_f(x) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

A matriz de folgas de P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ dada por

$$S_P(i,j) = h_i(p_j).$$

Example: Para o cubo unitário:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix} \end{array} \\
\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - y \geq 0 \\ 1 - z \geq 0 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}$$

Matriz de folgas

seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(x) \geq 0, \ldots, h_f(x) \geq 0$, e vértices $p_1, \ldots, p_v$.

A matriz de folgas de P é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ dada por

$$S_P(i,j) = h_i(p_j).$$

Example: Para o cubo unitário:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix} \end{matrix} \\
\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-y \geq 0 \\ 1-z \geq 0 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n não negativa.

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n não negativa.

Uma factorização não negativa de M de tamanho k é uma factorização

$$M = \underbrace{A}_{m \times k} \times \underbrace{B}_{k \times n},$$

com A e B não negativas.

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n não negativa.

Uma factorização não negativa de M de tamanho k é uma factorização

$$M = \underbrace{A}_{m \times k} \times \underbrace{B}_{k \times n},$$

com A e B não negativas.

Equivalentemente, é uma colecção de vectores $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}^k_+$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n não negativa.

Uma factorização não negativa de M de tamanho k é uma factorização

$$M = \underbrace{A}_{m \times k} \times \underbrace{B}_{k \times n},$$

com A e B não negativas.

Equivalentemente, é uma colecção de vectores $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}_+^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

O tamanho mínimo de um factorização não negativa de M é a característica não negativa de M, $\text{rank}_+(M)$.

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n não negativa.

Uma factorização não negativa de M de tamanho k é uma factorização

$$M = \underbrace{A}_{m \times k} \times \underbrace{B}_{k \times n},$$

com A e B não negativas.

Equivalentemente, é uma colecção de vectores $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}_+^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

O tamanho mínimo de um factorização não negativa de M é a característica não negativa de M, $\text{rank}_+(M)$.

Exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema de Yannakakis

Teorema (Yannakakis 1991)

seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas.

Teorema de Yannakakis

Teorema (Yannakakis 1991)

seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então

$$\mathrm{xc}(P) = \mathrm{rank}_+(S).$$

Teorema de Yannakakis

Teorema (Yannakakis 1991)

seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então

$$\mathrm{xc}(P) = \mathrm{rank}_+(S).$$

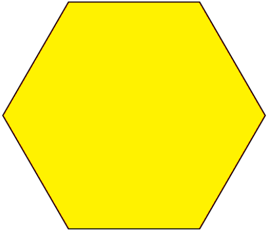
Tranformámos um problema geométrico muito difícil num problema algébrico muito difícil.

Hexágono

Consideremos o hexágono regular.

Hexágono

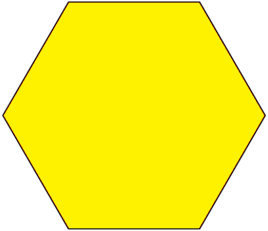
Consideremos o hexágono regular.



Hexágono

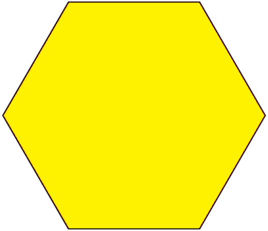
Consideremos o hexágono regular.

Tem matriz de folgas 6×6.



Hexágono

Consideremos o hexágono regular.

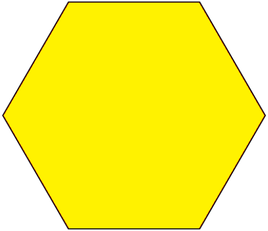


Tem matriz de folgas 6×6.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hexágono

Consideremos o hexágono regular.

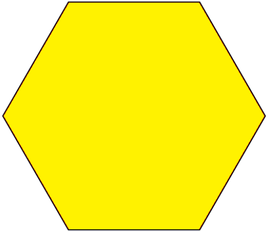


Tem matriz de folgas 6×6.

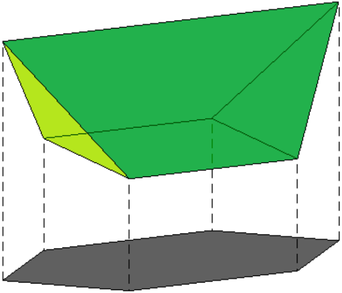
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hexágono

Consideremos o hexágono regular.



Tem matriz de folgas 6×6.



Secção 3

Resultados recentes em complexidade de extensões

Polítopo do caixeiro viajante

Yannakakis não provou exactamente o que queria, mas andou lá perto.

Polítopo do caixeiro viajante

Yannakakis não provou exactamente o que queria, mas andou lá perto.

Teorema (Yannakakis 1991)

Se uma extensão do TSP(n) *respeitar a simetria* deTSP(n), então tem um número de facetas exponencial em n.

Polítopo do caixeiro viajante

Yannakakis não provou exactamente o que queria, mas andou lá perto.

Teorema (Yannakakis 1991)

Se uma extensão do TSP(n) *respeitar a simetria* deTSP(n), então tem um número de facetas exponencial em n.

Recentemente a hipótese de simetria foi questionada.

Teorema (Kaibel-Pashkovich-Theis 2010)

A simetria importa nos tamanhos das extensões.

Polítopo do caixeiro viajante

Yannakakis não provou exactamente o que queria, mas andou lá perto.

Teorema (Yannakakis 1991)

Se uma extensão do TSP(n) *respeitar a simetria* deTSP(n), então tem um número de facetas exponencial em n.

Recentemente a hipótese de simetria foi questionada.

Teorema (Kaibel-Pashkovich-Theis 2010)

A simetria importa nos tamanhos das extensões.

Finalmente alcançou-se o pretendido.

Teorema (Fiorini-Massar-Pokutta-Tiwary-Wolf 2012)

xc(TSP(n)) cresce exponencialmente com n.

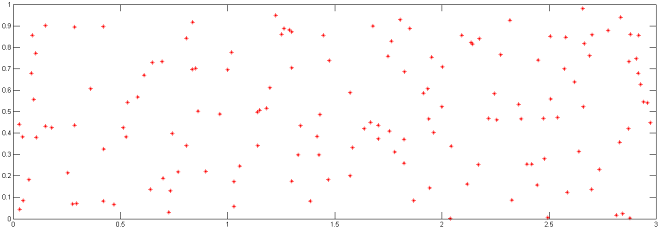
Problema do emparelhamento

Problema do emparelhamento

Dado um conjunto par de pontos, como os dividir em pares cuja soma das distâncias seja mínima?.

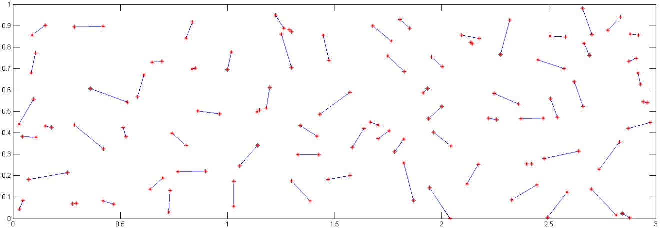
Problema do emparelhamento

Dado um conjunto par de pontos, como os dividir em pares cuja soma das distâncias seja mínima?.



Problema do emparelhamento

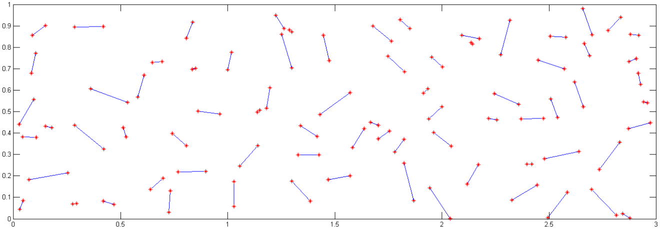
Dado um conjunto par de pontos, como os dividir em pares cuja soma das distâncias seja mínima?.



Problema do emparelhamento

Problema do emparelhamento

Dado um conjunto par de pontos, como os dividir em pares cuja soma das distâncias seja mínima?.



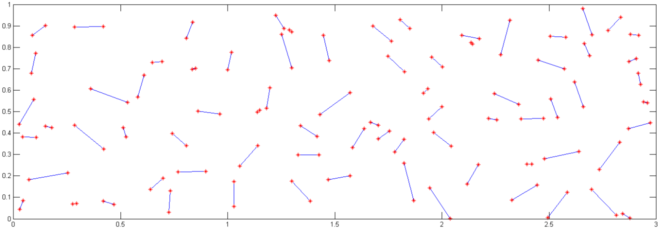
Polítopo de emparelhamento

Para cada emparelhamento M de $2n$ pontos, seja $\chi_M \in \mathbb{R}^{\binom{2n}{2}}$ dado por $(\chi_M)_{\{i,j\}} = \delta_{\{i,j\}\in C}$.

Problema do emparelhamento

Problema do emparelhamento

Dado um conjunto par de pontos, como os dividir em pares cuja soma das distâncias seja mínima?.



Polítopo de emparelhamento

Para cada emparelhamento M de $2n$ pontos, seja $\chi_M \in \mathbb{R}^{\binom{2n}{2}}$ dado por $(\chi_M)_{\{i,j\}} = \delta_{\{i,j\}\in C}$. O invólucro destes pontos é o polítopo de emparelhamento, MATCH(n).

Problema do emparelhamento (continuação)

Problema do emparelhamento reformulado

Dadas distâncias $d_{\{i,j\}}$ de i a j resolver

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \langle d, x \rangle \\ \text{sujeito a} & x \in \text{MATCH}(n) \end{array}$$

Problema do emparelhamento (continuação)

Problema do emparelhamento reformulado

Dadas distâncias $d_{\{i,j\}}$ de i a j resolver

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \langle d, x \rangle \\ \text{sujeito a} & x \in \text{MATCH}(n) \end{array}$$

Como o problema do emparelhamento é resolúvel em tempo polinomial, seriam de esperar pequenas extensões de MATCH(n).

Problema do emparelhamento (continuação)

Problema do emparelhamento reformulado

Dadas distâncias $d_{\{i,j\}}$ de i a j resolver

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \langle d, x\rangle \\ \text{sujeito a} & x \in \text{MATCH}(n) \end{array}$$

Como o problema do emparelhamento é resolúvel em tempo polinomial, seriam de esperar pequenas extensões de MATCH(n).

Teorema (Yannakakis 1991)

Se uma extensão de MATCH(n) *respeitar a simetria* de MATCH(n), então tem um número exponencial de facetas em n.

Problema do emparelhamento (continuação)

Problema do emparelhamento reformulado

Dadas distâncias $d_{\{i,j\}}$ de i a j resolver

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \langle d, x\rangle \\ \text{sujeito a} & x \in \mathrm{MATCH}(n) \end{array}$$

Como o problema do emparelhamento é resolúvel em tempo polinomial, seriam de esperar pequenas extensões de $\mathrm{MATCH}(n)$.

Teorema (Yannakakis 1991)

Se uma extensão de $\mathrm{MATCH}(n)$ *respeitar a simetria* de $\mathrm{MATCH}(n)$, então tem um número exponencial de facetas em n.

Simetria é uma hipótese especialmente forte neste caso. Ainda assim:

Problema do emparelhamento (continuação)

Problema do emparelhamento reformulado

Dadas distâncias $d_{\{i,j\}}$ de i a j resolver

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \langle d, x\rangle \\ \text{sujeito a} & x \in \mathrm{MATCH}(n) \end{array}$$

Como o problema do emparelhamento é resolúvel em tempo polinomial, seriam de esperar pequenas extensões de MATCH(n).

Teorema (Yannakakis 1991)

Se uma extensão de MATCH(n) *respeitar a simetria* de MATCH(n), então tem um número exponencial de facetas em n.

Simetria é uma hipótese especialmente forte neste caso. Ainda assim:

Teorema (Rothvoss *2013+*)

xc(MATCH(n)) cresce exponencialmente com n.

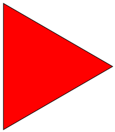
Assim o programa linear canónico não captura a complexidade.

Polígonos

O que sabemos sobre extensões de polígonos?

Polígonos

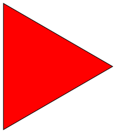
O que sabemos sobre extensões de polígonos?



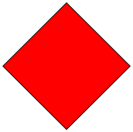
$\mathrm{xc}(P_3) = 3$

Polígonos

O que sabemos sobre extensões de polígonos?



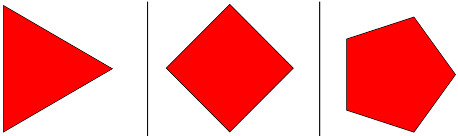
$\mathrm{xc}(P_3) = 3$



$\mathrm{xc}(P_4) = 4$

Polígonos

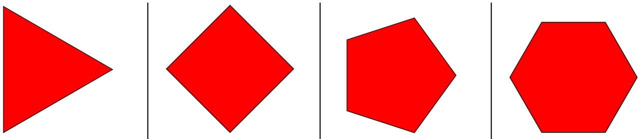
O que sabemos sobre extensões de polígonos?



$\mathrm{xc}(P_3) = 3$ | $\mathrm{xc}(P_4) = 4$ | $\mathrm{xc}(P_5) = 5$

Polígonos

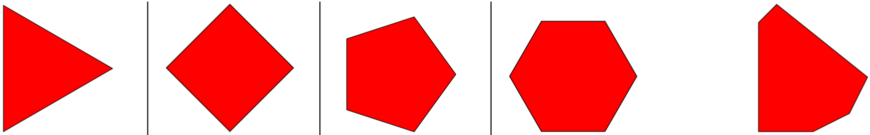
O que sabemos sobre extensões de polígonos?



$\mathrm{xc}(P_3) = 3$ | $\mathrm{xc}(P_4) = 4$ | $\mathrm{xc}(P_5) = 5$ | $\mathrm{xc}(P_6) = 5$

Polígonos

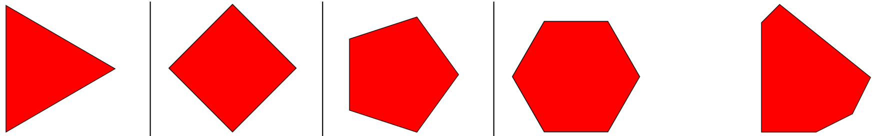
O que sabemos sobre extensões de polígonos?



$\mathrm{xc}(P_3) = 3$ | $\mathrm{xc}(P_4) = 4$ | $\mathrm{xc}(P_5) = 5$ | $\mathrm{xc}(P_6) = 5$ ou $\mathrm{xc}(P_6) = 6$

Polígonos

O que sabemos sobre extensões de polígonos?



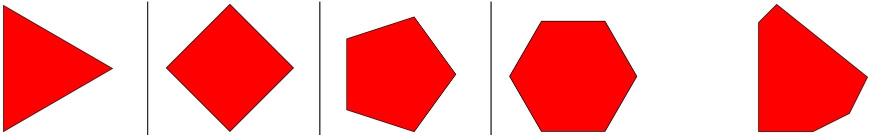
$\mathrm{xc}(P_3) = 3$ | $\mathrm{xc}(P_4) = 4$ | $\mathrm{xc}(P_5) = 5$ | $\mathrm{xc}(P_6) = 5$ ou $\mathrm{xc}(P_6) = 6$

Teorema (Shitov 2013)

Todos os heptágonos têm complexidade de extensão exactamente 6.

Polígonos

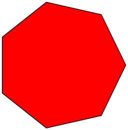
O que sabemos sobre extensões de polígonos?



$\mathrm{xc}(P_3) = 3$ | $\mathrm{xc}(P_4) = 4$ | $\mathrm{xc}(P_5) = 5$ | $\mathrm{xc}(P_6) = 5$ ou $\mathrm{xc}(P_6) = 6$

Teorema (Shitov 2013)

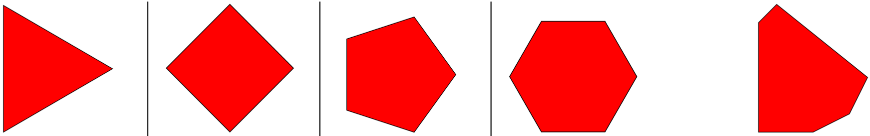
Todos os heptágonos têm complexidade de extensão exactamente 6.



$\mathrm{xc}(P_7) = 6$

Polígonos

O que sabemos sobre extensões de polígonos?



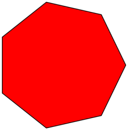
$\mathrm{xc}(P_3) = 3$ | $\mathrm{xc}(P_4) = 4$ | $\mathrm{xc}(P_5) = 5$ | $\mathrm{xc}(P_6) = 5$ ou $\mathrm{xc}(P_6) = 6$

Teorema (Shitov 2013)

Todos os heptágonos têm complexidade de extensão exactamente 6.

Corolário

Todos os *n*-gonos têm complexidade de extensão menor ou igual a $\lceil 6n/7 \rceil$.



$\mathrm{xc}(P_7) = 6$

Polígonos (continuação)

Lema

A complexidade de extensão de um n-gono é pelo menos $\log_2(n)$.

Polígonos (continuação)

Lema

A complexidade de extensão de um n-gono é pelo menos $\log_2(n)$. (De facto pelo menos por volta de $1.440 \cdots \log_2(n)$)

Polígonos (continuação)

Lema

A complexidade de extensão de um n-gono é pelo menos $\log_2(n)$. (De facto pelo menos por volta de $1.440 \cdots \log_2(n)$)

Teorema (Ben-Tal - Nemirovski 2001)

A complexidade de extensão de um n-gono regular é no máximo $2\lceil \log_2(n) \rceil$.

Polígonos (continuação)

Lema

A complexidade de extensão de um n-gono é pelo menos $\log_2(n)$. (De facto pelo menos por volta de $1.440 \cdots \log_2(n)$)

Teorema (Ben-Tal - Nemirovski 2001)

A complexidade de extensão de um n-gono regular é no máximo $2\lceil \log_2(n) \rceil$.

Teorema (Fiorini - Rothvoss - Tiwary 2011)

A complexidade de extensão de um n-gono genérico é pelo menos $\sqrt{2n}$.

Secção 4

Complexidade de extensão semidefinida

Programação semidefinida

Uma matriz simétrica A é semidefinida positiva ($A \succeq 0$) se e só se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ x^t A x \geq 0$$

Programação semidefinida

Uma matriz simétrica A é semidefinida positiva ($A \succeq 0$) se e só se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^t A x \geq 0 \quad \text{sse} \quad \text{eig}(A) \subseteq \mathbb{R}_+$$

Programação semidefinida

Uma matriz simétrica A é semidefinida positiva ($A \succeq 0$) se e só se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^t A x \geq 0 \quad \text{sse} \quad \text{eig}(A) \subseteq \mathbb{R}_+ \quad \text{sse} \quad \exists B,\ A = BB^t$$

Programação semidefinida

Uma matriz simétrica A é semidefinida positiva ($A \succeq 0$) se e só se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^t A x \geq 0 \quad \text{sse} \quad \text{eig}(A) \subseteq \mathbb{R}_+ \quad \text{sse} \quad \exists B,\ A = BB^t$$

---

um programa semidefinido (PSD) é um problema do tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \langle c, x\rangle \\ & \sum_{i=1}^m A_i x_i \succeq 0 \\ \text{sujeito a} & \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

onde A_i são matrizes $k \times k$ simétricas.

Programação semidefinida

Uma matriz simétrica A é semidefinida positiva ($A \succeq 0$) se e só se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^t A x \geq 0 \quad \text{sse} \quad \text{eig}(A) \subseteq \mathbb{R}_+ \quad \text{sse} \quad \exists B,\ A = BB^t$$

---

um programa semidefinido (PSD) é um problema do tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \langle c, x \rangle \\ \text{sujeito a} & \left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^m A_i x_i \succeq 0 \\ \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ está num espectraedro } S \end{array}$$

onde A_i são matrizes $k \times k$ simétricas.

Programação semidefinida

Uma matriz simétrica A é semidefinida positiva ($A \succeq 0$) se e só se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^t A x \geq 0 \quad \text{sse} \quad \text{eig}(A) \subseteq \mathbb{R}_+ \quad \text{sse} \quad \exists B,\ A = BB^t$$

---

um programa semidefinido (PSD) é um problema do tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \langle c, x \rangle \\ \text{sujeito a} & \left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^m A_i x_i \succeq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow x \text{ está num espectraedro } S \end{array}$$

onde A_i são matrizes $k \times k$ simétricas.

Nota

- Se restringirms A_i a diagonais, recuperamos PI.

Programação semidefinida

Uma matriz simétrica A é semidefinida positiva ($A \succeq 0$) se e só se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^t A x \geq 0 \quad \text{sse} \quad \text{eig}(A) \subseteq \mathbb{R}_+ \quad \text{sse} \quad \exists B,\ A = BB^t$$

---

um programa semidefinido (PSD) é um problema do tipo:

$$\text{maximizar} \quad \langle c, x \rangle$$

$$\text{sujeito a} \quad \left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m A_i x_i \succeq 0 \\ \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \Rightarrow x \text{ está num espectraedro } S$$

onde A_i são matrizes $k \times k$ simétricas.

Nota

- Se restringirms A_i a diagonais, recuperamos PI.
- PSD é eficientemente resolúvel.

Complexidade de extensão semidefinida

Uma representação semidefinida de tamanho k de um polítopo P é uma descrição

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists y \text{ s.t. } A_0 + \sum A_i x_i + \sum B_i y_i \succeq 0 \right\}$$

onde A_i e B_i são matrizes reais simétricas $k \times k$.

Complexidade de extensão semidefinida

Uma representação semidefinida de tamanho k de um polítopo P é uma descrição

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists y \text{ s.t. } A_0 + \sum A_i x_i + \sum B_i y_i \succeq 0 \right\}$$

onde A_i e B_i são matrizes reais simétricas $k \times k$.

O quadrado $0/1$ é a projecção em x_1 e x_2 de

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1 & y \\ x_2 & y & x_2 \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Complexidade de extensão semidefinida

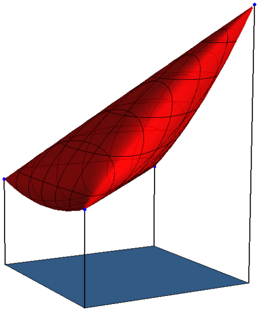
Uma representação semidefinida de tamanho k de um polítopo P é uma descrição

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists y \text{ s.t. } A_0 + \sum A_i x_i + \sum B_i y_i \succeq 0 \right\}$$

onde A_i e B_i são matrizes reais simétricas $k \times k$.

O quadrado $0/1$ é a projecção em x_1 e x_2 de

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1 & y \\ x_2 & y & x_2 \end{bmatrix} \succeq 0.$$



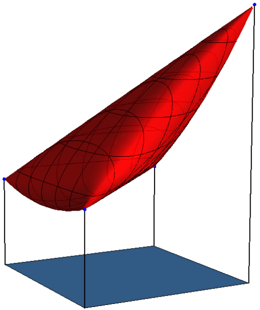
Uma representação semidefinida de tamanho k de um polítopo P é uma descrição

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists y \text{ s.t. } A_0 + \sum A_i x_i + \sum B_i y_i \succeq 0 \right\}$$

onde A_i e B_i são matrizes reais simétricas $k \times k$.

O quadrado $0/1$ é a projecção em x_1 e x_2 de

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1 & y \\ x_2 & y & x_2 \end{bmatrix} \succeq 0.$$



O mais pequeno k para o qual uma representação existe é a complexidade de extensão semidefinida de P, $\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}(P)$.

Factorizações semidefinidas

Seja M uma matriz não negativa m por n.

Factorizações semidefinidas

Seja M uma matriz não negativa m por n. Uma PSD_k-factorização de M é um conjunto de matrizes $k \times k$ semidefinidas positivas, $A_1, \cdots, A_m$ and $B_1, \cdots B_n$ tais que $M_{i,j} = \langle A_i, B_j \rangle$.

Factorizações semidefinidas

Seja M uma matriz não negativa m por n. Uma PSD_k-factorização de M é um conjunto de matrizes $k \times k$ semidefinidas positivas, $A_1, \cdots, A_m$ and $B_1, \cdots B_n$ tais que $M_{i,j} = \langle A_i, B_j \rangle$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorizações semidefinidas

Seja M uma matriz não negativa m por n. Uma PSD_k-factorização de M é um conjunto de matrizes $k \times k$ semidefinidas positivas, $A_1, \cdots, A_m$ and $B_1, \cdots B_n$ tais que $M_{i,j} = \langle A_i, B_j \rangle$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Seja M uma matriz não negativa m por n. Uma PSD_k-factorização de M é um conjunto de matrizes $k \times k$ semidefinidas positivas, $A_1, \cdots, A_m$ and $B_1, \cdots B_n$ tais que $M_{i,j} = \langle A_i, B_j \rangle$.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \\
\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

O mais pequeno k para o qual uma factorização existe é a característica semidefinida de M, $\mathrm{rank}_{\mathrm{psd}}(M)$.

Teorema de Yannakakis generalizado

Teorema (G-Parrilo-Thomas 2013)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas.

Teorema de Yannakakis generalizado

Teorema (G-Parrilo-Thomas 2013)

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então

$$\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}(P) = \mathrm{rank}_{\mathrm{psd}}(S).$$

Teorema de Yannakakis generalizado

Teorema (G-Parrilo-Thomas 2013)

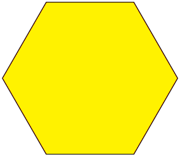
Seja P um polítopo e S a sua matriz de folgas. Então

$$\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}(P) = \mathrm{rank}_{\mathrm{psd}}(S).$$

De facto este teorema aplica-se a mais que polítopos e representações semidefinidas.

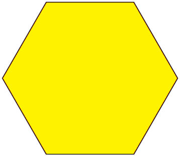
O hexágono

Consideremos de novo o hexágono regular.



O hexágono

Consideremos de novo o hexágono regular.

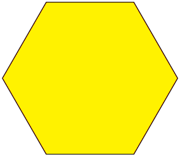


A sua matriz de folgas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

O hexágono

Consideremos de novo o hexágono regular.



A sua matriz de folgas.

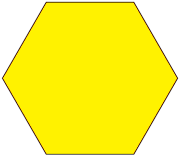
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

O hexágono

Consideremos de novo o hexágono regular.



A sua matriz de folgas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

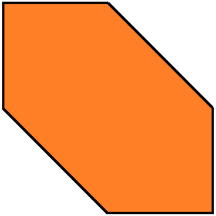
O hexágono - continuação

O hexágono regular tem de ter uma representação de tamanho 4.

O hexágono - continuação

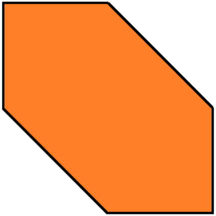
O hexágono regular tem de ter uma representação de tamanho 4.

Considere-se o hexágono equivalente H com vértices $(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1, -1)$ e $(-1, 1)$.



O hexágono - continuação

O hexágono regular tem de ter uma representação de tamanho 4.

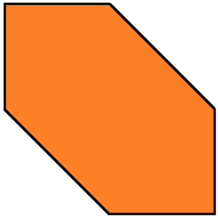


Considere-se o hexágono equivalente H com vértices $(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1, -1)$ e $(-1, 1)$.

$$H = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1 + x_2 \\ x_1 & 1 & y_1 & y_2 \\ x_2 & y_1 & 1 & y_3 \\ x_1 + x_2 & y_2 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \right\}$$

O hexágono - continuação

O hexágono regular tem de ter uma representação de tamanho 4.



Considere-se o hexágono equivalente H com vértices $(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1, -1)$ e $(-1, 1)$.

$$H = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1 + x_2 \\ x_1 & 1 & y_1 & y_2 \\ x_2 & y_1 & 1 & y_3 \\ x_1 + x_2 & y_2 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \right\}$$

De facto:

Teorema (G-Robinson-Thomas *2013+*)

Todos os hexágonos têm complexidade de extensão semidefinida 4.

Principais questões em aberto

Pergunta 1

Será que $\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}(\mathrm{TSP}(n))$ crece exponencialmente com n?

Principais questões em aberto

Pergunta 1

Será que $\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}(\mathrm{TSP}(n))$ crece exponencialmente com n?

Pergunta 2

Será que $\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}(\mathrm{MATCH}(n))$crece exponencialmente com n?

Principais questões em aberto

Pergunta 1

Será que $\text{xc}_{\text{psd}}(\text{TSP}(n))$ crece exponencialmente com n?

Pergunta 2

Será que $\text{xc}_{\text{psd}}(\text{MATCH}(n))$crece exponencialmente com n?

Pergunta 3

Alguma vez acontece $\text{xc}(P) >> \text{xc}_{\text{psd}}(P)$?

Principais questões em aberto

Pergunta 1

Será que $xc_{psd}(TSP(n))$ crece exponencialmente com n?

Pergunta 2

Será que $xc_{psd}(MATCH(n))$crece exponencialmente com n?

Pergunta 3

Alguma vez acontece $xc(P) >> xc_{psd}(P)$?

Um candidato concrecto na última pergunta é STAB(G) de um grafo perfeito, onde STAB(G) é a formulação PL do problema do conjunto estável máximo.

Direcções de investigação

Trabalho desenvolvido

Direcções de investigação

Trabalho desenvolvido

- Polítopos com dimensão d têm xc_{psd} pelo menos $d+1$. Para quais é mesmo $d+1$? (G-Robinson-Thomas 2013)

Direcções de investigação

Trabalho desenvolvido

- Polítopos com dimensão d têm $\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}$ pelo menos $d+1$. Para quais é mesmo $d+1$? (G-Robinson-Thomas 2013)
- O que podemos dizer se tivermos apenas uma factorização aproximada? (G-Parrilo-Thomas *2013+*)

Direcções de investigação

Trabalho desenvolvido

- Polítopos com dimensão d têm $\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}$ pelo menos $d+1$. Para quais é mesmo $d+1$? (G-Robinson-Thomas 2013)
- O que podemos dizer se tivermos apenas uma factorização aproximada? (G-Parrilo-Thomas *2013+*)
- Qual a complexidade de extensão demidefinida de um polítopo genérico? (G-Robinson-Thomas *2013+*)

Direcções de investigação

Trabalho desenvolvido

- Polítopos com dimensão d têm $\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}$ pelo menos $d+1$. Para quais é mesmo $d+1$? (G-Robinson-Thomas 2013)
- O que podemos dizer se tivermos apenas uma factorização aproximada? (G-Parrilo-Thomas *2013+*)
- Qual a complexidade de extensão demidefinida de um polítopo genérico? (G-Robinson-Thomas *2013+*)
- Se nos restringirmos a factores racionais a característica aumenta? (Fawzi-G-Robinson *2014+*)

Direcções de investigação

Trabalho desenvolvido

- Polítopos com dimensão d têm xc_{psd} pelo menos $d+1$. Para quais é mesmo $d+1$? (G-Robinson-Thomas 2013)
- O que podemos dizer se tivermos apenas uma factorização aproximada? (G-Parrilo-Thomas *2013+*)
- Qual a complexidade de extensão demidefinida de um polítopo genérico? (G-Robinson-Thomas *2013+*)
- Se nos restringirmos a factores racionais a característica aumenta? (Fawzi-G-Robinson *2014+*)

Trabalho que gostaria muito de realizar

Direcções de investigação

Trabalho desenvolvido

- Polítopos com dimensão d têm xc_{psd} pelo menos $d+1$. Para quais é mesmo $d+1$? (G-Robinson-Thomas 2013)
- O que podemos dizer se tivermos apenas uma factorização aproximada? (G-Parrilo-Thomas *2013+*)
- Qual a complexidade de extensão demidefinida de um polítopo genérico? (G-Robinson-Thomas *2013+*)
- Se nos restringirmos a factores racionais a característica aumenta? (Fawzi-G-Robinson *2014+*)

Trabalho que gostaria muito de realizar

- Minimizantes e maximixante úteis para rank_{psd}.

Direcções de investigação

Trabalho desenvolvido

- Polítopos com dimensão d têm $\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}$ pelo menos $d+1$. Para quais é mesmo $d+1$? (G-Robinson-Thomas 2013)
- O que podemos dizer se tivermos apenas uma factorização aproximada? (G-Parrilo-Thomas *2013+*)
- Qual a complexidade de extensão demidefinida de um polítopo genérico? (G-Robinson-Thomas *2013+*)
- Se nos restringirmos a factores racionais a característica aumenta? (Fawzi-G-Robinson *2014+*)

Trabalho que gostaria muito de realizar

- Minimizantes e maximixante úteis para $\mathrm{rank}_{\mathrm{psd}}$.
- Explorar as conexões com a estatística e computação quântica.

Direcções de investigação

Trabalho desenvolvido

- Polítopos com dimensão d têm $\mathrm{xc}_{\mathrm{psd}}$ pelo menos $d+1$. Para quais é mesmo $d+1$? (G-Robinson-Thomas 2013)
- O que podemos dizer se tivermos apenas uma factorização aproximada? (G-Parrilo-Thomas *2013+*)
- Qual a complexidade de extensão demidefinida de um polítopo genérico? (G-Robinson-Thomas *2013+*)
- Se nos restringirmos a factores racionais a característica aumenta? (Fawzi-G-Robinson *2014+*)

Trabalho que gostaria muito de realizar

- Minimizantes e maximixante úteis para $\mathrm{rank}_{\mathrm{psd}}$.
- Explorar as conexões com a estatística e computação quântica.
- Perceber o papel da simetria.

Conclusão

Para saber mais:

Fawzi, G, Parrilo, Robinson, and Thomas.
Positive semidefinite rank.
Já disponível?????

G, P.A. Parrilo, and R.R. Thomas.
Lifts of convex sets and cone factorizations.
Mathematics of Operations Research, 38(2):248–264, 2013.

G, R.Z. Robinson, and R.R. Thomas.
Polytopes of minimum positive semidefinite rank.
Discrete & Computational Geometry, 50(3):679–699, 2013.

G, P.A. Parrilo, and R.R. Thomas.
Approximate cone factorizations and lifts of polytopes.
arXiv preprint arXiv:1308.2162 , 2013.

G, R. Z. Robinson, and R. R. Thomas.
Worst-case results for positive semidefinite rank.
arXiv preprint arXiv:1305.4600, 2013.

H. Fawzi, G, and R. Z. Robinson.
Rational and real positive semidefinite rank can be different.
arXiv preprint arXiv:1404.4864, 2014.

Conclusão

Para saber mais:

Fawzi, G, Parrilo, Robinson, and Thomas.
Positive semidefinite rank.
Já disponível?????

G, P.A. Parrilo, and R.R. Thomas.
Lifts of convex sets and cone factorizations.
Mathematics of Operations Research, 38(2):248–264, 2013.

G, R.Z. Robinson, and R.R. Thomas.
Polytopes of minimum positive semidefinite rank.
Discrete & Computational Geometry, 50(3):679–699, 2013.

G, P.A. Parrilo, and R.R. Thomas.
Approximate cone factorizations and lifts of polytopes.
arXiv preprint arXiv:1308.2162 , 2013.

G, R. Z. Robinson, and R. R. Thomas.
Worst-case results for positive semidefinite rank.
arXiv preprint arXiv:1305.4600, 2013.

H. Fawzi, G, and R. Z. Robinson.
Rational and real positive semidefinite rank can be different.
arXiv preprint arXiv:1404.4864, 2014.

Obrigado