

Digressão por 'caminhos, árvores e flores'*

João Soares
Departamento de Matemática,
Universidade de Coimbra,
E-mail: jsoares@mat.uc.pt

15 de Outubro de 2003

Resumo

Incluimos a demonstração de um resultado de Cunningham e Marsh sobre o poliedro dos emparelhamentos e descrevemos o método Húngaro para o problema da afectação, em particular, demonstrando que pode funcionar em $\mathcal{O}(n^3)$ operações aritméticas e comparações. O título faz alusão ao artigo de Jack Edmonds [17] onde é descrito o primeiro algoritmo polinomial para o problema do emparelhamento de cardinalidade máxima, que é recordado na palestra.

O poliedro dos emparelhamentos

Dado um grafo não dirigido $G = (V, E)$, com m arestas e n vértices, seja $P \subseteq \mathbb{R}^m$ o poliedro definido pelo seguinte sistema de desigualdades

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e \leq 1 \quad (i \in V) \quad (1a)$$

$$x_e \geq 0 \quad (e \in E). \quad (1b)$$

O conjunto dos vectores incidência de emparelhamentos de G é precisamente o conjunto $P \cap \mathbb{Z}^m$. O invólucro convexo dos vectores incidência de emparelhamentos de G é, normalmente, denominado *poliedro dos emparelhamentos* e denotado $P_{\text{mat}}(G)$.

Quando G é bipartido, as desigualdades (1) definem um polítopo cujos pontos extremos são inteiros e então $P_{\text{mat}}(G) = P$. No entanto, quando G não é bipartido existem pontos extremos de P que não são inteiros. Para caracterizar $P_{\text{mat}}(G)$ será necessário acrescentar restrições à definição de P cujo propósito é o de *cortar* os pontos extremos que não são inteiros *sem criar* pontos extremos adicionais. Veremos que esse propósito é conseguido com as seguintes desigualdades que se mostra serem válidas para $P_{\text{mat}}(G)$:

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \frac{|S| - 1}{2} \quad (S \in \mathcal{S} \equiv \{S \subseteq V : |S| \text{ é ímpar}, |S| \geq 3\}). \quad (2)$$

O Teorema 1 abaixo mostra que o polítopo definido pelo sistema de desigualdades (1)-(2) é inteiro e, por isso, define $P_{\text{mat}}(G)$.

Teorema 1 (de Cunningham e Marsh, 1978) ([42]) *Qualquer que seja o grafo não dirigido $G = (V, E)$, o sistema de desigualdades (1)-(2) é TDI.*

*Extracto de palestra apresentada na Quinta das Lágrimas em homenagem ao Professor Doutor Mário Silva Rosa por altura da sua aposentação do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Este texto está disponível *online* em <http://www.mat.uc.pt/~jsoares/research/notes.htm>. Parte deste documento foi escrito em colaboração com Ana Maria Ramires Príncipe dos Santos da Universidade Portucalense.

Prova: (Acompanhámos a demonstração descrita em [32, Teorema 11.15, p. 256]) Precisamos provar que para todo o vector $c \in \mathbb{Z}^m$ que faça com que o problema linear seguinte possua valor óptimo finito

$$\left. \begin{array}{l} \min \sum_{i \in V} y_i + \sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{|S| - 1}{2} z_S \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i \in V: e \in \delta(i)} y_i + \sum_{S \in \mathcal{S}: e \in E(S)} z_S \geq c_e \quad (e \in E) \\ y_i \geq 0 \quad (i \in V) \\ z_S \geq 0 \quad (S \in \mathcal{S}) \end{array} \right\} \quad (3)$$

existe pelo menos uma solução óptima inteira. Note-se que (3) é o dual de $\max\{cx: (1)-(2)\}$, cuja região admissível denotamos por \bar{P} .

Admitamos a existência de um contra-exemplo para a afirmação que se pretende provar. Isto é, admitimos a existência de um grafo $G = (V, E)$ e um vector $c \in \mathbb{Z}^m$ tal que (3) possui valor óptimo finito mas para o qual não existe qualquer solução óptima que seja inteira. Escolha-se o par (G, c) que torna mínimo o valor de

$$|V| + |E| + \sum_{e \in E} |c_e|. \quad (4)$$

Uma primeira consequência da definição de (G, c) é a de que $c_e \geq 1$, para todo $e \in E$. De facto, se existisse uma aresta $\bar{e} \in E$ tal que $c_{\bar{e}} \leq 0$ então a respectiva restrição em (3) seria redundante com ou sem restrição de integralidade nas variáveis. Por esse facto, seria possível definir um contra-exemplo com menos uma aresta e com valor da quantidade (4) ainda menor, o que é absurdo.

Uma outra consequência da definição de (G, c) é a de que: $\bar{y} = 0$ em toda a solução óptima (\bar{y}, \bar{z}) de (3). De facto, se existisse uma solução óptima (\bar{y}, \bar{z}) tal que $\bar{y}_k > 0$, para algum $k \in V$, então, pelo teorema da complementaridade de folgas da Programação Linear, a restrição ' $\sum_{e \in \delta(k)} x_e \leq 1$ ' verificar-se-ia como igualdade em toda a solução óptima do dual de (3). Então, considere-se um novo vector c' que coincide com c excepto nas componentes $c'_e = c_e - 1$, para todo $e \in \delta(k)$. Atendendo a que

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad c'x \\ \text{s.a.} \quad x \in \bar{P} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \max \quad cx - \sum_{e \in \delta(k)} x_e \\ \text{s.a.} \quad x \in \bar{P} \end{array} \right. = -1 + \left\{ \begin{array}{l} \max \quad cx \\ \text{s.a.} \quad x \in \bar{P} \end{array} \right.$$

então o valor óptimo de (3) com c substituído por c' seria menor em exactamente uma unidade. Como (G, c') não é contra-exemplo, então existe uma solução óptima inteira (\tilde{y}, \tilde{z}) . Através de um simples ajustamento em uma unidade na componente \tilde{y}_k obtemos uma solução admissível em (3) que vale apenas mais uma unidade na função objectivo e, como tal, é solução óptima. Então, teríamos encontrado uma solução óptima inteira, o que é absurdo.

Depois de termos demonstrado estas duas propriedades do contra-exemplo (G, c) assim definido, escolha-se $(0, \bar{z})$, de entre todas as soluções óptimas para (3), aquela que torna máximo o valor de

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} |S|^2 \bar{z}_S. \quad (5)$$

Notamos que $(0, \bar{z})$ está bem definido porque, atendendo a que $|S| > 1$ para todo $S \in \mathcal{S}$, (5) é limitado no conjunto de todas as soluções óptimas.

Seguidamente, provamos que o conjunto $\mathcal{F} = \{S \in \mathcal{S}: \bar{z}_S > 0\}$ é um conjunto laminar, isto é, para todo $X, Y \in \mathcal{F}$,

$$X \setminus Y = \emptyset \quad \text{ou} \quad Y \setminus X = \emptyset \quad \text{ou} \quad X \cap Y = \emptyset.$$

De facto, admitamos que \mathcal{F} não é um conjunto laminar, isto é, existem $X, Y \in \mathcal{F}$ tais que

$$X \setminus Y \neq \emptyset \quad \text{e} \quad Y \setminus X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad X \cap Y \neq \emptyset.$$

Seja ainda $\epsilon = \min(z_X, z_Y) > 0$ e consideremos dois casos distintamente, consoante $|X \cap Y|$ é par ou ímpar.

Se $|X \cap Y|$ é ímpar então $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{F}$ mas não $X \setminus Y, Y \setminus X$. Seja z' coincidente com \bar{z} excepto nas componentes

$$\begin{aligned} z'_X &= \bar{z}_X - \epsilon, & z'_{X \cap Y} &= \bar{z}_{X \cap Y} + \epsilon, \\ z'_Y &= \bar{z}_Y - \epsilon, & z'_{X \cup Y} &= \bar{z}_{X \cup Y} + \epsilon. \end{aligned}$$

O ponto $(0, z')$ é admissível em (3) pois $(0, z') \geq 0$ e, para todo $e \in E$, - veja-se a Figura 1(a) -

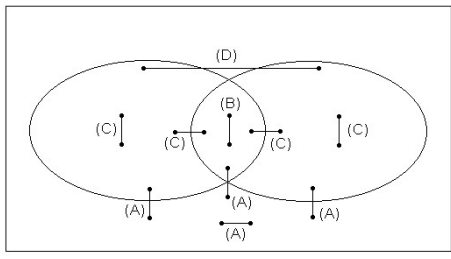
$$\sum_{S \in \mathcal{S}: e \in E(S)} z'_S = \sum_{S \in \mathcal{S}: e \in E(S)} \bar{z}_S + \begin{cases} 0 & \text{se } e \notin E(X \cup Y) \\ -\epsilon + \epsilon - \epsilon + \epsilon & \text{se } e \in E(X \cap Y) \\ -\epsilon + \epsilon & \text{se } e \in (E(X) \cup E(Y)) \setminus E(X \cap Y) \\ \epsilon & \text{se } e = \{i, j\} \text{ tal que } i \in X, j \in Y \end{cases}$$

que em qualquer dos casos é superior ou igual a c_e . Mais, $(0, z')$ é solução óptima para (3) porque

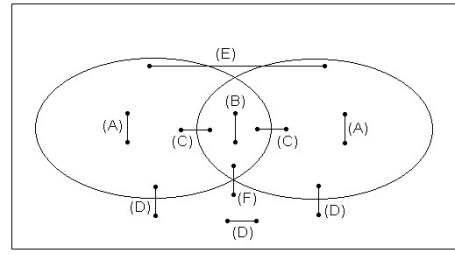
$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{|S| - 1}{2} z'_S - \sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{|S| - 1}{2} \bar{z}_S = \epsilon \left(-\frac{|X| - 1}{2} - \frac{|Y| - 1}{2} + \frac{|X \cap Y| - 1}{2} + \frac{|X \cup Y| - 1}{2} \right) = 0$$

No entanto, chegamos a um absurdo porque

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{S}} |S|^2 z'_S - \sum_{S \in \mathcal{S}} |S|^2 \bar{z}_S &= \epsilon (-|X|^2 - |Y|^2 + |X \cap Y|^2 + |X \cup Y|^2) \\ &= \epsilon (|X| - |X \cap Y|) (|Y| - |X \cap Y|) > 0. \end{aligned}$$



(a) $|X \cap Y|$ é ímpar



(b) $|X \cap Y|$ é par

Figura 1: Esquema de possibilidades para $e \in E$ (I).

Se $|X \cap Y|$ é par então $X \setminus Y, Y \setminus X \in \mathcal{F}$ mas não $X \cap Y, X \cup Y$. Seja (y', z') tal que

$$y'_i = \epsilon \quad (i \in X \cap Y), \quad \text{e} \quad y'_i = 0 \quad (i \notin X \cap Y).$$

e z' coincidente com \bar{z} excepto nas componentes

$$\begin{aligned} z'_X &= \bar{z}_X - \epsilon, & z'_{X \setminus Y} &= \bar{z}_{X \setminus Y} + \epsilon, \\ z'_Y &= \bar{z}_Y - \epsilon, & z'_{Y \setminus X} &= \bar{z}_{Y \setminus X} + \epsilon. \end{aligned}$$

O ponto (y', z') é admissível em (3) pois $(y', z') \geq 0$ e, para todo $e \in E$, - veja-se a Figura 1(b) -

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in V: e \in \delta(i)} y'_i + \sum_{S \in \mathcal{S}: e \in E(S)} z'_S = \\ & = \sum_{S \in \mathcal{S}: e \in E(S)} \bar{z}_S + \begin{cases} -\epsilon + \epsilon & \text{se } e \in E(X \setminus Y) \cup E(Y \setminus X) \\ \epsilon + \epsilon - \epsilon - \epsilon & \text{se } e \in E(X \cap Y) \\ \epsilon - \epsilon & \text{se } e \in (E(X) \cup E(Y)) \setminus E(X \cap Y) \\ 0 & \text{se } e = \{i, j\} \text{ com } i \notin X \cap Y, j \notin X \cup Y \\ 0 & \text{se } e = \{i, j\} \text{ com } i \in X \setminus Y, j \in Y \setminus X \\ \epsilon & \text{se } e = \{i, j\} \text{ com } i \in X \cap Y, j \notin X \cup Y \end{cases} \end{aligned}$$

que em qualquer dos casos é superior ou igual a c_e . Mais, (y', z') é solução óptima para (3) porque

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i \in V} y'_i + \sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{|S|-1}{2} z'_S \right) - \left(\sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{|S|-1}{2} \bar{z}_S \right) = \\ & = \epsilon |X \cap Y| + \epsilon \left(-\frac{|X|-1}{2} - \frac{|Y|-1}{2} + \frac{|X \setminus Y|-1}{2} + \frac{|Y \setminus X|-1}{2} \right) \\ & = \frac{\epsilon}{2} (2|X \cap Y| - |X| - |Y| + |X \setminus Y| + |Y \setminus X|) = 0, \end{aligned}$$

o que é absurdo pois, como $\tilde{y} \neq 0$, (\tilde{y}, \tilde{z}) não pode ser solução óptima de (3). Concluimos que \mathcal{F} é um conjunto laminar.

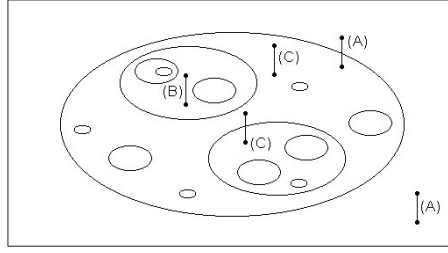


Figura 2: Esquema de possibilidades para $e \in E$ (II).

Como \bar{z} não é um vector de números inteiros então existe um conjunto $X \in \mathcal{F}$ tal que $\epsilon = z_X - \lfloor z_X \rfloor > 0$ maximal em \mathcal{F} . Sejam $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathcal{F}$ subconjuntos próprios de X maximais (relativamente à inclusão). Como \mathcal{F} é laminar, todos estes conjuntos X_1, X_2, \dots, X_k são disjuntos. Seja z' coincidente com \bar{z} excepto nas componentes

$$z'_X = \bar{z}_X - \epsilon, \quad \bar{z}'_{X_i} = \bar{z}_{X_i} + \epsilon.$$

Portanto, $(0, z') \geq 0$. Para concluir que $(0, z')$ é admissível em (3) é suficiente considerar três possibilidades para todas as arestas $e \in E$ - veja-se a Figura 2. Se $e \notin E(X)$ então

$$\sum_{S \in \mathcal{S}: e \in E(S)} z'_S = \sum_{S \in \mathcal{S}: e \in E(S)} \bar{z}_S \geq c_e.$$

Se $e \in E(X)$ e existe X_i tal que $e \in E(X_i)$ então

$$\sum_{S \in \mathcal{S}: e \in E(S)} z'_S \geq \sum_{S \in \mathcal{S}: e \in E(S)} \bar{z}_S - \epsilon + \epsilon \geq c_e.$$

Se $e \in E(X)$ e não existe X_i tal que $e \in E(X_i)$ então

$$\sum_{S \in \mathcal{S}: e \in E(S)} z'_S = \underbrace{\sum_{S \in \mathcal{F}: e \in E(S), S \supset X} z'_S + z'_X}_{\in \mathbb{Z}} = \overbrace{\sum_{S \in \mathcal{F}: e \in E(S), S \supset X} \bar{z}_S + \bar{z}_X - \epsilon}^{\geq c_e \in \mathbb{Z}} \geq c_e.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{|S| - 1}{2} \tilde{z}_S - \sum_{S \in \mathcal{S}} \frac{|S| - 1}{2} \bar{z}_S &= \epsilon \left(-\frac{|X| - 1}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{|X_i| - 1}{2} \right) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \left(-|X| + \sum_{i=1}^k |X_i| + 1 - k \right), \end{aligned}$$

que é negativo, qualquer que seja $k \geq 0$. Chegamos a um absurdo porque, então $(0, \bar{z})$ não seria solução óptima de (3). \square

Atendendo às propriedades dos sistemas de desigualdades TDI, o próximo teorema surge como corolário do teorema anterior.

Teorema 2 [16] *Qualquer que seja o grafo não dirigido $G = (V, E)$, o poliedro dos emparelhamentos de G é o conjunto dos pontos x que satisfazem o sistema de desigualdades (1)-(2).*

Este teorema foi demonstrado pela primeira vez por Jack Edmonds em [16] onde apresentou uma demonstração construtiva, baseada no algoritmo proposto em [17]. Para além da demonstração que decorre do nosso desenvolvimento várias outras demonstrações do Teorema 2 são conhecidas, veja-se [36, 42] por exemplo.

Exercícios.

1. Mostre que as desigualdades (2) são válidas para $P_{\text{mat}}(G)$. *Solução:* Seja x o vector característico de um emparelhamento M e seja $S \in \mathcal{S}$ qualquer. Como cada vértice $j \in S$ é incidente em, no máximo uma aresta de M , não pode haver mais do que $\lfloor |S|/2 \rfloor = (|S| - 1)/2$ arestas de M com ambas as extremidades em S .
2. Use o Teorema 1 para caracterizar o *poliedro dos emparelhamentos perfeitos* de um qualquer grafo não dirigido $G = (V, E)$. *Sugestão:* Num sistema de desigualdades TDI se substituirmos alguma desigualdade por igualdade, o sistema resultante permanece TDI.
3. Use a alínea anterior para caracterizar o poliedro dos emparelhamentos perfeitos de um qualquer grafo não dirigido $G = (V, E)$ como sendo o conjunto dos pontos x que satisfazem o seguinte sistema de desigualdades:

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 1 \quad (i \in V) \tag{6a}$$

$$x_e \geq 0 \quad (e \in E). \tag{6b}$$

e

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \geq 1 \quad (S \in \mathcal{S} \equiv \{S \subseteq V : |S| \text{ é ímpar } \}). \tag{7}$$

4. Use o Teorema 1 para demonstrar o Teorema de Tutte-Berge [6]: Em qualquer grafo não dirigido $G = (V, E)$,

$$2\nu(G) + \max_{S \subseteq V} (q_G(S) - |S|) = |V|,$$

onde $q_G(S)$ denota o número de componentes com um número ímpar de vértices de $G - S$; e, $\nu(G)$ denota a cardinalidade do emparelhamento de máxima cardinalidade de G .

Afectação

Afectação é um dos tópicos introdutórios em Optimização Combinatória por servir de ilustração da Unimodularidade Total e por possuir algoritmos que resolvem esse problema de modo elegante e eficiente. O problema possui uma descrição simples: como afectar n indivíduos a n tarefas de modo a minimizar o tempo total na execução dessas tarefas sabendo, antecipadamente, o tempo exacto que cada indivíduo demora a executar cada tarefa. A formulação algébrica clássica usa as variáveis binárias x_{ij} , para $i, j = 1, \dots, n$, e é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \\
 & x_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{8}$$

ou, na forma matricial, $\max\{cx : Ax = 1, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^{n \times n}\}$, onde A é a matriz de incidência vértice-aresta de um grafo bipartido completo.

Sendo A uma matriz Totalmente Unimodular, o problema (8) pode ser resolvido ignorando as restrições de integralidade nas variáveis, através do método de Simplex especializado para lidar com a estrutura específica do problema. Mais, o problema de afectação é, simultaneamente, um problema de fluxo máximo e um problema de fluxo de custo mínimo para os quais são conhecidas implementações específicas do método de Simplex que funcionam em tempo polinomial.

No entanto, o problema de afectação pode ser resolvido por uma outra classe de métodos, ditos combinatórios por serem métodos que, na sua génese, não usam a formulação algébrica do problema - esse não é o caso, por exemplo, do método de Simplex e do método elipsóide. Um desses métodos é o método Húngaro proposto por Kuhn na década de 50 [33], que pode ser implementado em $\mathcal{O}(n^3)$ operações aritméticas e comparações [35], conforme demonstraremos. Como também veremos, o método mantém a dual admissibilidade e complementaridade durante todo o seu desenrolar e termina quando for alcançada a primal admissibilidade. Portanto, apesar de não ser um método de Simplex clássico não lhe é muito diferente.

Uma consequência imediata do Lema 1, abaixo, é que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $c_{ij} \geq 0$ para todo i, j . Outra consequência é o facto de a função objectivo de (8) poder ser substituída por $\sum_{i,j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij}$ sem que o conjunto de soluções óptimas fique diferente.

Lema 1 *Seja \bar{x} admissível para (8) e $u, v \in \mathbb{R}^n$ quaisquer. Então,*

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij}\bar{x}_{ij} = \sum_{i,j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j)\bar{x}_{ij} + \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j.$$

Prova:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}\bar{x}_{ij} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j)\bar{x}_{ij} + \sum_{i=1}^n \left[u_i \left(\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} \right) \right] + \sum_{j=1}^n \left[v_j \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij} \right) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j)\bar{x}_{ij} + \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j.
 \end{aligned}$$

□

O Lema 1 permanece verdadeiro para qualquer problema de otimização cuja região admissível esteja contida na região admissível do problema de afectação. Esse é o caso, por exemplo, do problema do caixeiro viajante assimétrico ou de problemas de afectação com restrições adicionais (quando, por exemplo, algumas variáveis x_{ij} estão fixas a zero).

Como a matriz A é Totalmente Unimodular, o valor óptimo de (8) não muda se ignorarmos as restrições " $x_{ij} \in \mathbb{Z}$ ". Por isso, o conjunto de soluções óptimas do problema linear de afectação $\max\{cx : Ax = 1, x \geq 0\}$, que vamos designar por problema relaxado, é o invólucro convexo do conjunto de soluções óptimas do problema de afectação (8). O dual do problema relaxado é

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \\ \text{s.a} \quad & u_i + v_j \geq c_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n), \end{aligned} \tag{9}$$

com a ajuda do qual podemos demonstrar o seguinte resultado.

Lema 2 *Uma solução \bar{x} admissível para (8) é óptima se e só se existirem $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que*

$$\bar{c}_{ij} \equiv c_{ij} - u_i - v_j \leq 0, \quad \bar{x}_{ij} = 1 \Rightarrow \bar{c}_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Nesse caso, o valor óptimo é $\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j$.

Prova: Se \bar{x} é solução óptima para (8) então \bar{x} também é solução óptima para o problema relaxado. A condição necessária é, então, consequência da dualidade forte da programação linear. Reciprocamente, se $u, v \in \mathbb{R}^n$ satisfazem as condições do lema então, relativamente ao problema relaxado, temos uma solução dual admissível (u, v) e uma solução primal admissível \bar{x} tais que

$$\sum_{i,j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) \bar{x}_{ij} = 0.$$

Atendendo ao Lema 1, verificamos dualidade forte da programação linear, pelo que (u, v) é óptima para o dual (9), e \bar{x} é óptima para o problema relaxado. Como \bar{x} é inteira, \bar{x} é óptima para (8). \square

O problema de afectação pode também interpretar-se como um problema de emparelhamento perfeito de peso máximo num grafo bipartido completo da maneira que explicamos a seguir. É esta característica que coloca o problema de afectação entre o leque de problemas analisados em Otimização Combinatória. Reciprocamente, os problemas de emparelhamento perfeito em grafos bipartidos podem ser interpretados como problemas de fluxo em redes de custo mínimo, nos quais todas as capacidades e requerimentos são unitários.

Seja $G = (V_1, V_2, E)$ um grafo bipartido com pesos $c_{ij} \geq 0$, para $(i, j) \in E \subseteq V_1 \times V_2$ e considere-se o problema de determinar em G o emparelhamento perfeito de peso máximo. Entenda-se por peso de um emparelhamento como sendo a soma dos pesos das arestas que constituem esse emparelhamento. Este problema pode formular-se algebricamente por

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\ \text{t.q.} \quad & \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} = 1 \quad (i \in V_1), \\ & \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} x_{ij} = 1 \quad (j \in V_2), \\ & x_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in E, \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (i, j) \in E, \end{aligned} \tag{10}$$

ou, na forma matricial, $\max\{cx : Ax = 1, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^m\}$, onde A é a matriz de incidência vértice-aresta do grafo G e $m = |E|$. Novamente, como A é Totalmente Unimodular, existe Dualidade

Fraca e Forte entre (10) e o problema dual

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in V_1} u_i + \sum_{j \in V_2} v_j \\ \text{s.a} \quad & u_i + v_j \geq c_{ij} \quad ((i, j) \in E) \end{aligned} \quad (11)$$

Como uma condição necessária para que o problema (10) seja admissível é $|V_1| = |V_2|$, se $E = V_1 \times V_2$ então o problema (10) é apenas uma maneira diferente de descrever o problema de afectação (8). Em geral, estaremos interessados na resolução de (10) quando $E \subset V_1 \times V_2$. Isso é equivalente a resolver o problema de afectação impedindo determinadas afectações indivíduo-tarefa.

Numa das secções seguintes, vamos apresentar o método Húngaro que determina o emparelhamento perfeito de peso máximo num grafo bipartido em $\mathcal{O}(n^3)$ operações, com $n = |V_1| = |V_2|$. O método usa em cada iteração o algoritmo para determinação do emparelhamento de máxima cardinalidade num grafo bipartido que recordamos na próxima secção.

Emparelhamentos Perfeitos

Consideremos o problema de determinar, num grafo bipartido $G = (V_1, V_2, E)$, o emparelhamento de máxima cardinalidade. A resolução deste problema permite assegurar a existência, ou não, de uma solução admissível para (10). O problema pode formular-se algebricamente do seguinte modo

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \\ \text{t.q.} \quad & \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} \leq 1 \quad (i \in V_1), \\ & \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} x_{ij} \leq 1 \quad (j \in V_2), \\ & x_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in E, \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (i, j) \in E, \end{aligned} \quad (12)$$

ou, na forma matricial, $\max\{1x : Ax \leq 1, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^m\}$, onde A é a matriz de incidência vértice-aresta de G .

A abordagem natural para resolução deste problema é a de obter sistematicamente caminhos aumentados no grafo G , como decorre da próxima proposição que é válida para qualquer grafo não orientado. Recordamos que um caminho aumentado relativamente a um emparelhamento \mathcal{M} é um caminho alternado relativamente a \mathcal{M} tal que ambas as arestas inicial e final pertencem a $E \setminus \mathcal{M}$. Um caminho alternado relativamente a um emparelhamento \mathcal{M} é um caminho simples entre dois vértices que alterna entre arestas de \mathcal{M} e de $E \setminus \mathcal{M}$.

Teorema 3 ([5]) *Seja $G = (V, E)$ um grafo não orientado e \mathcal{M} um emparelhamento de G .*

1. *Se P é um caminho aumentado relativamente a \mathcal{M} então $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \Delta P \equiv (\mathcal{M} \cup P) \setminus (\mathcal{M} \cap P)$ ¹ é um emparelhamento de G e $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}| + 1$.*
2. *Se não existe caminho aumentado relativamente a \mathcal{M} então \mathcal{M} é um emparelhamento de máxima cardinalidade de G .*

Prova: (Acompanhámos essencialmente a demonstração descrita em [46, Teorema 3.1.10, p. 109]) Se \mathcal{M} é um emparelhamento e P é um caminho aumentado relativamente a \mathcal{M} então $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \Delta P$ também é um emparelhamento. Além disso, $|\mathcal{M}'| = |(\mathcal{M} \cup P) \setminus (\mathcal{M} \cap P)| = |P \cap (E \setminus \mathcal{M})| = |P \cap \mathcal{M}| + 1 = |\mathcal{M}| + 1$. Para provar o recíproco, admita-se a existência de \mathcal{M}' um emparelhamento de G tal que $|\mathcal{M}'| > |\mathcal{M}|$. Seja $F = \mathcal{M} \Delta \mathcal{M}'$. Como \mathcal{M} e \mathcal{M}' são emparelhamentos de G , todo o

¹Operador 'diferença simétrica'.

Algoritmo de determinação do emparelhamento de máxima cardinalidade num grafo bipartido $G = (V_1, V_2, E)$

Passo 0: Inicializar

Seja \mathcal{M} um emparelhamento de G ;
atribuir o rótulo de 'não explorado' a todo o vértice $i \in V_1 \cup V_2$,
atribuir o rótulo de '*' a todo vértice exposto $i \in V_1$.

Passo 1: Rotular

Seja i um vértice com rótulo 'não explorado'. Se não existir segue para Passo 3.
Se $i \in V_1$
então atribuir o rótulo i a todo o vértice $j \in V_2$ tal que
 $(i, j) \in E \setminus \mathcal{M}$ e j possui o rótulo de 'não explorado'.
Se $i \in V_2$
então se i é um vértice exposto,
então segue para Passo 2.
senão atribuir o rótulo i ao vértice $j \in V_1$ tal que $(j, i) \in \mathcal{M}$.
Repetir o Passo 1.

Passo 2: Caminho aumentado encontrado

Usar os rótulos para identificar o caminho aumentado P ,
 $\mathcal{M} \leftarrow (\mathcal{M} \cup P) \setminus (\mathcal{M} \cap P)$,
atribuir o rótulo de 'não explorado' a todo o vértice $i \in V_1 \cup V_2$,
atribuir o rótulo de '*' a todo vértice exposto $i \in V_1$,
segue para Passo 1.

Passo 3: Solução ótima encontrada

Não existe caminho aumentado relativamente a \mathcal{M} .

Figura 3: Algoritmo de determinação do emparelhamento de máxima cardinalidade num grafo bipartido

vértice de G possui no máximo uma aresta incidente em cada um daqueles conjuntos de arestas. Por isso, todo o vértice de G possui no máximo duas arestas incidentes em F . Consequentemente, cada componente do grafo $G' = (V, F)$ é um caminho simples ou um circuito. Mais, cada aresta de um desses caminhos simples e circuitos alterna entre uma aresta de \mathcal{M} e uma aresta de \mathcal{M}' . Por isso, todos os circuitos têm um número par de arestas, e como $|\mathcal{M}'| > |\mathcal{M}|$ deve existir um caminho simples que começa e termina com arestas de \mathcal{M}' . Um tal caminho é um caminho aumentado relativamente a \mathcal{M} , o que é absurdo. \square

Portanto, um emparelhamento \mathcal{M} é de máxima cardinalidade se e só se não existe caminho aumentado relativamente a \mathcal{M} . Para averiguar a existência de um caminho aumentado relativamente a um emparelhamento \mathcal{M} num grafo bipartido é suficiente *marcar* os vértices que são alcançados por algum vértice não coberto por \mathcal{M} ao longo de caminhos alternados sucessivamente ampliados. Como num grafo bipartido não existem circuitos com um número ímpar de arestas, nenhum vértice de um caminho alternado pode ser alcançado simultaneamente a partir de uma aresta de \mathcal{M} e de $E \setminus \mathcal{M}$. Por isso, a determinação de um caminho aumentado em grafos bipartidos pode ser efectuada de forma muito eficiente. O completo procedimento pode ser feito de acordo

com o algoritmo enumerativo descrito na Figura 3.

O algoritmo começa com um primeiro emparelhamento \mathcal{M} conhecido - uma aresta apenas, por exemplo. No início, todos os vértices de $V = V_1 \cup V_2$ são rotulados de *não explorado*, à excepção dos vértices expostos de V_1 que recebem o rótulo '∗' - a existir caminho aumentado relativamente a \mathcal{M} , uma das extremidades desse caminho será um vértice exposto de V_1 , a outra extremidade será um vértice exposto de V_2 . As sucessivas passagens pelo Passo 1 permitem construir (por ampliação) uma floresta de caminhos alternados emanando de cada um dos vértices expostos de V_1 . Esse processo de construção é interrompido quando ou um caminho aumentado é identificado, ou quando já não é possível ampliar essa floresta. No primeiro caso, sucede-se o Passo 2 onde o emparelhamento \mathcal{M} é redefinido de modo a conter mais uma aresta, de acordo com o Teorema 3, após o que se dá início novamente ao Passo 1. No segundo caso, fica verificado por enumeração exaustiva a inexistência de um caminho aumentado.

O Teorema 4 abaixo apresenta uma maneira simples de verificar que o emparelhamento \mathcal{M} obtido no final do algoritmo é, de facto, o emparelhamento de máxima cardinalidade. O teorema é consequência directa do Teorema de Berge (que se aplica a qualquer tipo de grafos) mas já seria conhecida na década de 50.

Teorema 4 *No Passo 3 do algoritmo, sejam*

$$\begin{aligned} V_1^- &\equiv \{i \in V_1 : \text{rótulo de } i \text{ é 'não explorado'}\}, & V_1^+ &\equiv V_1 \setminus V_1^-, \\ V_2^- &\equiv \{i \in V_2 : \text{rótulo de } i \text{ é 'não explorado'}\}, & V_2^+ &\equiv V_2 \setminus V_2^-. \end{aligned}$$

O conjunto $R = V_1^- \cup V_2^+$ é uma cobertura por vértices de G tal que $|R| = |\mathcal{M}|$.

Prova: (Acompanhámos essencialmente a demonstração descrita em [47, página 56]) Quando o Passo 3 é executado,

1. não há arestas ligando vértices de V_1^+ a vértices de V_2^- . Por isso, toda a aresta (i, j) do grafo G é da forma $i \in V_1^+, j \in V_2^+$, ou $i \in V_1^-, j \in V_2^+$, ou $i \in V_1^-, j \in V_2^-$. Consequentemente, $R \equiv V_1^- \cup V_2^+$ é uma cobertura por vértices de G .
2. Todos os vértices de V_2^+ são incidentes em alguma aresta $(i, j) \in \mathcal{M}$ com $i \in V_1^+$. Por outro lado, todos os vértices i de V_1^- são extremidades de arestas $(i, j) \in \mathcal{M}$ tais que $j \in V_2^-$ (caso contrário, se i fosse exposto então teria recebido o rótulo '∗', se não fosse exposto então teria recebido algum rótulo durante o algoritmo). Logo $|R| \leq |\mathcal{M}|$.
3. Por dualidade fraca entre a cardinalidade de um emparelhamento e a cardinalidade de uma cobertura por vértices, sabe-se que $|R| \geq |\mathcal{M}|$. Por isso, $|\mathcal{M}| = |R|$.

□

Três teoremas bem conhecidos decorrem como corolário do Teorema 4 que, por isso, passaram a ter demonstrações construtivas.

Teorema 5 (de König-Egerváry, 1931) ([31, 18]) *Num grafo bipartido $G = (V_1, V_2, E)$ o emparelhamento de máxima cardinalidade e a cobertura por vértices de mínima cardinalidade são conjuntos com o mesmo número de elementos.*

Teorema 6 (do Casamento, 1917) ([21]) *Um grafo simples bipartido $G = (V_1, V_2, E)$ possui um emparelhamento perfeito se e só se $|V_1| = |V_2|$ e $|\delta(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq V_1$.*

Teorema 7 (de Hall, 1935) ([28]) *Um grafo simples bipartido $G = (V_1, V_2, E)$ possui um emparelhamento cobrindo os vértices de V_1 se e só se $|\delta(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq V_1$.*

Sobre o número de operações aritméticas e comparações envolvidas na implementação do algoritmo da Figura 3, temos o seguinte resultado de demonstração simples.

Teorema 8 *O algoritmo de determinação do emparelhamento de máxima cardinalidade num grafo bipartido $G = (V_1, V_2, E)$ requer $\mathcal{O}(n^3)$ operações aritméticas e comparações.*

Prova: Entre duas passagens sucessivas pelo Passo 2, o processo de rotulação requer $\mathcal{O}(n^2)$ operações aritméticas e comparações, com $n = \max\{|V_1|, |V_2|\}$ pois, durante duas passagens sucessivas pelo Passo 2, cada vértice é explorado uma única vez, no máximo, e a partir deste, n vértices são rotulados, no máximo. Em cada passagem pela Passo 2, $|\mathcal{M}|$ aumenta, pelo menos, uma unidade. O resultado pretendido decorre de $|\mathcal{M}| \leq n$. \square

Naturalmente, uma implementação prática deste algoritmo não inicializaria os rótulos de todos os vértices do modo que é descrito no Passo 2. De facto apenas os rótulos dos vértices pertencentes à árvore dos caminhos alternados onde ocorreu o caminho aumentado que se identificou necessitam ser modificados. Não abordaremos este aspecto por ser irrelevante no contexto do método que descrevemos na próxima secção.

Exercícios.

1. Demonstre os Teoremas 5, 6 e 7 com base no Teorema 4.
2. (*in* Boletim 39 da APDIO, 2003) O grafo $G = (V_1, V_2, E)$ da Figura 4 representa uma teia de afectos entre seis príncipes e seis princesas durante o reinado de um conhecido rei português. O rei pretende casá-los a todos, se isso for possível. Demonstre ao seu rei, e usando uma linguagem que até uma criança de seis anos compreenderia, que essa pretensão é impossível de concretizar.

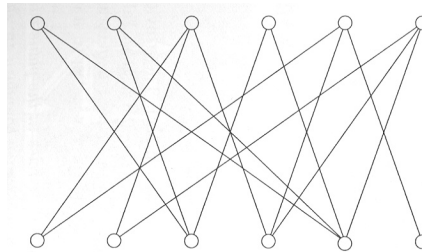


Figura 4: Um grafo bipartido.

O método Húngaro

Apresentamos o método Húngaro que resolve o problema (10) em $\mathcal{O}(n^3)$ operações aritméticas e comparações. O algoritmo é descrito na Figura 5 e usa em cada iteração o algoritmo de determinação do emparelhamento de máxima cardinalidade num grafo bipartido, descrito na secção anterior.

Em cada passagem pelo Passo 1, (u, v) é dual admissível (isto é, $\bar{c}_{ij} \equiv c_{ij} - u_i - v_j \leq 0$, para todo $(i, j) \in E$), e o vector característico, denotado \bar{x} , do emparelhamento \mathcal{M} satisfaz a condição de complementaridade " $\bar{x}_{ij} = 1 \Rightarrow \bar{c}_{ij} = 0$ " mas pode não ser primal admissível. A primal admissibilidade é alcançada quando \mathcal{M} for um emparelhamento perfeito. Se \mathcal{M} não é perfeito, o Passo 2 visa a modificação das variáveis duais de forma a proporcionar um emparelhamento com mais uma aresta.

Lema 3 ([33]) *No final do Passo 1 do Método Húngaro, $|V_1^+| > |V_2^+|$.*

Método Húngaro [33]

Passo 0: Inicialização

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $\bar{c}_{ij} \equiv c_{ij} - u_i - v_j \leq 0$ para todo $(i, j) \in E$.

Passo 1: Primal

Seja \mathcal{M} um emparelhamento de cardinalidade máxima

em $\bar{G} = (V_1, V_2, \bar{E})$, onde $\bar{E} = \{(i, j) \in E: \bar{c}_{ij} = 0\}$.

Sejam V_1^+, V_2^- os conjuntos obtidos no Passo 3 do algoritmo descrito antes.

Se $|\mathcal{M}| = n$ **então** \mathcal{M} é solução ótima de (10), parar.

Passo 2: Dual

Se $S \equiv \{(i, j) \in E: i \in V_1^+, j \in V_2^-\} = \emptyset$,

então não existe solução admissível para (10), parar.

senão calcular $\delta = \min\{-\bar{c}_{ij}: (i, j) \in S\}$.

Definir $u_i \leftarrow u_i - \delta$ para $i \in V_1^+$, e $v_j \leftarrow v_j + \delta$ para $j \notin V_2^-$.

Segue para o *Passo 1*.

Figura 5: Método Húngaro

Prova: Cada vértice j de V_2^+ é extremidade de uma aresta $(i, j) \in \mathcal{M}$ com $i \in V_1^+$. Portanto $|V_1^+| \geq |V_2^+|$. No entanto, V_1^+ contém pelo menos um vértice exposto que recebeu o rótulo '*'. Portanto, $|V_1^+| > |V_2^+|$. \square

Lema 4 ([33]) *No final do Passo 2 do Método Húngaro, se $S \neq \emptyset$ então*

1. $\delta > 0$;
2. $\bar{c}_{ij} \equiv c_{ij} - u_i - v_j \leq 0$, para todo $(i, j) \in E$;
3. os rótulos $|V_1^+|$ e $|V_2^+|$ permanecem válidos;

Prova:

1. Como foi demonstrado no Teorema 4, não existem arestas $(i, j) \in \bar{E}$ tais que $i \in V_1^+, j \in V_2^-$. Portanto, $\bar{c}_{ij} < 0$ para todo $(i, j) \in S$, o que implica que $\delta \equiv \min\{-\bar{c}_{ij}: (i, j) \in S\} > 0$.
2. Sejam u^{old} e v^{old} os valores u e v antes do Passo 2. Então, para cada $(i, j) \in E$,

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} - u_i - v_j = c_{ij} - u_i^{\text{old}} - v_j^{\text{old}}, & \text{se } i \in V_1^+ \text{ e } j \in V_2^+ \\ c_{ij} - u_i - v_j = c_{ij} - u_i^{\text{old}} - v_j^{\text{old}} + \delta, & \text{se } i \in V_1^+ \text{ e } j \in V_2^- \\ c_{ij} - u_i - v_j = c_{ij} - u_i^{\text{old}} - v_j^{\text{old}} - \delta, & \text{se } i \in V_1^- \text{ e } j \in V_2^+ \\ c_{ij} - u_i - v_j = c_{ij} - u_i^{\text{old}} - v_j^{\text{old}}, & \text{se } i \in V_1^- \text{ e } j \in V_2^- \end{cases}$$

de onde facilmente se conclui o resultado desejado. Note-se que, se $i \in V_1^+$ e $j \in V_2^-$, então $\bar{c}_{ij} \leq 0$ pela definição de δ .

3. Para as arestas $(i, j) \in \bar{E}$ tais que $i \in V_1^+, j \in V_2^+$, em particular as arestas de \mathcal{M} , a actualização das variáveis duais não altera o valor de \bar{c}_{ij} . Pelo que, permanecendo aquele conjunto de arestas em \bar{E} , os rótulos permanecem válidos. Consequentemente, o Passo Primal pode iniciar-se com os conjuntos de rótulos anteriores.

□

Lema 5 ([33]) *Se no Passo 2 do Método Húngaro $S = \emptyset$ então não existe solução admissível para (10).*

Prova: Se $S = \emptyset$ então não existe nenhuma aresta de E orientada de V_1^+ para V_2^- . Por isso, como se pode verificar na demonstração do Lema 4, o vector (\bar{u}, \bar{v}) definido por

$$\bar{u}_i = \begin{cases} u_i & \text{se } i \notin V_1^+, \\ u_i - \delta & \text{se } i \in V_1^+, \end{cases} \quad \bar{v}_i = \begin{cases} v_i & \text{se } i \notin V_2^-, \\ v_i + \delta & \text{se } i \in V_2^-, \end{cases}$$

é admissível para o dual (11), para todo o $\delta > 0$. Mas isso significa que o dual (11) é ilimitado e, portanto, não existe solução admissível para (10). □

Teorema 9 ([35]) *O método Húngaro requer $\mathcal{O}(n^3)$ operações aritméticas e comparações.*

Prova: Na primeira passagem pelo Passo 1 do método Húngaro a determinação do emparelhamento de cardinalidade máxima requer $\mathcal{O}(n^3)$ operações aritméticas e comparações, conforme foi demonstrado no Teorema 8.

Vamos agora provar que entre duas execuções sucessivas do Passo 1 sem que haja entre elas um incremento no valor de $|\mathcal{M}|$, o número operações aritméticas e comparações é $\mathcal{O}(n^2)$. Sejam k o número de vértices de V_2 , e de V_1 em igual número, que durante essas iterações passaram de *não rotulados* a rotulados sem que haja alteração no valor de $|\mathcal{M}|$. O esforço computacional envolvido na confirmação de que não existe um emparelhamento de maior cardinalidade nos sucessivos \bar{G} corresponde simplesmente a averiguar se entre os vizinhos daqueles vértices em V_1 existe algum em V_2^- . Para cada um daqueles vértices o esforço computacional é $\mathcal{O}(n)$. O resultado pretendido decorre de $k \leq n$.

Suponhamos que numa dada iteração do método Húngaro a redefinição das variáveis duais permite a inserção de um arco (i, j) , com $i \in V_1^+$ e $j \in V_2^-$, tal que $(k, j) \in \mathcal{M}$, com $k \in V_1^-$ e (k, l) pertencente ao novo grafo \bar{G} , com $l \in V_2^- \setminus \{j\}$ - ver Figura 6. Esta é a situação que permite o incremento de $|\mathcal{M}|$ no subsequente Passo 1. À semelhança do que foi demonstrado para o Teorema 8 são necessárias $\mathcal{O}(n^2)$ operações aritméticas e comparações até concluir que o novo emparelhamento \mathcal{M} é de máxima cardinalidade no novo grafo \bar{G} , ou encontrar um emparelhamento de cardinalidade superior. Como existem, no máximo, n incrementos de \mathcal{M} concluímos que o esforço total envolvido em iterações em que haja incremento de \mathcal{M} é $\mathcal{O}(n^3)$.

Sumariando os três parágrafos anteriores, o esforço computacional total com o método Húngaro é $\mathcal{O}(n^3)$. □

Histórico

Emparelhamento de máxima cardinalidade

Bons trabalhos de síntese sobre o problema de determinar o emparelhamento de máxima cardinalidade num grafo não orientado (bipartido ou não) incluem Tarjan [45, Capítulo 9], Gibbons [25, Capítulo 5], Ahuja, Magnati e Orlin [1, Capítulo 12], Papadimitriou e Steiglitz [41, Capítulo 10], Lawler [35, Capítulo 5], Lovasz e Plummer [36], Cook, Cunningham, Pulleyblank e Schrijver [11, Capítulo 5] e o artigo de Galil [24]. Essencialmente, todas estas referências descrevem o algoritmo proposto por Edmonds para determinar o emparelhamento de peso máximo [16] (do qual o problema de determinar o emparelhamento de máxima cardinalidade é um caso particular [17]).

No caso do grafo ser bipartido, o problema de determinar o emparelhamento de peso máximo pode ser resolvido em $\mathcal{O}(nm \log_{2+m/n} n)$ operações aritméticas e comparações, conforme descrito

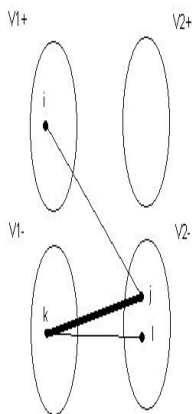


Figura 6: Redefinição das variáveis duais no método Húngaro

por Tarjan [45, Secção 8.4]. Se o problema for o de determinar o emparelhamento de máxima cardinalidade, Hopcroft e Karp [29] e Even e Tarjan [19] mostraram que o algoritmo descrito na secção pode ser implementado com complexidade computacional $\mathcal{O}(\sqrt{nm})$. Em Ahuja, Magnati e Orlin [1, páginas 478–494] podemos ver uma explicação alternativa da complexidade de $\mathcal{O}(n^3)$, que demonstrámos. Alt, Blum, Mehlhorn, e Paul [3] propuseram um algoritmo que funciona em $\mathcal{O}(n^{1.5}\sqrt{m/\log n})$.

O problema de determinar o emparelhamento de peso máximo num grafo não orientado (bipartido ou não) pode ser resolvido pelo algoritmo de Edmonds cuja complexidade é simples de provar ser $\mathcal{O}(n^4)$ (ver [41, Capítulo 10], e.g.). Lawler [35, Capítulo 5] e Gabow [22] mostraram que o algoritmo de Edmonds pode ser implementado em $\mathcal{O}(n^3)$. Galil, Micali e Gabow [23] mostraram ser possível uma implementação em $\mathcal{O}(nm \log n)$, portanto superior em grafos esparsos. Se o problema for o de determinar o emparelhamento de máxima cardinalidade, Even e Kariv [20] generalizaram o algoritmo de Hopcroft e Karp para funcionar em $\mathcal{O}(\min(n^{2.5}, \sqrt{nm} \log \log n))$ e Micali e Vazirani [39] introduziram-lhe modificações que permitiram chegar a $\mathcal{O}(\sqrt{nm})$.

Em 1991, o *Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* (DIMACS, <http://dimacs.rutgers.edu/>) propôs a sua primeira competição de implementações, precisamente em problemas de fluxo em redes e emparelhamentos - o resultado é documentado em [15]. Geradores de instâncias de problemas de emparelhamentos de máxima cardinalidade (bem como problemas de afectação, fluxo máximo e fluxo de custo mínimo) e algumas implementações de algoritmos podem ser obtidas em <ftp://dimacs.rutgers.edu/> no directório `pub/netflow/matching`. Destacamos a implementação em `Fortran 77` do algoritmo de Micali e Vazirani por Mattingly e Ritchey [38] para o emparelhamento de máxima cardinalidade, e a implementação em `C` do algoritmo de Gabow por Rothberg [15], em ambos os casos aplicáveis a grafos não necessariamente bipartidos.

A implementação em `C` do algoritmo de Edmonds por Cook e Rohe [12], denominada `Blossom IV`, para o problema de emparelhamento de peso máximo, está disponível em <http://www.or.uni-bonn.de/home/rohe/matching.html>.

A biblioteca de algoritmos combinatórios para matemática discreta e teoria de grafos `Combinatorica`, documentada em [43], contém implementações em `Mathematica` para o problema do emparelhamento de cardinalidade máxima num grafo bipartido. A biblioteca é acessível em <ftp://ftp.cs.sunysb.edu> no directório `pub/Combinatorica` e contém implementações para

muitos outros problemas de matemática discreta.

A biblioteca de implementações algorítmicas LEDA (abreviatura de 'Library of Efficient Data types and Algorithms') contém implementações em C++ de algoritmos para o do emparelhamento de máxima cardinalidade em grafos bipartidos. Nomeadamente, as implementações do algoritmo de Hopcroft e Karp, do algoritmo de Alt, Blum, Mehlhorn, e Paul podem ser obtidas em [ftp://ftp.mpi-sb.mpg.de](ftp://ftp.mpi-sb.mpg.de/pub/LEDA) no directório /pub/LEDA, ou em <http://www.mpi-sb.mpg.de/LEDA/leda.html>.

A aplicação Stanford GraphBase desenvolvida por Knuth e documentada em [30] contém implementações de vários algoritmos para problemas de Optimização Combinatória, incluindo o algoritmo de Alt, Blum, Mehlhorn e Paul (para o emparelhamentos de máxima cardinalidade em grafos bipartidos) e o algoritmo de Goldberg e Tarjan [27] (para o fluxo máximo), escritas por Setubal [10]. Podem ser obtidas em <http://www.cs.sunysb.edu/~algorithm/implement/bipm/implement.shtml>.

Implementações em Pascal de vários algoritmos para o emparelhamento de máxima cardinalidade por Syslo, Deo e Kowalik, descritas em [44], estão disponíveis em <http://www.cs.sunysb.edu/~algorithm/implement/syslo/distrib/>; e para o emparelhamento de máxima cardinalidade em grafos bipartidos ou não por Moret e Shapiro, descritas em [40], estão disponíveis em <http://www.cs.sunysb.edu/~algorithm/implement/moret/>.

Afectação

Bons trabalhos de síntese sobre o problema de afectação incluem Derigs [14, Capítulo 10], Magnanti, Ahuja e Orlin [1, Capítulo 12], Bazaraa, Jarvis e Sherali [4, Capítulo 10.7], Papadimitriou e Steiglitz [41, Capítulo 11], Bertsekas [7, Capítulo 7.1] e os artigos de Dell'Amico e Toth [13], Martello e Toth [37], Akgül [2] e Burkard e Çela [8].

As abordagens propostas para a solução do problema de afectação podem ser agrupadas em três classes: algoritmos primal-duais (baseados na identificação de caminhos aumentados), algoritmos primais puros (basicamente são implementações especializadas do algoritmo simplex para redes) e algoritmos duais puros (abordagens em que a solução primal admissível é encontrada apenas no último passo do algoritmo sem requerer complementaridade).

O método Húngaro, desenvolvido por Kuhn [33, 34], enquadra-se na primeira classe. A complexidade polinomial do método Húngaro foi primeiro considerada $\mathcal{O}(n^4)$, tendo sido reduzida para $\mathcal{O}(n^3)$ por Lawler [35] (ver também Derigs [14, página 135]).

Das implementações de domínio público disponíveis para o problema de afectação, refira-se a implementação de Dell'Amico, Carpaneto e Toth escrita em linguagem Fortran e disponível na Netlib, na biblioteca de algoritmos da ACM, em <http://www.netlib.org/toms/750>. O código completo destina-se a determinar a resolução do problema do caixeiro viajante assimétrico mas inclui rotinas que resolvem o problema de afectação, usando o método Húngaro, as quais se encontram descritas no artigo de Carpaneto and Toth [9].

Refira-se, também para o problema de afectação, a implementação CSA de Goldberg e Kennedy [26] escrita em linguagem C que se baseia no algoritmo *preflow-push* com *cost-scaling* para o problema de fluxo de custo máximo e que se encontra disponível em <http://www.avglab.com/andrew/soft.html>.

Referências

- [1] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network flows*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1993. Theory, algorithms, and applications.
- [2] Mustafa Akgül. The linear assignment problem. In *Combinatorial optimization (Ankara, 1990)*, volume 82 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. F Comput. Systems Sci.*, pages 85–122. Springer, Berlin, 1992.
- [3] H. Alt, N. Blum, K. Mehlhorn, and M. Paul. Computing a maximum cardinality matching in a bipartite graph in time $\mathcal{O}(n^{1.5}\sqrt{m/\log n})$. *Inform. Process. Lett.*, 37(4):237–240, 1991.
- [4] Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, and Hanif D. Sherali. *Linear programming and network flows*. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1990.

- [5] Claude Berge. Two theorems in graph theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 43:842–844, 1957.
- [6] Claude Berge. Sur le couplage maximum d’un graphe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 247:258–259, 1958.
- [7] D. P. Bertsekas. *Network Optimization: Continuous and Discrete Models*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1998.
- [8] Rainer E. Burkard and Eranda Çela. Linear assignment problems and extensions. In *Handbook of combinatorial optimization, Supplement Vol. A*, pages 75–149. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [9] Giorgio Carpaneto and Paolo Toth. Primal-dual algorithms for the assignment problem. *Discrete Appl. Math.*, 18(2):137–153, 1987. Rio conference on combinatorial optimization (Rio de Janeiro, 1985).
- [10] Boris V. Cherkassky, Andrew V. Goldberg, Paul Martin, João C. Setubal, and Jorge Stolfi. Augment or push? A computational study of bipartite matching and unit capacity flow algorithms. *ACM J. Exp. Algorithmics*, 3:38 pp. (electronic), 1998.
- [11] William J. Cook, William H. Cunningham, William R. Pulleyblank, and Alexander Schrijver. *Combinatorial optimization*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons Inc., New York, 1998. A Wiley-Interscience Publication.
- [12] William Cook and André Rohe. Computing minimum-weight perfect matchings. *INFORMS J. Comput.*, 11(2):138–148, 1999. Combinatorial optimization and network flows.
- [13] Mauro Dell’Amico and Paolo Toth. Algorithms and codes for dense assignment problems: the state of the art. *Discrete Appl. Math.*, 100(1-2):17–48, 2000.
- [14] Ulrich Derigs. *Programming in networks and graphs*, volume 300 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. On the combinatorial background and near-equivalence of network flow and matching algorithms.
- [15] DIMACS. *Network Flows and Matching: First DIMACS Implementation Challenge*, volume 12. DIMACS, 1993.
- [16] Jack Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 69B:125–130, 1965.
- [17] Jack Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canad. J. Math.*, 17:449–467, 1965.
- [18] E. Egerváry. On combinatorial properties of matrices (hungarian with german summary). *Math. Lapok*, 38:16–28, 1931.
- [19] Shimon Even and R. Endre Tarjan. Network flow and testing graph connectivity. *SIAM J. Comput.*, 4(4):507–518, 1975.
- [20] S. Even and O. Kariv. An $O(N^{2.5})$ algorithm for maximum matching in general graphs. In *16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Berkeley, Calif., 1975)*, pages 100–112. IEEE Computer Society, Long Beach, Calif., 1975.
- [21] G. Frobenius. über zerlegbare determinanten. *Sitzungsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften XVIII*, pages 274–277, 1917.
- [22] Harold N. Gabow. An efficient implementation of Edmonds’ algorithm for maximum matching on graphs. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 23(2):221–234, 1976.

- [23] Zvi Galil, Silvio Micali, and Harold Gabow. An $O(EV \log V)$ algorithm for finding a maximal weighted matching in general graphs. *SIAM J. Comput.*, 15(1):120–130, 1986.
- [24] Zvi Galil. Efficient algorithms for finding maximum matching in graphs. *Comput. Surveys*, 18(1):23–38, 1986.
- [25] Alan Gibbons. *Algorithmic graph theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [26] Andrew V. Goldberg and Robert Kennedy. An efficient cost scaling algorithm for the assignment problem. *Math. Programming*, 71(2, Ser. A):153–177, 1995.
- [27] Andrew V. Goldberg and Robert E. Tarjan. A new approach to the maximum-flow problem. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 35(4):921–940, 1988.
- [28] Ph. Hall. On the representation of subsets. *J. Lond. Mat. Sc.*, 10:26–30, 1935.
- [29] John E. Hopcroft and Richard M. Karp. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM J. Comput.*, 2:225–231, 1973.
- [30] D. E. Knuth. *The Stanford GraphBase: A Platform for Combinatorial Computing*. ACM Press, New York, 1993.
- [31] D. König. Graphen und matrizen. *Math. Lapok*, 38:116–119, 1931.
- [32] Bernhard Korte and Jens Vygen. *Combinatorial optimization*, volume 21 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2002. Theory and algorithms.
- [33] H. W. Kuhn. The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Res. Logist. Quart.*, 2:83–97, 1955.
- [34] H. W. Kuhn. Variants of the Hungarian method for assignment problems. *Naval Res. Logist. Quart.*, 3:253–258 (1957), 1956.
- [35] Eugene L. Lawler. *Combinatorial optimization: networks and matroids*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [36] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching theory*, volume 121 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Annals of Discrete Mathematics, 29.
- [37] Silvano Martello and Paolo Toth. Linear assignment problems. In *Surveys in combinatorial optimization (Rio de Janeiro, 1985)*, volume 132 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 259–282. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [38] R. Mattingly and N. Ritchey. Implementing an $o(\sqrt{nm})$ cardinality matching algorithm. In *Network Flows and Matching (Piscataway, NJ, 1991)*, volume 12 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 539–556. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [39] S. Micali and Vijay V. Vazirani. An $o(\sqrt{nm})$ algorithm for finding maximum matching in general graphs. In *21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 17–27. IEEE Comput. Soc. Press, 1980.
- [40] B. Moret and H. Shapiro. *Algorithms from P to NP: Design and Efficiency*. Benjamin-Cummings Publishing Co., Menlo Park, CA., 1991.
- [41] Christos H. Papadimitriou and Kenneth Steiglitz. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1998. Corrected reprint of the 1982 original.
- [42] A. Schrijver. Short proofs on the matching polyhedron. *J. Combin. Theory Ser. B*, 34(1):104–108, 1983.

- [43] Steven Skiena. *Implementing discrete mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1990. Combinatorics and graph theory with Mathematica, With programs by the author and Anil Bhansali.
- [44] M. Syslo, N. Deo, and J. Kowalik. *Discrete Optimization Algorithms with Pascal Programs*. Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1983.
- [45] Robert Endre Tarjan. *Data structures and network algorithms*, volume 44 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1983.
- [46] Douglas B. West. *Introduction to graph theory*. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [47] Laurence A. Wolsey. *Integer programming*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons Inc., New York, 1998. A Wiley-Interscience Publication.