Optimização Matemática

João Luis Soares*

6 de Maio de 2005

Resumo

A optimização (matemática), também conhecida por programação matemática, é uma área da matemática que tem tido crescimento explosivo apesar de possuir uma história relativamente recente. Basicamente, diz respeito a esta área a caracterização e procura de minimizantes, ou maximizantes, de uma certa função num certo conjunto, geralmente definido por equações e inequações algébricas. Neste artigo procuramos suscitar a curiosidade do leitor para o mundo da optimização. Aproveitamos para recordar um pouco da história da optimização e apresentamos, para quem não conhece, a sociedade portuguesa de investigação operacional que celebrou 25 anos de existência no ano de 2004.

1 Introdução

Imagine duas pessoas, o Alexandre e o João, jogando o jogo que passamos a descrever. O Alexandre escolhe um número i (entre 1 e m) e o João escolhe um número j (entre 1 e n) sem saber que número escolheu o Alexandre. Revelam, então, os números que escolheram e o Alexandre paga ao João um montante definido pela componente na posição (i, j) de uma matriz $m \times n$ fixada antecipadamente por aqueles dois amigos. Por exemplo, se essa matriz $A = [a_{ij}]$ fosse

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

então, se o Alexandre tivesse escolhido 2 e o João 1, o Alexandre deveria pagar ao João €1. Por outro lado, se o Alexandre tivesse escolhido 1 e o João 2 então o Alexandre deveria pagar ao João −€4, que é mesmo que receber €4.

Suponha que os intervenientes pretendem repetir o jogo várias vezes. Do seu ponto de vista, o João pretende definir uma estratégia que, no final, lhe dê um saldo positivo apreciável. Quando o João escolhe 1 ganha, pelo menos, €1 enquanto que quando escolhe 2 corre

*Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Email: `jsoares@mat.uc.pt`. Este texto está disponível *online* em `http://www.mat.uc.pt/~jsoares/`.

o risco de ganhar - €4. Depois de pensar um pouco, o João decide definir uma estratégia com base na Teoria das Probabilidades. Por exemplo, escolher 1 com probabilidade 3/4 e 2 com probabilidade 1/4. O valor esperado do seu ganho será $(3/4) \times (€4) + (1/4) \times (-€4) =$ €2 se o Alexandre escolhe 1 ou $(3/4) \times (€1) + (1/4) \times (€2) =$ €1.25 se o Alexandre escolhe 2. Com esta estratégia, diremos que o *ganho esperado* do João é €1.25 (o menor daqueles dois valores).

O que deve o João fazer em geral? Se ele opta por uma estratégia do tipo descrito, na qual ele escolhe j com probabilidade p_j então o seu *ganho esperado* é

$$\min_{i=1,2,\ldots,m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right\}, \tag{1}$$

e, por isso, o seu problema é o de identificar as probabilidades p_j que tornam máximo o valor desta função de $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Por outras palavras, o João deve resolver o seguinte problema de optimização

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{maximizar} & \displaystyle\min_{i=1,2,\ldots,m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right\} \\ \text{sujeito a} & \\ & \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j & = & 1, \\ p_j & \geq & 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \end{array} \right. \tag{2}$$

O problema (2) é um 'problema de optimização': pretende-se maximizar (ou minimizar) uma função de várias variáveis (os p_j's) que devem satisfazer um conjunto de restrições. O primeiro passo para resolver um problema de optimização é encontrar condições que qualquer solução procurada deve satisfazer — as **condições de optimalidade**.

A função $\sum_{j=1}^{n} p_j$ que aparece nas restrições do problema (2) é uma função linear de $p \equiv (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ porque o resultado de multiplicar todas as variáveis p_j por um mesmo escalar real e avaliar a função produz o mesmo resultado que multiplicar a função por esse escalar real.

A função 'objectivo' (1) é, claramente, não linear. Contudo, podemos fazer com que o problema (2) fique definido totalmente através de funções lineares recorrendo a um truque muito simples. Introduz-se uma nova variável, v por exemplo, e reformulamos o problema

(2) para

$$\begin{cases} \text{maximizar} & v \\ \text{sujeito a} & \\ & v \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & \sum_{j=1}^{n} p_j = 1, \\ & p_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{3}$$

Se conseguirmos resolver este problema então, no final, v deverá assumir o valor

$$v = \min_{i=1,2,\ldots,m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \right\}.$$

Por isso, o novo problema (3) é equivalente ao problema original (2).

Muitas das ideias transmitidas em optimização podem ser ilustradas de forma geométrica. Consideremos, por exemplo, o seguinte problema linear

$$\begin{cases} \text{maximizar} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 - x_2 \leq 1, \\ & -2x_1 - x_2 \leq -5, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7. \end{cases} \tag{4}$$

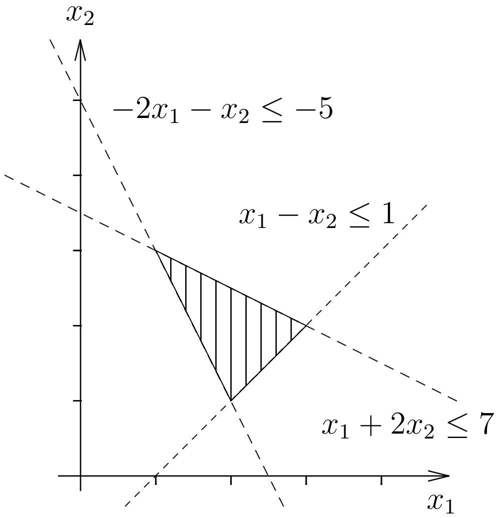
Podemos esboçar o conjunto dos pontos 'admissíveis' (x_1, x_2) - os pontos que satisfazem as três restrições - assim obtendo uma representação no plano da 'região admissível'. Veja-se a Figura 1(a).

Agora desenhamos diversas 'curvas de nível' da função objectivo - veja-se a Figura 1(b) - que, pelo facto de a função objectivo ser linear, são paralelas entre si. A solução óptima é o ponto da região admissível com valor na função objectivo mais elevado. Esse ponto que, neste caso, possui coordenadas $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$, pode ser encontrado fazendo deslizar paralelamente uma das curvas de nível no sentido crescente (o sentido do gradiente da função objectivo) até ao limiar da região admissível.

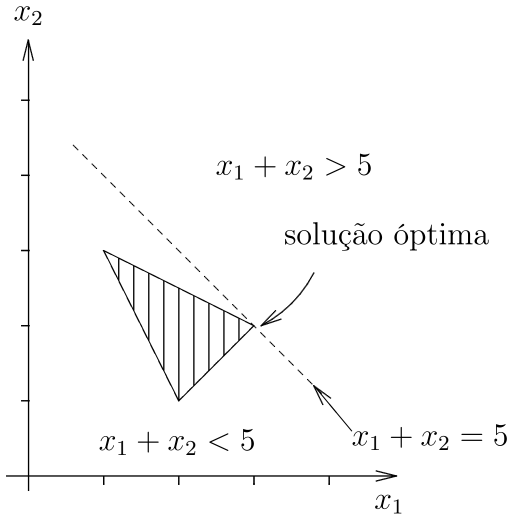
Este pequeno exemplo ilustra duas ideias que são fundamentais em optimização linear. A primeira ideia é a de que existe uma solução óptima que é um 'vértice' da região admissível, o que motivou o desenvolvimento de um método de resolução de problemas lineares denominado por *método simplex*.

A segunda ideia é a de que o *gradiente* da função objectivo é 'combinação linear não negativa' dos gradientes das restrições que estão activas (isto é, são satisfeitas como igualdade) na solução óptima. De facto,

$$(1, 1) = \frac{1}{3}(1, -1) + \frac{2}{3}(1, 2). \tag{5}$$



(a) Esboço da região admissível.



(b) Resolução geométrica.

Figura 1: O problema linear (4).

Esta observação motivou um desenvolvimento teórico poderoso, denominado *dualidade*, que permite o reconhecimento pontual de soluções óptimas e a sua extensão permite a análise de problemas não lineares.

Em vez de pensarmos no jogo do ponto de vista do João, podemos abordá-lo do ponto de vista do Alexandre. Se ele opta também por uma estratégia aleatória semelhante, na qual ele escolhe i com probabilidade q_i então, o seu *pagamento esperado* ao João é

$$\max_{j=1,2,\ldots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} q_i \right\}.$$

O problema do Alexandre é o de identificar as probabilidades q_i que tornam mínimo o seu pagamento esperado. Usando o mesmo truque anterior, introduzimos uma nova variável w, o problema do Alexandre fica o seguinte problema de optimização

$$\left\{ \begin{array}{llcll} \text{minimizar} & w & & & \\ \text{sujeito a} & & & & \\ & w & \geq & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} q_i & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_i & = & 1, & \\ & q_i & \geq & 0, & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right.$$

O valor óptimo deste problema é o *pagamento esperado mínimo* do Alexandre ao João, tal como (3) era o *ganho esperado máximo* do João ao Alexandre.

É notável, e de modo algum óbvio, que estes dois valores óptimos são iguais. Para qualquer que seja a matriz A, o pagamento esperado mínimo do Alexandre é igual ao ganho esperado máximo do João. Este facto é um caso especial do Teorema da Dualidade para optimização linear. Este teorema estabelece que os programas lineares existem aos pares (um é um problema de maximização e o outro é um problema de minimização) e cujos valores óptimos coincidem. O Teorema da Dualidade está, também, intimamente ligado à observação que fizemos antes: na solução óptima, a função objectivo é uma combinação linear não negativa das restrições que são satisfeitas como igualdade.

2 Um pouco de história

Tal como em muitos outros ramos da matemática, a optimização teve a sua origem nas aplicações. Embora, no seu caso, não é preciso recuar muitos anos para identificar as aplicações que impulsionaram o seu desenvolvimento. De facto, a história dos principais resultados de optimização é surpreendentemente curta.

É surpreendente porque a optimização aparenta ser uma questão tão natural num contexto real como num contexto abstracto, como é o da matemática. Ao longo de milhares de anos, matemáticos procuraram resolver sistemas de equações para ajustar observações astronómicas na Babilónia, para determinar preços no mercado de comida chinês, para calcular a posição e velocidade de objectos, *etc.* A resposta para este tipo de questões contribuiu para o crescimento de algumas áreas da matemática, como é o caso da álgebra, da teoria de números e da matemática numérica.

Mas, enquanto que a resolução de equações, nas mais variadas formas, permaneceu central para a matemática, a resolução de inequações parece ter suscitado um interesse meramente marginal. Pouca relevância foi dada à resolução de inequações e à procura de soluções "óptimas", pelo menos de uma maneira sistemática.

Existem alguns, poucos, casos isolados, como o de Fourier (1768-1830) que introduziu inequações em mecânica e que relacionou equilíbrio mecânico com um tipo de multiplicadores introduzido por Lagrange (1736-1813) para equações. Fourier também descreveu um processo de eliminação de variáveis para a resolução de inequações que funciona de um modo semelhante, mas mais complicado, ao bem conhecido método de eliminação de Gauss (1777-1855). Entre outros, também Farkas (1847-1930) aplicou inequações à mecânica, e Minkowski (1864-1909) também as usou no seu Geometria de Números.

Mas, só no final da década de 30 e início da década de 40 do século XX é que apareceram os resultados que se podem considerar hoje como inspiradores do franco desenvolvimento deste ramo da matemática. Pode até perceber-se porque é que esses desenvolvimentos ocorreram por essa altura. Aparentemente, a situação de guerra e competição que se vivia, às quais se associou um forte desenvolvimento industrial, criou condições para que se procurasse desempenhar tarefas melhor e mais rápido. A gestão dos recursos impunha que se utilizassem técnicas sofisticadas de optimização que acabaram por, de uma forma ou de outra, cair no âmbito da matemática.

Os cientistas que se destacaram nessa altura, com contribuições decisivas, foram George Dantzig, em 1947, nos E.U.A. com o seu método simplex para resolver problemas de transportes/distribuição no Pentágono e Leonid Kantorovich na extinta União Soviética com desenvolvimentos teóricos na resolução de problemas de equilíbrio económico.

No final da década de 50, este ramo da matemática — na altura, mais conhecido por programação matemática — era já uma disciplina sólida, começando a ser leccionada em universidades, quer em cursos de matemática, quer em cursos de ciências de gestão.

Do ponto de vista da matemática, este movimento suscitou o aparecimento de uma grande variedade de teoremas e até mesmo teorias. Conduziu a uma reapreciação de resultados antigos como o Lema de Farkas e o processo de eliminação de Fourier. Surgiram estudos mais aprofundados de conceitos como os de sistemas de inequações, poliedros e dualidade. Ao mesmo tempo, muitos outros resultados de teoria de convexidade foram desenvolvidos ou especializados de forma tal que a convexidade é, hoje, uma parte fundamental da optimização. Note-se, no entanto, que apesar desta área da matemática recorrer tanto a outros ramos, mais antigos, da matemática não deixa de ser surpreendente como é que a área atingiu um nível tão elevado de sofisticação em tão pouco tempo.

Do ponto de vista prático, o método simplex possibilitou a resolução de problemas de optimização de grande dimensão (*i.e.*, com um número elevado de variáveis e inequações) de diversos tipos e origens. As origens mais frequentes para esses problemas eram, então, as de planeamento de transportes, de planeamento de produção e distribuição, de afectação de recursos (matérias-primas, mão-de-obra ou disponibilidades temporais em máquinas) e de calendarização de tarefas.

Para além disso, a programação matemática estimulou o estudo de fenómenos económicos, como os de equilíbrio e os preços-sombra (ou valores marginais). E, claramente, também havia a interacção com as ciências de computação. Os computadores possibilitaram a execução do método simplex em problemas grandes. Por outro lado, o método simplex e outros métodos revelaram fragilidades numéricas na computação automática e suscitaram questões de complexidade computacional.

O crescimento da área conduziu a um inevitável aumento da especialização e da diversificação. Assim, observamos as especializações em: optimização não linear, mais ligada à matemática numérica, optimização discreta e optimização combinatória, algo distintas e mais ligadas à matemática finita, e (mais recentemente) a optimização estocástica, mais ligada às probabilidades. Observamos diversificações no sentido da matemática, no sentido da investigação operacional e no sentido das ciências de computação. Observamos também diversificações no sentido da teoria, no sentido da computação e no sentido da aplicação.

3 Contextualização com a investigação operacional

A investigação operacional é a ciência que envolve a análise de sistemas complexos, a construção de modelos que descrevam as relações entre as variáveis do sistema, e a sua resolução, que se traduz na procura das soluções mais eficientes. Os resultados fornecidos pelos modelos permitem compreender e prever o comportamento dos sistemas, e servem para apoiar os gestores no processo de tomada e execução de decisões. Por essa razão, é uma ciência que tem um papel fundamental na gestão racional de recursos usados em operações e processos e na melhoria da produtividade, tendo um campo privilegiado de aplicação em diversas áreas científicas, como a engenharia, a gestão, a economia, a matemática, e muitas outras.

Por isso, não é de espantar que o ensino e a investigação em optimização estejam tradicionalmente ligados à investigação operacional. A investigação operacional é, no nosso país, promovida pela sociedade científica *Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional* (APDIO). Em 2004 esta sociedade completou 25 anos sobre a sua fundação. Actualmente, a APDIO é uma sociedade activa e participada, com cerca de 550 associados, um número muito substancial quando comparado com o de outras associações que também integram a EURO (*The Association of European Operational Research Societies*) ou a IFORS (*International Federation of Operational Research Societies*). A qualidade do trabalho que tem vindo a ser desenvolvido pela comunidade portuguesa de Investigação Operacional é reconhecida a nível internacional. Ela traduz-se em elevados índices de publicação de artigos em revistas internacionais. Para esse reconhecimento muito tem contribuído o sucesso de organização de múltiplos eventos internacionais que têm decorrido no nosso País que, no ano de 2004, foram o Optimization'2004, em Lisboa, e o IO'2004, no Porto. O leitor poderá obter mais informações sobre a APDIO na *caixa*.

Termino o artigo com um desafio para o leitor. Resolva o problema do Alexandre de modo geométrico. Verifique que o seu pagamento esperado mínimo é igual ao ganho esperado máximo do João.