

Introdução
à
Matemática Financeira

Ano Lectivo de 2012/2013

Luís Nunes Vicente
Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Estes apontamentos foram escritos para as disciplinas Matemática Financeira (Aulas 1-17) e Optimização Financeira (Aulas 18-28) do Mestrado em Matemática do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Estes apontamentos foram organizados em formato aula-a-aula, tipo *lecture notes*. Cada aula está descrita de forma o mais auto-contida possível. Evitaram-se, ao máximo, as referências dentro de cada aula e entre aulas. No final de cada lição, colocam-se exercícios sobre a matéria dada, para resolução nas aulas ou em trabalho-para-casa.

Os vários tópicos do programa da disciplina foram organizados da seguinte forma:

- Aulas 1–4: modelação diferencial estocástica de um activo financeiro; breve introdução ao cálculo estocástico.
- Aulas 5–9: modelação do preço de opções europeias (equação e fórmula de Black-Scholes, neutralidade face ao risco, volatilidades implícitas, paridade *put-call*, *delta-hedging*).
- Aulas 10: método binomial.
- Aulas 11–15: modelação do preço de outras opções (opções sobre activos que pagam dividendos, opções sobre futuros, opções americanas, opções exóticas e opções dependentes da trajectória do activo).
- Aulas 16–17: atribuição de preços a obrigações e introdução aos modelos de taxas de juro.
- Aulas 18–19: atribuição de preços a activos financeiros (teorema fundamental) e detecção de arbitragem.
- Aulas 20–25: introdução à selecção de carteiras.
- Aulas 26–28: outros tópicos relevantes (índices de fundos, valor em risco, modelos de períodos múltiplos e ALM).
- Apêndices 1–3: introdução aos derivados financeiros (*forwards*, futuros e opções).

Os exemplos numéricos foram corridos em MATLAB® (<http://www.mathworks.com>). As correspondentes *m-files* estão disponíveis a partir do endereço <http://www.mat.uc.pt/~lnv/mf/matlab.html>.

A primeira aula e a parte sobre produtos estruturados da aula de opções exóticas resultaram da contribuição do Professor L. Daniel Abreu, a quem se agradece todas as discussões sobre os assuntos em causa.

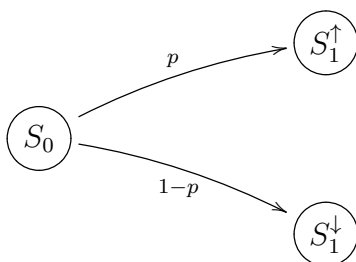
Coimbra, 24 de Janeiro de 2013, LNV.
(Data da última revisão: 08/05/2016.)

Aula 1: Evolução Binária de um Activo Financeiro e o Preço Justo de uma Opção

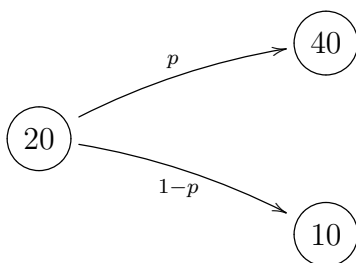
A evolução do preço de um activo financeiro é uma questão fulcral em Matemática Financeira. São exemplos de activos financeiros, as acções, as obrigações, os índices accionistas, as mercadorias e as divisas. O modelo binário é talvez o que mais simplesmente descreve a evolução do preço de um activo financeiro.

Modelo Binário

Consideremos um activo financeiro cujo preço no instante $t = 0$ vale S_0 . No modelo binário considera-se que no instante temporal seguinte, $T = 1$, o preço do activo ou sobe para S_1^\uparrow , com probabilidade p , ou desce para S_1^\downarrow , com probabilidade $1 - p$:



A título de exemplo, consideremos um activo financeiro cujo preço no instante $t = 0$ vale $S_0 = 20$. Sejam $S_1^\uparrow = 40$ e $S_1^\downarrow = 10$ os valores futuros possíveis para o preço do activo financeiro no seguinte instante temporal $T = 1$:



Uma questão que se coloca desde já é como determinar o valor da probabilidade p .

Sendo p uma medida de probabilidade, qualquer valor entre 0 e 1 é admissível. Contudo, estamos interessados num *jogo justo*, isto é, queremos que o preço do activo *hoje* seja igual à média dos preços de *amanhã*, descontado a uma taxa de juro r . A medida de probabilidade p assim calculada designa-se, em Matemática Financeira, por medida de probabilidade neutra face ao risco (no sentido de não exigir um prémio de risco, como veremos mais adiante no curso). Retomando o exemplo anterior temos, com $r = 0$,

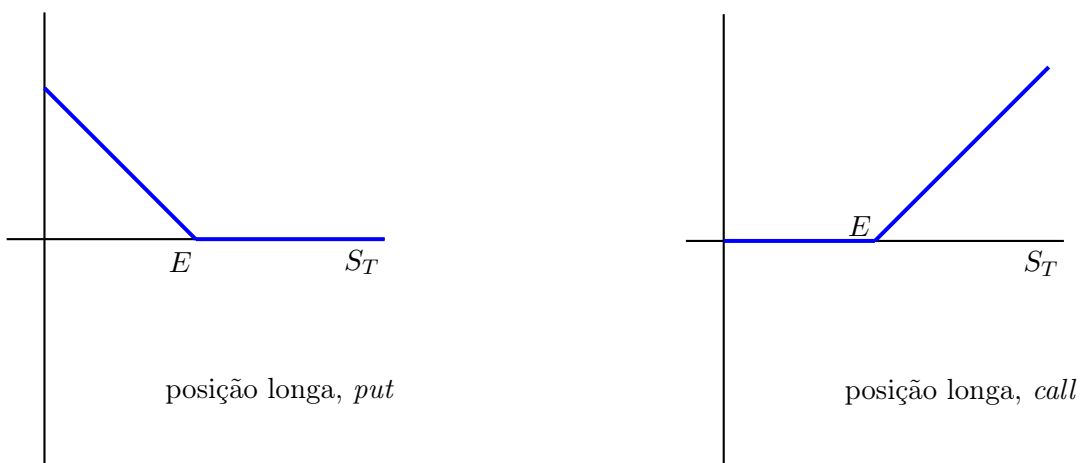
$$20 = (p)40 + (1 - p)10 \iff p = \frac{1}{3}$$

e, com $r > 0$,

$$20 = \frac{1}{1+r} [(p)40 + (1-p)10] \iff p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r.$$

Determinação do Preço Justo de uma Opção Europeia

As opções *calls* ou *puts* são contratos entre duas partes (comprador e vendedor) sobre um activo subjacente. A modelação do seu preço é outro assunto fundamental neste curso. O comprador de uma opção assume uma posição longa e tem um direito de opção na maturidade T do contrato. Na opção *put*, esse direito de opção é o de vender, ou não, o activo subjacente por um determinado preço de exercício E . Na opção *call*, esse direito de opção é o de comprar, ou não, o activo subjacente por um determinado preço de exercício E . O vendedor de uma opção assume uma posição curta e tem de se sujeitar ao exercício do direito de opção por parte do comprador. Na seguinte figura, encontram-se representados os perfis de ganhos de um comprador (posição longa) de uma opção *put* e de uma opção *call*, em função do valor do activo S_T na maturidade.

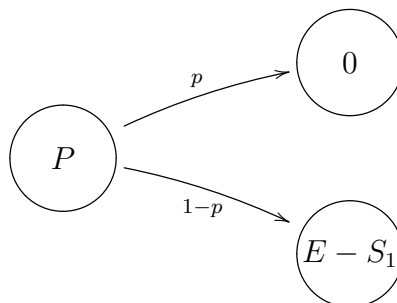


Os ganhos na maturidade são analiticamente descritos como $\max\{0, E - S_T\}$ (*puts*) e $\max\{S_T - E, 0\}$ (*calls*). Estas opções¹ são descritas em maior detalhe em apêndice.

Consideremos uma posição longa sobre uma opção *put* (raciocínio análogo pode ser feito para o caso de uma *call*), com preço P em $t = 0$, preço de exercício E e maturidade $T = 1$. É possível modelar o preço desta opção *put* através do modelo binário para o

¹Nesta aula e quase durante todo este curso, o estilo das opções consideradas será o europeu, querendo isto dizer que o direito de opção só pode ser exercido na maturidade.

activo subjacente (sendo S_1^\uparrow tal que $\max\{0, E - S_1^\uparrow\} = 0$ e $S_1^\downarrow = S_1$):

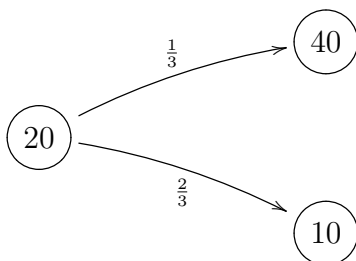


(Raciocínio análogo pode ser feito para o caso de uma *call*.) Desprezando o efeito da taxa de juro ($r = 0$) e supondo uma determinada medida de probabilidade, temos que

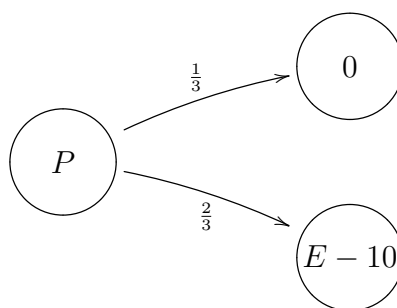
$$P = (p)0 + (1 - p)(E - S_1) = (1 - p)(E - S_1).$$

Note-se que P é crescente em E e decrescente em S (aqui $S = S_1$). Coloca-se novamente a questão de como calcular o valor da probabilidade p .

Retomando o exemplo anterior, em que a evolução do preço do activo era modelada recorrendo a uma medida de probabilidade neutra face ao risco



a evolução do preço de uma opção *put* sobre este activo seria então modelada por:



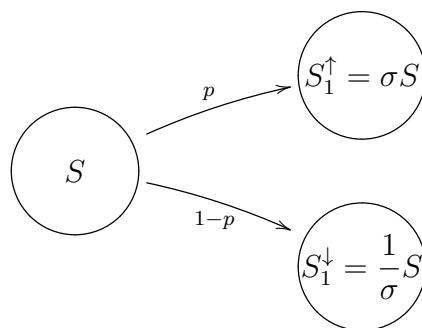
Logo, obteríamos então o preço justo

$$P = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}(E - 10) = \frac{2}{3}(E - 10).$$

Volatilidade

Estudemos, agora, o efeito da oscilação dos preços futuros do activo financeiro. Esta oscilação é medida pela volatilidade σ .

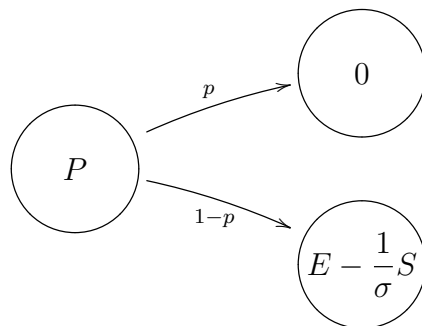
Consideremos um activo financeiro cujo preço no instante $t = 0$ vale S e no instante temporal seguinte $T = 1$ ou sobe para $S_1^\uparrow = \sigma S$, com probabilidade p , ou desce para $S_1^\downarrow = S/\sigma$, com probabilidade $1 - p$ (em que $\sigma > 1$):



Desprezando o efeito da taxa de juro ($r = 0$) e supondo uma medida de probabilidade neutra face ao risco, temos

$$S = (p)\sigma S + (1 - p)\frac{1}{\sigma}S \implies p = \frac{1}{1 + \sigma} \text{ e } \sigma = \frac{1 - p}{p}.$$

A evolução do preço de uma opção *put* sobre este activo é então modelada por:



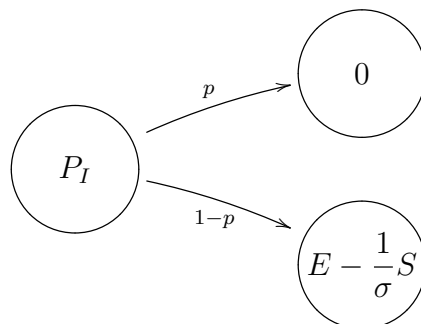
(Raciocínio análogo pode ser feito para o caso de uma *call*.) Logo,

$$P = (p)0 + (1 - p)\left(E - \frac{1}{\sigma}S\right).$$

Assim, P é crescente em σ , ou seja, o preço do contrato de uma opção *put* é função crescente da volatilidade.

Volatilidade Implícita

Vejamus a *volatilidade implícita* quando uma opção *put* (raciocínio análogo pode ser feito para o caso de uma *call*) é transaccionada ao preço P_I . Temos então:



Desprezando o efeito da taxa de juro ($r = 0$) e supondo uma medida de probabilidade neutra face ao risco, chegamos às equações

$$P_I = (p)0 + (1-p) \left(E - \frac{1}{\sigma} S \right) = (1-p) \left(E - \frac{1}{\sigma} S \right) \quad \text{e} \quad p = \frac{1}{1+\sigma},$$

cuja solução em p e σ é dada por

$$p = \frac{E - P_I}{E + S} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{S + P_I}{E - P_I}.$$

Este valor de σ é a volatilidade implícita (no preço P_I da opção).

Exercícios

1. Utilizando a notação da secção desta aula intitulada **Volatilidade**:

- Demonstre que o preço P de uma opção *put* é função crescente do preço de exercício E .
- Demonstre que o preço P de uma opção *put* é função decrescente do preço do activo subjacente S .
- Demonstre que o preço P de uma opção *put* é função crescente da volatilidade σ .
- Demonstre que o preço P de uma opção *call* é função decrescente do preço de exercício E .
- Demonstre que o preço P de uma opção *call* é função crescente do preço do activo subjacente S .
- Demonstre que o preço P de uma opção *call* é função crescente da volatilidade σ .

Aula 2: Modelação (Estocástica) do Valor de um Activo Financeiro

Encontramos frequentemente, na imprensa especializada, gráficos que reproduzem a evolução de activos financeiros ao longo de determinados períodos de tempo.

Têm especial interesse (sobretudo para conhecimento dos diversos mercados) os gráficos que reproduzem a evolução ao longo do tempo dos principais índices accionistas: PSI20 (Portugal), IBEX35 (Espanha), FTSE100 (Inglaterra), CAC40 (França), S&P500 (EUA), DJIA (EUA), Nikkei225 (Japão).

Nestes gráficos observam-se pequenas oscilações irregulares de elevada frequência. Estas oscilações parecem indicar não ser possível detectar um padrão de comportamento temporal, ou seja, parece que o que aconteceu no passado não influencia o comportamento futuro.

Assim, a hipótese básica para o desenvolvimento de um modelo para a evolução de um activo financeiro ao longo do tempo assenta na impossibilidade de conhecer ou prever o seu valor futuro com base em dados históricos. Desta hipótese não resulta, necessariamente, a conclusão de que a informação histórica sobre o valor de um activo não possa ser analisada à luz do conhecimento estatístico sobre séries temporais. Seria possível, por exemplo, analisar os saltos mais prováveis no comportamento temporal do activo financeiro, estimando a sua média e variância. Porém, estes aspectos serão ignorados na modelação de derivados financeiros.

O comportamento aleatório de um activo financeiro resulta, essencialmente, do facto dos mercados reagirem imediatamente a qualquer nova informação sobre o activo ou sobre o mercado em geral. O preço actual é o corolário de um desempenho histórico, que sobre ele foi reflectido, mas este preço vale apenas por si e não transporta consigo informação adicional.

Suponhamos que o valor de um activo financeiro no instante t é dado por $S(t)$. Estamos interessados em olhar para o que se passa num instante temporal seguinte, que designaremos por $t + \Delta t$, e estudar a forma como $S(t + \Delta t)$ se relaciona com $S(t)$. Esta relação deve ser estudada de forma relativa, considerando o quociente

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)}.$$

Por exemplo, uma variação de um euro no valor de uma acção que vale cinco euros é mais significativa do que uma variação de um euro numa acção cotada a vinte euros.

Analisaremos este quociente de forma determinística, para, depois, considerar o caso estocástico. No caso determinístico, faremos Δt tender para zero sem grandes constrangimentos matemáticos. O limite $\Delta t \rightarrow 0$ no caso estocástico levanta questões matemáticas delicadas, do âmbito da análise ou cálculo estocástico. Nesta disciplina, o cálculo estocástico é estudado sem a profundidade porventura desejável. O nosso objectivo passa, antes, por chegar rapidamente ao modelo (determinístico) de Black-Scholes, recorrendo, sem demonstração, a resultados da análise estocástica.

O Modelo Determinístico

Se o preço do activo se comportasse, durante o período de tempo em causa, como um activo financeiro sem risco, então o retorno ou incremento relativo seria igual a

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t,$$

em que μ é um parâmetro a variar entre 0 e 1 (que, por agora, pode ser interpretado como uma taxa de juro). Neste modelo,

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \mu S(t).$$

Tomando o limite quando Δt tende para zero no membro do lado esquerdo desta equação e supondo que $S(t)$ representa aí uma função diferenciável, resultaria na equação diferencial ordinária (linear e de primeira ordem)

$$\frac{dS}{dt}(t) = \mu S(t).$$

(Deu-se aqui um abuso de notação. A função $S(t)$, resolução desta equação diferencial, já não é a mesma quantidade $S(t)$ das primeiras equações da aula.) Neste caso, em que estamos a supor que μ não depende do tempo t e do valor do activo $S(t)$, a solução do problema de valor inicial definido por esta equação diferencial ordinária e pela condição inicial $S(t_0) = S_0$ é dada por

$$S(t) = S_0 e^{\mu(t-t_0)}.$$

Note-se que o problema de valor inicial

$$\frac{dS}{dt}(t) = \mu S(t) \quad \text{e} \quad S(t_0) = S_0$$

pode ser escrito, utilizando o teorema fundamental do cálculo integral, na forma de uma equação integral

$$S(t) - S_0 = \int_{t_0}^t \mu S(u) du.$$

Deixamos uma nova chamada de atenção para a utilização de uma notação que pode ser enganadora. Veja-se que a solução $S(t)$ deste problema de valor inicial não satisfaz a fórmula $[S(t + \Delta t) - S(t)]/\Delta t = \mu S(t)$. Esta fórmula corresponde, aliás, à aproximação gerada pelo método de Euler explícito ou progressivo para este problema de valor inicial.

O Modelo Estocástico

O modelo, para ser realístico, deve ter em consideração um comportamento aleatório no retorno, escrito de forma relativa como $[S(t + \Delta t) - S(t)]/S(t)$. Só assim é possível tomar

em consideração a influência de factores externos e inesperados no comportamento do preço de um activo financeiro. O modelo estocástico assenta no pressuposto de que

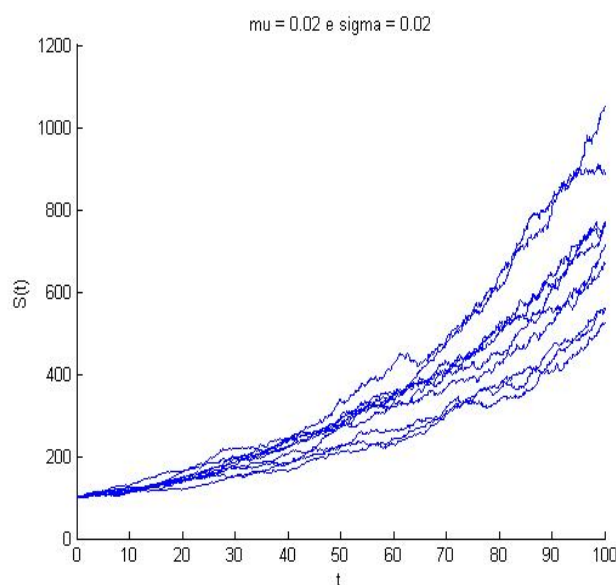
$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu\Delta t + \sigma\Delta X(t)$$

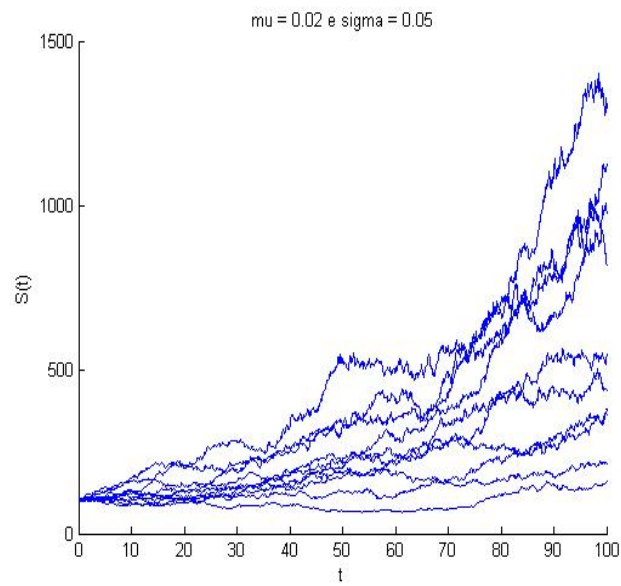
em que $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$.

O número σ é conhecido por volatilidade e está associado ao desvio padrão do retorno, como veremos mais à frente. Para já suporemos que a volatilidade é constante (ou seja, não dependente de t ou de $S(t)$). A aleatoriedade foi introduzida no modelo através do processo estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$. Quando $\sigma = 0$, o modelo reduz-se ao caso determinístico anterior, em que o futuro não incorpora incerteza. A volatilidade é medida entre 0 e 1, sendo frequentemente apresentada em valores percentuais. As acções e os índices accionistas costumam apresentar volatilidades mais elevadas, entre os 5% e os 40%. As acções de empresas de alta tecnologia são das mais voláteis. As obrigações, por sua vez, têm baixa volatilidade.

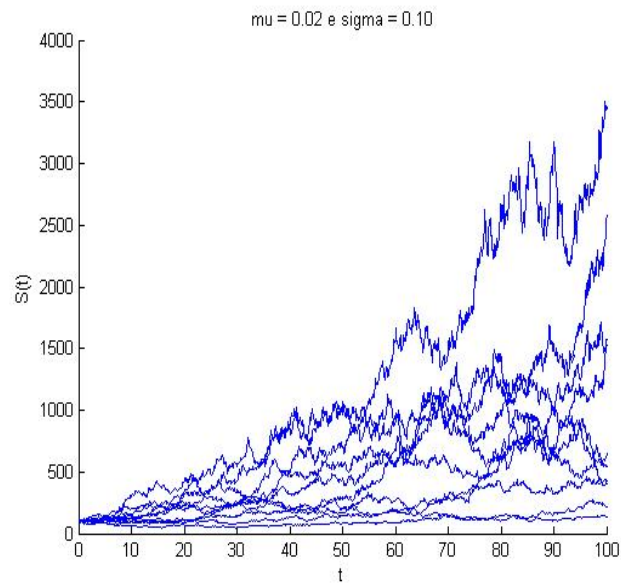
O parâmetro μ está associado ao retorno (esperado) do activo financeiro. Este parâmetro é conhecido por deriva ou flutuação (*drift*) e é, por enquanto, também considerado constante.

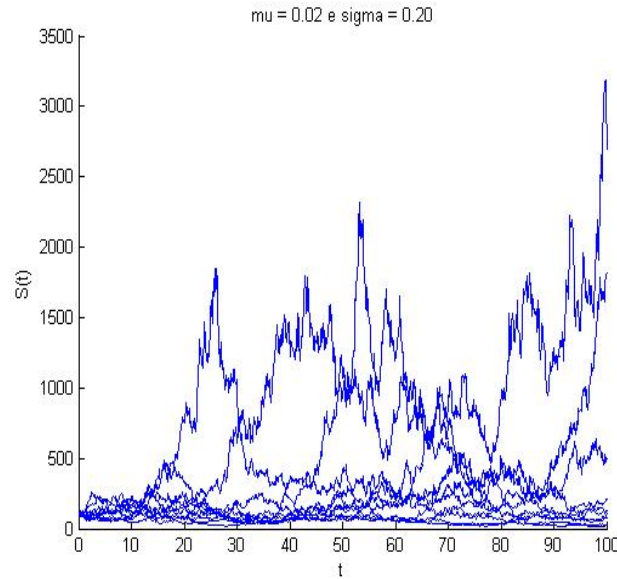
Geraram-se, em MATLAB, trajectórias discretas de $S(t)$ através desta fórmula, para valores de t entre 0 e 100, com $S(0) = 100$. O valor escolhido para Δt foi de 0.1. Os valores gerados para $\Delta X(t)$ seguiram a lei normal descrita mais à frente. Em todos os casos tomou-se $\mu = 0.02$. Os primeiros dois gráficos correspondem aos casos $\sigma = 0.02$ e $\sigma = 0.05$. Como a volatilidade é relativamente pequena nota-se a tendência de subida associada à deriva.





Os dois gráficos seguintes correspondem aos casos $\sigma = 0.1$ e $\sigma = 0.2$. O efeito do aumento da volatilidade é bem visível.





A escolha do processo estocástico deve procurar reflectir o que se observa, empiricamente, no comportamento temporal do valor de um activo. São várias as características que os incrementos $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ devem satisfazer. Em primeiro lugar, a sua média deve ser nula. Depois, é natural impor que os incrementos sejam independentes, ou seja, que as variáveis aleatórias

$$X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_k) - X(t_{k-1})$$

(com $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}$) sejam independentes para todos os valores $0 \leq t_1 < \dots < t_k$. Não é difícil argumentar, também, que os incrementos sejam estacionários, ou seja, que as distribuições dos processos estocásticos

$$\{X(t_1 + h) - X(t_1)\}_{h \geq 0} \quad \text{e} \quad \{X(t_2 + h) - X(t_2)\}_{h \geq 0}$$

sejam as mesmas, quaisquer que sejam os valores dos reais não-negativos t_1 e t_2 . Finalmente, é mais do que razoável obrigar as trajectórias do processo estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ a serem contínuas.

Acontece que o único processo estocástico a verificar estes quatro requisitos é o movimento Browniano. A definição rigorosa do movimento Browniano é omitida. Sabe-se que os incrementos de um movimento Browniano seguem uma distribuição normal. Mais concretamente,

$$X(t + \Delta t) - X(t) \sim N(0, \sqrt{\Delta t}).$$

Assim sendo,

$$E(\Delta X(t)) = 0 \quad \text{e} \quad V(\Delta X(t)) = \Delta t.$$

Além disso, se $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ então, como neste caso $\Delta t = t$ e $X(t + \Delta t) - X(0) = X(t) - x_0$,

$$X(t) \sim N(x_0, \sqrt{t})$$

admite a função densidade² dada por

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2t}(x - x_0)^2\right).$$

Vamos começar por ver algumas das propriedades dos incrementos $\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t)$ assim definidos, no caso em que $S(t)$ não é uma variável aleatória. Estes incrementos obedecem, por definição, a

$$\Delta S(t) = \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta X(t).$$

Como $E(\Delta X(t)) = 0$, a média de $\Delta S(t)$ é dada por

$$E(\Delta S(t)) = E(\mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta X(t)) = \mu S(t)\Delta t.$$

Podemos, assim, afirmar que, em média, o valor de $S(t + \Delta t)$ é superior ao de $S(t)$ em $\mu S(t)\Delta t$. Além disso, $E(\Delta S(t))/S(t) = \mu\Delta t$, o que nos indica que o parâmetro μ é proporcional à esperança do retorno (ou incremento relativo) $\Delta S(t)/S(t) = (S(t + \Delta t) - S(t))/S(t)$.

A variância de $\Delta S(t)$ pode também ser calculada facilmente

$$\begin{aligned} V(\Delta S(t)) &= E(\Delta S(t)^2) - E(\Delta S(t))^2 \\ &= E([\mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta X(t)]^2) - [\mu S(t)\Delta t]^2 \\ &= \sigma^2 S(t)^2 \Delta t. \end{aligned}$$

O desvio padrão de $\Delta S(t)$ é igual a $\sigma S(t)\sqrt{\Delta t}$. Neste modelo, a volatilidade é proporcional ao desvio padrão do retorno (ou incremento relativo) $\Delta S(t)/S(t) = (S(t + \Delta t) - S(t))/S(t)$.

²Recorde-se que a função densidade de uma distribuição normal com média $\bar{\mu}$ e desvio padrão $\bar{\sigma}$ é dada por $g(x) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(x - \bar{\mu})^2\right)$.

Aula 3: Modelação (Diferencial Estocástica) do Valor de um Activo Financeiro

Vimos que a variação incremental no valor de um activo financeiro, baseia-se, empiricamente, na fórmula

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta X(t).$$

A partir desta fórmula é possível gerar diferentes trajectórias discretas para uma sucessão de valores temporais.

No entanto, é preferível considerar um modelo em tempo contínuo, tomando o limite quando Δt tende para zero. A equação diferencial (estocástica) resultante possibilitar-nos-á, entre outras coisas, modelar o preço de derivados que tenham por base o respectivo activo financeiro.

Considere-se uma partição do intervalo $[t_0, t]$ representada por

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & & | & | \\ \hline t_0 & t_1 & t_2 & & t_{k-1} & t_k = t \end{array}$$

Ao somar, membro a membro, a fórmula

$$S(t_j + \Delta t_j) = S(t_j) + \mu S(t_j)\Delta t_j + \sigma S(t_j)\Delta X(t_j),$$

para $j = 0, \dots, k - 1$ e $t = t_k$, obtém-se

$$S(t) = S(t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu S(t_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma S(t_j)\Delta X(t_j).$$

Interessa-nos considerar o caso em que a condição inicial é determinística:

$$S(t_0) = s_0 \in \mathbb{R}.$$

O valor inicial t_0 é qualquer em $[0, +\infty)$.

A passagem ao limite quando Δt_j tende para zero não levantaria problemas de maior no caso determinístico, onde a técnica de integração seria, por exemplo, a da integração à Riemann. O caso estocástico é, porém, muito mais delicado. O seu tratamento é objecto de estudo da análise estocástica. Tal estudo está fora dos objectivos de um curso básico de Matemática Financeira.

O limite quando Δt_j tende para zero pode ser representado por

$$S_t = s_0 + \int_{t_0}^t \mu S_t dt + \int_{t_0}^t \sigma S_t dX_t \quad (1)$$

com

$$S_{t_0} = s_0 \in \mathbb{R}.$$

O primeiro integral resulta na variável aleatória $(\int_{t_0}^t \mu S_t dt)$ que, a cada w no seu espaço de estados, faz corresponder

$$\int_{t_0}^t \mu S_t dt(w) = \lim_{a_k \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \mu S(t_j)(w) \Delta t_j$$

em que $a_k = \max_{0 \leq j \leq k-1} \Delta t_j$. Este integral pode ser interpretado à Riemann, se suposermos que $S(t)(w)$ é uma função limitada entre t_0 e t . O integral entre aspas é um integral estocástico, conhecido por integral de Itô, cuja definição é omitida. O processo estocástico resultante $\{S_t\}_{t \geq t_0}$ é um processo estocástico de Itô.

A equação integral estocástica (1) que define o processo de Itô $\{S_t\}_{t \geq t_0}$ é escrita na forma diferencial

$$dS_t = (\mu S_t)dt + (\sigma S_t)dX_t.$$

O cálculo estocástico é, por definição, integral. Esta forma diferencial confere uma notação mais simples e permite estabelecer manipulações algébricas que facilitam diversas operações. Um dos instrumentos mais poderosos do cálculo estocástico (e que será determinante para a modelação do preço de derivados) é a Fórmula de Itô (um resultado também conhecido como Lema de Itô).

Teorema 1 *Seja $\{S_t\}_{t \geq t_0}$ o processo de Itô acima “definido”. Seja $f(t, S)$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$.*

Nestas condições, o processo estocástico $\{R_t\}_{t \geq t_0}$ definido por $R_t = f(t, S_t)$ é um processo de Itô e a equação integral estocástica a ele associada pode ser escrita, em versão diferencial, na forma

$$dR_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t, S_t)(dS_t)^2, \quad (2)$$

em que o termo $(dS_t)^2 = dS_t dS_t$ é calculado através das regras algébricas:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dX_t = dX_t \cdot dt = 0 \quad e \quad dX_t \cdot dX_t = dt. \quad (3)$$

A Fórmula de Itô (2) generaliza a Fórmula de Taylor e o Teorema Fundamental do Cálculo Integral ao caso estocástico. De facto, no caso real $g(t) = f(t, h(t))$, vem que

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, h(t)) \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial h}(t, h(t)) \frac{dh}{dt}(t),$$

que, na forma integral (ou seja, usando o teorema fundamental do cálculo integral como na aula anterior), se pode escrever como

$$dg = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial h} dh.$$

Vê-se, assim, que o termo em $(dS_t)^2$ está a mais em (2) quando comparado com o caso real.

Tentaremos, mais à frente, motivar o aparecimento das regras algébricas (3). Neste momento, vamos utilizá-las para desenvolver, em maior detalhe, a equação diferencial estocástica da Fórmula de Itô. Veja-se que

$$\begin{aligned}(dS_t)^2 &= [(\mu S_t)dt + (\sigma S_t)dX_t]^2 \\ &= \sigma^2 S_t^2 (dX_t)^2 \\ &= \sigma^2 S_t^2 dt.\end{aligned}$$

Logo,

$$dR_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t, S_t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t) dS_t,$$

ou, equivalentemente,

$$dR_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t, S_t) \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S}(t, S_t) dX_t.$$

Uma escolha possível para a função f é $f(t, S) = \log(S)$. Esta função não depende da variável temporal t e está definida em $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$. É possível aplicar a Fórmula de Itô à função $f(t, S) = \log(S)$, cujas derivadas parciais com interesse concreto são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, S) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial S}(t, S) = \frac{1}{S} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(t, S) = -\frac{1}{S^2}.$$

Feitas as contas, verificamos que o processo estocástico de Itô $\{R_t\}_{t \geq 0}$, definido por $R_t = \log(S_t)$, está associado à equação integral estocástica

$$dR_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dX_t.$$

Dada uma condição inicial determinística $R_{t_0} = r_0 \in \mathbb{R}$, esta equação integral estocástica pode ser facilmente resolvida.

Teorema 2 *O processo estocástico de Itô que resolve o problema de valor inicial estocástico*

$$dR_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dX_t \quad \text{com} \quad R_{t_0} = r_0 \in \mathbb{R}$$

é dado por

$$R_t = r_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma X_t.$$

(Considerou-se $X_{t_0} = x_0 = 0$.)

De facto, veja-se que o problema de valor inicial estocástico pode ser reescrito usando antes a notação

$$R_t = r_0 + \int_{t_0}^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \text{“} \int_{t_0}^t \sigma dX_t \text{”}$$

e que

$$\sigma dX_t = \text{“} \int_{t_0}^t \sigma dX_t \text{”} = \lim_{a_k \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma \Delta X(t_j) = \sigma \lim_{a_k \rightarrow 0} X_t = \sigma X_t.$$

De acordo com o que foi visto na aula anterior para o movimento Browniano $\{X_t\}_{t \geq 0}$ com $x_0 = 0$, concluímos que $R_t = \log(S_t)$, para $t_0 = 0$, segue uma distribuição normal

$$\log(S_t) = R_t \sim N(r_0 + (\mu - \sigma^2/2)t, \sigma\sqrt{t}).$$

A função densidade de $\log(S_t)$ é dada por

$$g_t(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 t} [r - (r_0 + (\mu - \sigma^2/2)t)]^2\right).$$

Como R_t segue uma distribuição normal, conclui-se que $S_t = e^{R_t}$ segue, por definição, uma *distribuição lognormal*. A função densidade³ de S_t é dada por

$$h_t(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma s \sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 t} [\log(s/s_0) - (\mu - \sigma^2/2)t]^2\right) & s > 0, \\ 0 & s \leq 0, \end{cases}$$

com $r_0 = \log(s_0) \iff s_0 = e^{r_0}$. A demonstração deste facto é deixada como exercício. Tem-se que

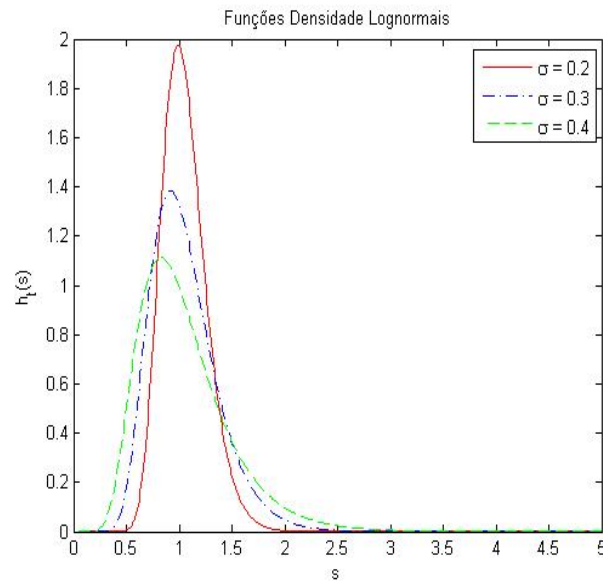
$$E(S_t) = e^{m + \frac{1}{2}p^2},$$

em que $p = \sigma\sqrt{t}$ e $m = \log(s_0) + (\mu - \sigma^2/2)t$.

O processo estocástico $\{S_t\}_{t \geq 0}$ é designado, em vários textos, por movimento Browniano geométrico. É também usual designar o movimento Browniano por processo de Wiener.

Na figura seguinte, exibem-se os gráficos de três funções densidade lognormais $h_t(s)$, para o caso em que $t = 1$, $S_0 = 1$ e $\mu = 0.05$. As três curvas correspondem a três valores para a volatilidade.

³Recorde-se que a função densidade de uma distribuição lognormal, com parâmetros m e p , é dada por $h(s) = \frac{1}{sp\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(s)-m}{p}\right)^2\right)$ se $s > 0$ e 0 caso contrário.



Terminamos uma observação final. É possível considerar equações integrais estocásticas da forma

$$S_t = s_0 + \int_{t_0}^t u(t, S_t) dt + \int_{t_0}^t w(t, S_t) dX_t$$

ou, no formato diferencial,

$$dS_t = u(t, S_t) dt + w(t, S_t) dX_t.$$

Esta equação diferencial estocástica admite uma única solução se as funções u e w forem contínuas à Lipschitz relativamente ao seu segundo argumento (ou seja, se existir um $K > 0$ tal que $|u(t, x) - u(t, y)| \leq K|x - y|$ e $|w(t, x) - w(t, y)| \leq K|x - y|$ para todos os x, y e t) e se $|u(t, x)| + |w(t, x)| \leq K(1 + |x|)$ para todos os x e t .

O caso que estudámos correspondeu a $u(t, S_t) = \mu S_t$ e $w(t, S_t) = \sigma S_t$ (que verifica, trivialmente, as condições suficientes acima descritas).

Exercícios

1. Aplique a Fórmula de Itô quando $f(t, S) = S$. Conclua que $dR_t = dS_t$ e diga por que motivo teria de obter este resultado.
2. Prove que a função densidade de S_t é dada por

$$h_t(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma s \sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 t} [\log(s/s_0) - (\mu - \sigma^2/2)t]^2\right) & s > 0, \\ 0 & s \leq 0. \end{cases}$$

3. Trace histogramas para os valores de S_T e de $\log(S_T)$ recorrendo à `m-file` da aula sobre a modelação estocástica do valor de um activo financeiro (`caminho_aleatorio`) e utilizando, obrigatoriamente, o comando

$$\text{hist}(v, 100)$$

em que v representa um vector com 10000 componentes. O que observa em ambos os casos está de acordo com o que se sabe sobre a distribuição de um activo financeiro?

4. Calcule $E(S_t)$.
5. Dadas $n + 1$ observações consecutivas S_0, S_1, \dots, S_n (por exemplo diárias) do valor de um activo financeiro, os seus retornos podem ser calculados através de

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Desta forma, é possível estimar a média e o desvio padrão destes retornos por

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \quad \text{e} \quad \bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}.$$

- (a) Recorrendo à `m-file` da aula sobre a modelação estocástica do valor de um activo financeiro (`caminho_aleatorio`), calcule os valores de \bar{u} e de \bar{s} para um caminho aleatório gerado pelo código.
- (b) A partir do valor de \bar{s} , calcule uma aproximação para a volatilidade σ .

Aula 4: Alguma Motivação da Integração Estocástica

Um dos objectivos desta aula é dar um significado matemático às regras algébricas

$$dt.dt = dt.dX_t = dX_t.dt = 0 \quad \text{e} \quad dX_t.dX_t = dt.$$

Estas regras foram introduzidas no contexto do Lema de Itô e devem ser aplicadas apenas nesse mesmo contexto. A sua utilização ou interpretação fora do âmbito do Lema de Itô pode ser incorrecta e desprovida de qualquer sentido.

Com esta aula procura-se, também, dar alguma da intuição da integração estocástica. Mostra-se que uma abordagem ingénua à definição de integral estocástico não funciona com poder ser esperado. Deste insucesso nasce a noção de integral de Itô, cuja definição não é necessária para a utilização do Lema de Itô no âmbito desta disciplina e que, por este motivo, continuará omissa.

Começamos por recordar alguns factos básicos da integração à Riemann. Sabe-se que

$$\int_{t_0}^t dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a_k \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j = t - t_0.$$

Recorda-se que $t = t_k$. Pode-se fazer $t_0 = 0$, como na aula anterior. Este limite é tomado no sentido ϵ - δ , ou seja, para todo o $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se a amplitude da partição

$$a_k = \max_{0 \leq j \leq k-1} \Delta t_j$$

for inferior a δ , então a soma de Riemann $\sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j$ dista de $t - t_0$, em valor absoluto, menos de ϵ . Em analogia com o que se passa com o processo estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ (movimento Browniano), dizemos, em função deste limite, que a ‘primeira variação’ é limitada. Este simples facto está implícito em toda a integração à Riemann.

É simples verificar que a ‘segunda variação’ na integração à Riemann é nula. De facto, tem-se que

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j^2 \leq a_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j,$$

o que implica, no sentido ϵ - δ , que

$$\lim_{a_k \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j^2 = 0.$$

Aliás, a regra algébrica $dt.dt = (dt)^2 = 0$ traduz, precisamente, esta ocorrência.

O significado matemático da regra algébrica $(dX_t)^2 = dX_t.dX_t = dt$ é mais sofisticado. Repare-se que $\Delta X(t_j)$ é uma variável aleatória (Gaussiana, de média 0 e variância Δt_j).

Em primeiro lugar apresentamos um argumento, meramente heurístico, para motivar o aparecimento desta expressão. Sabe-se que

$$E(\Delta X(t)) = 0 \quad \text{e} \quad V(\Delta X(t)) = \Delta t.$$

Logo,

$$E(\Delta X(t)^2) = \Delta t.$$

Com base nas propriedades das distribuições normais, mostra-se que

$$V(\Delta X(t)^2) = 2(\Delta t)^2.$$

Observa-se que a média do incremento quadrado, $\Delta X(t)^2$, é igual a Δt . Além disso, a variância deste incremento é igual a $2(\Delta t)^2$ e, portanto, desprezável quando comparada com a sua média. Para Δt pequeno, $\Delta X(t)^2$ aproxima-se de zero, mas a sua variância tende para zero mais rapidamente do que a sua média, o que nos leva a crer que o incremento quadrado $\Delta X(t)^2$ tende a ficar determinístico.

No que se segue e para simplificar a notação, toma-se $\Delta X_j = \Delta X(t_j)$. Estamos interessados em analisar um limite da forma

$$\lim_{a_k \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta X_j^2.$$

O limite quando a amplitude da partição tende para zero é tomado no sentido ϵ - δ mencionado anteriormente. Falta, porém, dar uma estrutura à forma de analisar a convergência das variáveis aleatórias. Aqui, vamos recorrer à convergência em L^2 ou em média quadrada. Desta forma, é possível provar que a segunda variação do movimento Browniano é limitada e, mais precisamente, que converge para uma quantidade determinística $(t - t_0)$.

Teorema 1 *Seja $\{X_t\}_{t \geq 0}$ o movimento Browniano (processo de Wiener). Então*

$$\lim_{a_k \rightarrow 0} E \left(\left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta X_j^2 \right) - (t - t_0) \right]^2 \right) = 0.$$

Demonstração. Em primeiro lugar é fácil constatar que

$$E \left(\left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta X_j^2 \right) - (t - t_0) \right]^2 \right) = E \left(\left[\sum_{j=0}^{k-1} (\Delta X_j^2 - \Delta t_j) \right]^2 \right).$$

Pela propriedade de independência dos incrementos do movimento Browniano e pelo facto de $E(\Delta X_j^2) = \Delta t_j$, vem que

$$E \left(\left[\sum_{j=0}^{k-1} (\Delta X_j^2 - \Delta t_j) \right]^2 \right) = \sum_{j=0}^{k-1} E \left([\Delta X_j^2 - \Delta t_j]^2 \right).$$

Feitas as contas (note-se que $E(\Delta X_j^4) = 3\Delta t_j^2$), o segundo membro desta igualdade reduz-se a

$$2 \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_j^2.$$

A demonstração é concluída, usando o mesmo argumento do caso $(dt)^2 = 0$. ■

Diz-se, assim, que a segunda variação de $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é limitada (e convergente para algo diferente de zero, $t - t_0$). Este facto contrasta com a ‘segunda variação na integração à Riemann’ ser nula.

É possível analisar a primeira variação do processo $\{X_t\}_{t \geq 0}$ através da desigualdade

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Delta X_j^2 \leq A_k \sum_{j=0}^{k-1} |\Delta X_j|,$$

em que

$$A_k = \max_{0 \leq j \leq k-1} |\Delta X_j|.$$

Prova-se que A_k converge para zero (em média quadrada) quando a amplitude da partição tende para zero. Assim sendo, tem-se, obrigatoriamente, que

$$\sum_{j=0}^{k-1} |\Delta X_j|$$

não pode ser limitada (em média quadrada) quando a amplitude da partição tende para zero. Conclui-se que a primeira variação do processo $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é ilimitada. Tal facto impede a tomada de limite em

$$\sum_{j=0}^{k-1} \sigma S(t_j) \Delta X_j.$$

O integral de Itô segue, forçosamente, uma construção diferente. Os conceitos desta aula são relevantes, porém, na integração estocástica e, em especial, na demonstração do Lema de Itô.

Para terminar a aula, vamos ver uma implicação da regra $(dX_t)^2 = dt$ em integração estocástica. Para o efeito, considere-se a Fórmula de Itô para o caso em que $dS_t = \mu dt + \sigma dX_t$, ou seja em que $S_t - s_0 = \int_{t_0}^t \mu dt + \int_{t_0}^t \sigma dX_t$. No contexto da aula anterior, esta equação resultaria de se partir da relação

$$S(t_j + \Delta t_j) = S(t_j) + \mu \Delta t_j + \sigma \Delta X(t_j),$$

em vez de $S(t_j + \Delta t_j) = S(t_j) + \mu S(t_j) \Delta t_j + \sigma S(t_j) \Delta X(t_j)$.

Tome-se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Seja $f(t, S) = S^2/2$. A aplicação do Lema de Itô origina a equação diferencial estocástica

$$dR_t = 0dt + S_t dS_t + \frac{1}{2}(dS_t)^2.$$

Como $dS_t = dX_t$ e $(dX_t)^2 = dt$, vem que

$$R_t - r_0 = S_t dX_t + \frac{1}{2}dt.$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}S_t^2 - \frac{1}{2}s_0^2 = \int_{t_0}^t S_t dX_t + \frac{1}{2}(t - t_0).$$

Ao comparar esta fórmula com a do Teorema Fundamental do Cálculo Integral para $\int_a^b x dx$, verifica-se que o termo $(t - t_0)/2$ constitui, aparentemente, uma surpresa na integração estocástica. O aparecimento deste termo está intimamente relacionado com o facto da aleatoriedade de $\Delta X(t)$ não se anular no processo de tomada de limite, ou se quisermos, com o facto da segunda variação do movimento Browniano $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ser limitada sem se anular. A contribuição do termo $(t - t_0)/2$ resultou, claramente, da aplicação da regra $(dX_t)^2 = dt$.

Este fenómeno não se observa no integral de Itô $\int_{t_0}^t dX_t$, que, como vimos na aula anterior, é igual a $X_t - X_{t_0}$ (e sob as hipóteses dessa aula, igual a $X_t - x_0 = X_t$).

Exercícios

1. Mostre que $E(\Delta X(t)^2) = \Delta t$, $E(\Delta X(t)^4) = 3\Delta t^2$ e $V(\Delta X(t)^2) = 2(\Delta t)^2$.
2. Prove que $A_k = \max_{0 \leq j \leq k-1} |\Delta X_j|$ converge para zero, em média quadrada, quando a amplitude da partição tende para zero.

Aula 5: Hipóteses do Modelo de Black-Scholes: Ausência de Arbitragem e Venda a Descoberto

A atribuição de preço a opções europeias (*calls* e *puts*) é um dos assuntos centrais deste curso. O funcionamento básico destes contratos foi brevemente explicado na primeira aula. Uma descrição mais pormenorizada é remetida para apêndice, mas não é necessária para a elaboração matemática das próximas aulas.

A ausência de arbitragem é uma das hipóteses fundamentais sobre a qual se constroi a teoria de Black-Scholes para a atribuição de preço a opções europeias (*calls* e *puts*). A ausência de arbitragem pode ser vista com uma lei de conservação, que motiva um princípio de equilíbrio a partir do qual se extrai uma equação diferencial.

Mais à frente neste curso introduziremos arbitragem de um modo formal ou axiomático. Veremos que existem dois tipos de arbitragem (tipo A e B). Aqui tornaremos a apresentação mais simples. O leitor verá que falaremos apenas de arbitragem do tipo B.

Vejamus então uma situação em que existem dois instantes temporais, $t = 0$ e $t = T$ e duas instituições de crédito a proporcionar depósitos a prazo e créditos a duas taxas de juro diferentes, r_1 e r_2 (e suponhamos $r_1 < r_2$). Esta situação daria origem a arbitragem ou uma estratégia de arbitragem. E qual seria esta estratégia? Em $t = 0$, (1) alguém dirigir-se-ia ao primeiro banco e pediria uma determinada quantia Q de dinheiro emprestado à taxa r_1 . Seguidamente, (2) colocaria Q a render à taxa r_2 . Na maturidade de ambas as operações, (3) receberia $(1 + r_2)Q$ do segundo banco e (4) pagaria $(1 + r_1)Q$ ao primeiro. Teria, assim, certamente (com probabilidade igual a 1) um ganho de $(r_2 - r_1)Q$ em $t = T$, sem precisar de dinheiro em $t = 0$. Não haveria risco de perda. Uma estratégia de arbitragem, para ser clara e rigorosa como esta, deve ser estruturada em passos ou etapas, de forma inequívoca. (Como veremos depois, para ser do tipo B, não pode, hoje, precisar de dinheiro e deve, amanhã, possibilitar um ganho com probabilidade positiva, sem risco de perda.)

Numa segunda situação existem os mesmos dois instantes temporais (agora e na maturidade) e uma taxa de juro r para depósitos a prazo e crédito. Suponhamos a existência de um investimento numa carteira que hoje vale Π_0 e na maturidade Π_T . Vamos mostrar que a ausência de arbitragem implica $(1 + r)\Pi_0 = \Pi_T$.

Suponhamos que $(1 + r)\Pi_0 < \Pi_T$. Neste caso, a estratégia de arbitragem seria (1) pedir emprestado Π_0 em dinheiro e (2) comprar a carteira por Π_0 . Na maturidade, (3) a carteira vale Π_T e (4) o empréstimo é pago. O ganho em $t = T$ seria de $\Pi_T - (1 + r)\Pi_0 > 0$.

Suponhamos, agora, que $(1 + r)\Pi_0 > \Pi_T$. Neste caso, (1) vende-se a descoberto a carteira em $t = 0$, ou seja, recebe-se Π_0 , o seu valor, sem necessidade de a entregar desde logo. A seguir, (2) coloca-se Π_0 dinheiro a render. Na maturidade, (3) recebe-se o dinheiro $(1 + r)\Pi_0$ do depósito a prazo e (4) compra-se a carteira por Π_T entregando-a a quem se tinha vendido a descoberto no início. Constata-se um ganho, em $t = T$, de $(1 + r)\Pi_0 - \Pi_T > 0$.

Qualquer uma destas duas estratégias de arbitragem encaixa no tipo B: não houve

necessidade de se possuir desde logo algo, não há possibilidades de perda e existe (com probabilidade positiva, neste caso igual a 1) um ganho no futuro.

A venda a descoberto é, ao fim e ao cabo, um processo de entrega diferida de um bem. Permite vender o que não se tem.

Em jeito de preparação da próxima aula, veja-se que $(1+r)\Pi_0 = \Pi_T$ se pode escrever na forma $\Pi_T - \Pi_0 = r\Pi_0$ ou $\Pi_T - \Pi_0 = r\Pi_0 \times \Delta t$ com $\Delta t = 1$. Passando 0 para t e T para $t + \Delta t$, viria $\Pi_{t+\Delta t} - \Pi_t = r\Pi_t \Delta t$. Se agora dividirmos ambos os membros desta equação por Δt e tomarmos o limite $\Delta t \downarrow 0$ (e supondo a correspondente diferenciabilidade), apareceria a equação diferencial $\Pi'(t) = r\Pi(t)$.

Exercícios

Nos exercícios desta aula é necessário identificar, de forma clara e objectiva, a estratégia de arbitragem em causa.

1. Considere duas opções europeias *call* em tudo iguais menos nos preços de exercício (E_1 e E_2 com $E_1 < E_2$). Mostre que os preços C_1 e C_2 destas *calls* num instante anterior à maturidade deve satisfazer

$$C_2 \leq C_1$$

(sob qualquer cenário para o valor do activo na maturidade).

2. Considere duas opções europeias *call* em tudo iguais menos nas datas de exercício (T_1 e T_2 com $T_1 < T_2$). Mostre que os preços C_1 e C_2 destas *calls* num instante anterior à primeira maturidade deve satisfazer

$$C_1 \leq C_2$$

se se suposer que o valor do activo em T_2 será superior ao seu valor em T_1 .

3. Seja S o valor de um activo (subjacente a uma opção) no instante t . Mostre que o preço C de opções europeias *call* (com maturidade T) no instante $t < T$ deve satisfazer

$$S - Ee^{-r(T-t)} \leq C \leq S.$$

4. Formule e resolva estes três exercícios para o caso de opções europeias *put*.

Aula 6: O Modelo de Black-Scholes

A teoria da atribuição de preços a opções gira, em termos básicos, em torno da equação de Black-Scholes. A derivação desta equação diferencial assenta em várias hipóteses. Em primeiro lugar, suporemos o seguinte:

- O valor do activo financeiro subjacente a uma opção europeia é modelável por um processo estocástico de Itô $\{S_t\}_{t \geq 0}$, solução da equação diferencial estocástica da forma $dS_t = (\mu S_t)dt + (\sigma S_t)dX_t$, em que a deriva μ e a volatilidade σ são constantes (enquanto funções do tempo e do valor do activo). Esta hipótese implica, como já vimos, que S_t segue uma distribuição lognormal.

As outras hipóteses irão sendo introduzidas à medida que desenvolvemos o modelo e serão reunidas formalmente mais tarde.

Suponhamos que o preço de uma opção europeia é representável por uma função $V(t, S)$, duas vezes continuamente diferenciável em $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$. É indiferente, por enquanto, a opção europeia ser do tipo *call* ou do tipo *put*.

Note-se, para começar, que os processos estocásticos de Itô, $\{S_t\}_{t \geq 0}$ para o valor do activo financeiro e $\{V_t\}_{t \geq 0}$ para o preço da correspondente opção europeia, estão correlacionados. As suas componentes estocásticas são proporcionais (ver aula da modelação diferencial estocástica):

$$\sigma S_t dX_t \quad \text{e} \quad \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) dX_t.$$

Assim sendo, não será inesperado ver a componente estocástica de uma combinação linear apropriada de V e de S ser eliminada.

Consideremos uma carteira ou portefólio constituída por uma posição curta numa opção e por uma posição longa num determinado número Δ de activos subjacentes a essa opção. Ficará claro, um pouco mais à frente, o motivo pelo qual se considera uma carteira com esta composição.

O valor desta carteira é dado por

$$\Pi(t, S) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta S - V(t, S).$$

Esta função Π satisfaz o requisito do enunciado da Fórmula de Itô. A aplicação deste resultado mostra a existência de um processo de Itô $\{\Pi_t\}_{t \geq 0}$ a satisfazer a equação diferencial estocástica

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}(t, S_t) \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_t) dX_t.$$

Recorrendo à definição de $\Pi(t, S)$ vem que

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(-\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \left[-\frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) + \Delta \right] - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) \right) dt \\ &\quad + \sigma S_t \left[-\frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t) + \Delta \right] dX_t. \end{aligned}$$

A componente estocástica (relativa a dX_t) desaparece desta equação se escolhermos Δ , *a posteriori*, como:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t).$$

Com esta escolha, a equação simplifica-se consideravelmente, reduzindo-se a:

$$d\Pi_t = \left(-\frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S_t) \right) dt.$$

Note-se que se tivéssemos feito $\Delta = \partial V/\partial S(t, S)$ originalmente, antes de aplicar o Lema de Itô, o resultado teria sido diferente.

Começa a ser claro o motivo pelo qual a carteira seguiu a construção apresentada. Ao combinar as opções e os activos financeiros subjacentes numa mesma carteira é possível eliminar (na prática reduzir) o risco associado ao comportamento aleatório do activo.

Recuperando a continuação da derivação que estava a ser feita, formula-se, a partir da equação diferencial estocástica para $\{\Pi_t\}_{t \geq 0}$, uma equação com derivadas parciais (determinística)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) = -\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S).$$

Na ausência de arbitragem, a carteira não pode ser nem mais nem menos rentável do que um investimento sem risco. É aqui que supomos a existência de uma taxa de juro r com capitalização contínua, sem qualquer risco associado. Em termos diferenciais, a ausência de arbitragem traduzir-se-ia por (ver o final da aula anterior)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) = r\Pi(t, S).$$

Se esta igualdade não fosse verdadeira seria possível a um agente de arbitragem fazer um lucro instantâneo *sem custo* e sem qualquer risco. É também aqui, para este argumento de ausência de arbitragem funcionar desta forma, que se suporia a ausência de *custos de transacção*.

Com este argumento de ausência de arbitragem e a escolha $\Delta = \partial V/\partial S(t, S)$ feita novamente *a posteriori*, passa-se da EDP anterior à seguinte

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) - rV(t, S) = 0.$$

Esta EDP, conhecida por *equação de Black-Scholes*, modela o preço V de uma opção, em função do tempo t e do valor S do activo subjacente.

Reunimos, de seguida, as várias hipóteses, a acrescentar à inicial, que foram utilizadas na derivação do modelo de Black-Scholes.

- É possível recorrer a uma taxa de juro sem qualquer risco durante o tempo de vida da opção (com capitalização contínua).

- Não existem quaisquer custos de transacção associados à gestão de uma carteira constituída por opções e seus activos financeiros subjacentes.
- Não existem possibilidades de arbitragem.
- É permitido o *short selling* (vender activos financeiros ou carteiras que não se possuem, entregando-os posteriormente; ver aula anterior) — relacionado com a posição curta assumida.
- O mercado é completo (derivado e activo subjacente podem ser negociados simultaneamente).

Implicitamente o modelo de Black-Scholes pressupõe também que:

- A transacção do activo financeiro se faz em tempo contínuo.
- O activo financeiro é divisível.
- O activo financeiro não dá quaisquer dividendos durante o tempo de vida da opção.

Observa-se que a equação de Black-Scholes não depende da deriva ou flutuação μ . Os únicos dados que figuram na equação são a volatilidade σ e a taxa de juro sem risco r . Resulta desta observação que o preço de uma opção não depende da taxa de variação média do activo subjacente, o que não deixa de ser, à primeira vista, surpreendente.

A equação de Black-Scholes é uma EDP de *segunda ordem, linear e parabólica*. A equação é de segunda ordem porque envolve uma derivada parcial de segunda ordem. O facto de ser parabólica será confirmado no momento da sua resolução.

É linear no sentido em que se duas funções forem solução da equação então qualquer combinação linear destas funções é solução da equação. Note-se que para verificar que a equação era linear bastaria constatar que os coeficientes, que multiplicam as várias derivadas parciais e o termo de ordem zero, não dependem da variável dependente V (apesar de dependerem das variáveis independentes t e S).

Condições de Fronteira e Condições Finais para Opções Europeias

A determinação de uma solução para a equação de Black-Scholes depende da introdução de condições iniciais (que, no presente caso, são condições finais).

O valor de uma opção *call* é conhecido na maturidade T :

$$C(T, S) = \max\{S - E, 0\},$$

em que E representa o preço de exercício. Este requisito constitui uma condição final. No caso de uma opção *put*, a condição final passa a ser

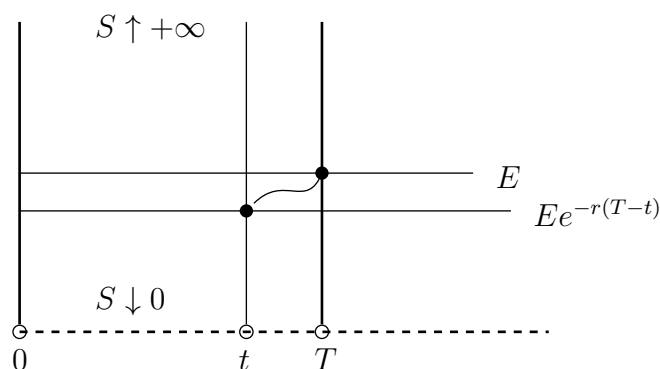
$$P(T, S) = \max\{E - S, 0\}.$$

Considerem-se, também, condições de fronteira impostas quando S tende para 0 e para $+\infty$. No caso de uma opção *call*, quando $S \rightarrow +\infty$, o valor da opção aproxima-se do valor do activo subjacente, ou seja, $\lim_{S \rightarrow +\infty} S - C(t, S) = 0$, para todo o $t \geq 0$. No entanto, estas condições não levam em linha de conta o preço de exercício. Se tomarmos em consideração o preço de exercício (descontado à taxa de juro r), estas condições de fronteira passam a ser

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} S - C(t, S) = Ee^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0.$$

Aqui o argumento é o seguinte: quando S é muito grande sabe-se que a opção é exercida e logo a *call* vale, aproximadamente, a diferença entre S e o preço de exercício descontado à taxa de juro, ou seja $C(t, S) \simeq S - Ee^{-r(T-t)}$ (no limite deverá ocorrer a igualdade).

As condições final e de fronteira são ilustradas da seguinte forma:



No caso de uma opção *put*, as condições de fronteira quando S tende para $+\infty$ são dadas por

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} P(t, S) = 0, \quad t \geq 0,$$

traduzindo a ideia de que a opção não será exercida quando o valor do activo subjacente for muito superior ao do preço de exercício.

Na prática, estamos interessados no que se passa para $t \leq T$, apesar destas condições de fronteiras serem impostas para todo o $t \geq 0$.

É compreensível, no caso de uma opção *call*, que o preço da opção seja nulo se o valor do seu activo subjacente também o for, mesmo que estejamos longe da data de exercício. Este requisito traduz-se nas seguintes condições de fronteira

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} C(t, S) = 0, \quad t \geq 0.$$

Quando $S = 0$, o preço de uma opção *put* deveria coincidir com o preço de exercício (descontado à taxa de juro r). Logo, as condições de fronteira a considerar são as seguintes:

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} P(t, S) + S = Ee^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0.$$

Como veremos mais adiante, a condição final imposta é suficiente para resolver unicamente a equação de Black-Scholes.

Aula 7: A Fórmula de Black-Scholes

É possível resolver analiticamente a equação de Black-Scholes sob determinadas condições. Começemos pelo caso das opções europeias do tipo *call*, para o qual a equação é re-escrita com a notação $C(t, S) = V(t, S)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) - rC(t, S) = 0, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad S > 0.$$

A condição final é dada por

$$C(T, S) = \max\{S - E, 0\}$$

e as condições de fronteira para $S \rightarrow 0^+$ e $S \rightarrow +\infty$ tomam a forma

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} C(t, S) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} S - C(t, S) = Ee^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0.$$

Este problema inclui quatro parâmetros dimensionais (σ^2 , r , T e E).

Equação com Coeficientes Constantes

O primeiro passo é tornar constantes os coeficientes desta equação, que dependem da variável independente S . Para este efeito, faça-se

$$t = T - \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\tau, \quad S = Ee^x \quad \text{e} \quad C(t, S) = Ev(\tau, x).$$

Omitindo-se os argumentos e usando $x = \log(S/E)$, vem

$$\frac{\partial C}{\partial S} = E \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dS} = \frac{E}{S} \frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = -\frac{E}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{1}{S}.$$

O resultado é, então, a equação diferencial

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau, x) + (c - 1) \frac{\partial v}{\partial x}(\tau, x) - cv(\tau, x),$$

em que $c = 2r/\sigma^2$ é já um parâmetro adimensional. A condição final ($t = T$) passa a ser uma condição inicial ($\tau = 0$), da forma

$$v(0, x) = \max\{e^x - 1, 0\}.$$

As condições de fronteira (quando $S \rightarrow 0^+$ e $S \rightarrow +\infty$) são equivalentes às novas condições de fronteira (quando $x \rightarrow \pm\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(\tau, x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - v(\tau, x) = e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau}, \quad \tau \geq 0.$$

Equação de Difusão

Ao converter a equação de Black-Scholes (com os coeficientes já constantes) na forma canônica, obtém-se uma equação de difusão. Para alcançar este objectivo, faz-se uma nova mudança de variáveis (mas desta vez apenas na variável dependente):

$$v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x).$$

Os parâmetros reais α e β são escolhidos de forma a anular determinados termos. A equação em $u(\tau, x)$ passa a ser, omitindo a dependência das funções em relação às variáveis independentes τ e x ,

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (c-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - c u.$$

O termo envolvendo a derivada parcial $\partial u / \partial x(\tau, x)$ anula-se se escolhermos α e β a satisfazer

$$0 = 2\alpha + c - 1.$$

O termo em $u(\tau, x)$ desaparece se

$$\beta = \alpha^2 + (c-1)\alpha - c.$$

Estas duas equações têm a solução única

$$\alpha = -\frac{1}{2}(c-1) \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{1}{4}(c+1)^2.$$

Assim sendo, a mudança de variável dependente

$$v(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2 \tau} u(\tau, x)$$

permite escrever a equação de Black-Scholes na forma difusiva

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x), \quad \tau \geq 0 \quad \text{e} \quad -\infty < x < +\infty.$$

A condição inicial fica na forma

$$u(0, x) = \max \left\{ e^{\frac{1}{2}(c+1)x} - e^{\frac{1}{2}(c-1)x}, 0 \right\}.$$

As condições de fronteira passam a ser

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2 \tau} u(\tau, x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2 \tau} u(\tau, x) = e^{-\frac{2x}{\sigma^2} \tau},$$

para $\tau \geq 0$.

Verifica-se, facilmente, que a equação de difusão está escrita na forma canónica e que o seu discriminante é nulo ($B^2 - 4AC = 0$, com $A = 1$ e $B = C = 0$ os coeficientes dos termos do segundo grau), o que mostra que se trata de uma equação parabólica. É por este facto que a equação de Black-Scholes é, também, parabólica.

Qualquer problema de valor inicial da forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x), \quad \tau \geq 0 \quad \text{e} \quad -\infty < x < +\infty, \\ u(0, x) &= u_0(x)\end{aligned}$$

tem solução única desde que $u_0(x)$ seja uma função *bem comportada* (por exemplo, contínua excepto num número finito de pontos) e desde que $u_0(x)$ não cresça muito rapidamente quando $|x| \rightarrow +\infty$, ou seja, desde que exista uma constante $a > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x)e^{-ax^2} = 0.$$

Se assim for, a solução $u(\tau, x)$ varia continuamente com $u_0(x)$. A fórmula analítica para a solução é dada pelo integral de Poisson

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{1}{4\tau}(x-s)^2} ds.$$

Estamos preparados para resolver o problema de valor inicial proveniente da equação de Black-Scholes. Em primeiro lugar, observamos que

$$u_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ e^{\frac{1}{2}(c+1)x} - e^{\frac{1}{2}(c-1)x}, 0 \right\} = \max \left\{ e^{\frac{1}{2}(c-1)x}(e^x - 1), 0 \right\}.$$

é uma função *bem comportada*. É fácil verificar (e fica relegado para um exercício) que $u_0(x)$ não cresce muito rapidamente quando $|x| \rightarrow +\infty$, no sentido exposto em cima.

Precisamos de calcular a expressão do integral de Poisson para esta função $u_0(x)$. Para o efeito, começamos por notar que, atendendo à expressão para $u_0(x)$,

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(c+1)s} - e^{\frac{1}{2}(c-1)s} \right) e^{-\frac{1}{4\tau}(x-s)^2} ds.$$

Para escrever este integral de forma mais resumida efectua-se a mudança de variável $y = (s - x)/\sqrt{2\tau} \iff s = x + \sqrt{2\tau}y$, o que resulta em

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c+1)(x+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c-1)(x+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Calculemos o primeiro integral, completando o quadrado,

$$\begin{aligned}\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(c+1)(x+\sqrt{2\tau}y)-\frac{1}{2}y^2} dy &= e^{\frac{1}{2}(c+1)x} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}(c+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau})^2} dy \\ &= e^{\frac{1}{2}(c+1)x+\frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \int_{-x/\sqrt{2\tau}-\frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.\end{aligned}$$

O segundo integral seria calculado de forma semelhante. Logo, se recorrermos à função de distribuição (cumulativa) de uma lei de probabilidade normal de média 0 e desvio padrão 1, dada por

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds,$$

podemos escrever que

$$u(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(c-1)x + \frac{1}{4}(c-1)^2\tau} N(d_2)$$

com

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau}.$$

Agora, há que fazer as mudanças de variáveis em sentido inverso para determinar a solução da equação de Black-Scholes nas variáveis originais. Em primeiro lugar, escreve-se a solução como

$$v(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(c-1)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} u(\tau, x) = e^x N(d_1) - e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau} N(d_2).$$

Depois, multiplica-se ambos os membros desta igualdade por E e escreve-se a solução nas variáveis originais $C(t, S)$, t e S

$$C(t, S) = SN(d_1) - e^{-r(T-t)} EN(d_2),$$

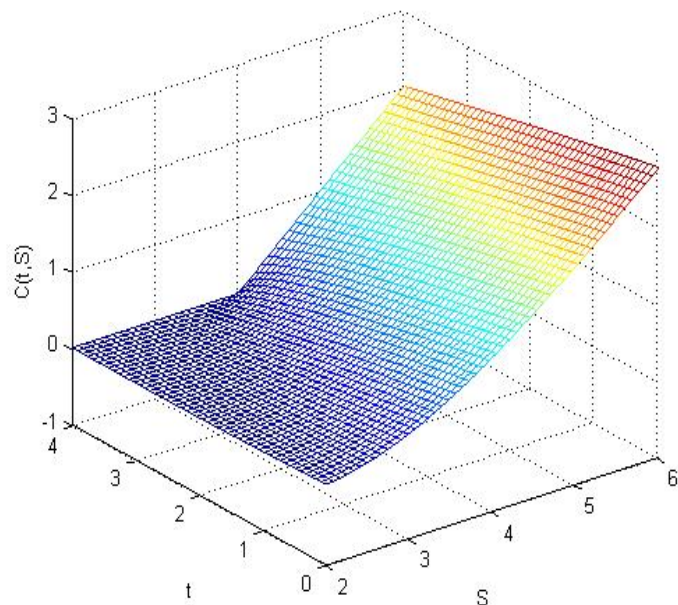
em que

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

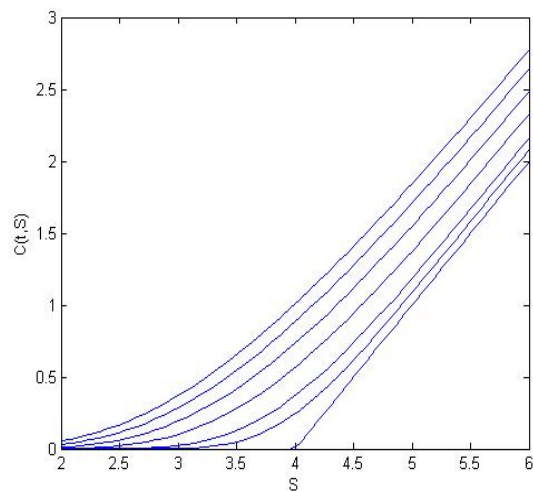
com $S > 0$ e $t \in [0, T)$. Aqui usou-se $\sqrt{2\tau} = \sqrt{2(T-t)\sigma^2/2} = \sigma\sqrt{T-t}$ e $(c+1)/2 = (2r/\sigma^2 + 1)/2 = r/\sigma^2 + 1/2$.

Quando $t = T$, a fórmula é dada por $C(T, S) = \max\{S - E, 0\}$. Obtivemos, assim, a expressão analítica da equação de Black-Scholes, conhecida por fórmula de Black-Scholes, para o preço de opções europeias *call*.

A figura seguinte mostra o gráfico de $C(t, S)$ quando $E = 4$, $r = 0.05$ e $\sigma = 0.2$, para valores de t compreendidos entre $t_0 = 0$ e $T = 4$ e valores de S a variar entre $S_{t_0} = 2$ e $S_T = 6$.



De seguida reproduzem-se os gráficos de $C(t, S)$ para vários valores de t a aproximarem-se da maturidade.



Exercícios

1. Prove que o problema de valor inicial definido pela equação de difusão (com a condição inicial proveniente da equação de Black-Scholes) satisfaz as condições exigidas para que a solução $u(\tau, x)$ seja única e varie continuamente com $u_0(x)$.

2. Mostre que a fórmula de Black-Scholes satisfaz, no limite, a condição final $C(T, S) = \max\{S - E, 0\}$, para todo o $S > 0$, e as condições de fronteira

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} C(t, S) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} S - C(t, S) = Ee^{-r(T-t)}$$

para todo o $t \in [0, T)$.

3. Deduza a fórmula de Black-Scholes para o preço de opções europeias *put*.

Aula 9: Risco Neutral e Volatilidade Implícita

É possível deduzir a fórmula de Black-Scholes para a atribuição de preços a opções europeias sem recorrer à equação de Black-Scholes. Não deve resultar da existência desta demonstração alternativa nenhum menosprezo pela equação de Black-Scholes. Esta equação é incontornável na teoria de atribuição de preços a opções. O preço de opções mais sofisticadas, por exemplo, obedece a versões modificadas da equação de Black-Scholes (em que, por vezes, não é possível determinar uma solução analítica).

Acontece que no caso concreto da equação de Black-Scholes existe um caminho alternativo para deduzir a sua solução analítica. Este caminho alternativo está relacionado com um conceito fundamental na teoria de atribuição de preços a opções: o risco neutral (e a função densidade de probabilidade de risco neutral). É essencialmente por este motivo que vamos apresentar a demonstração alternativa.

Começemos por introduzir, num contexto mais simples, o binário, quer a medida de probabilidade neutra face ao risco, quer o caminho alternativo para atribuir preços a opções.

Um Exemplo Binário

Consideremos um activo financeiro cujo preço no instante $t = 0$ vale $S_0 = 20$. Sejam $S_T^\uparrow = cS_0 = 40$ ($c = 2$) e $S_T^\downarrow = bS_0 = 10$ ($b = 0.5$) os valores futuros possíveis para S_T no instante $t = T$. Consideremos, também, uma opção *call* de estilo europeu sobre este activo, com maturidade T e preço de exercício $E = 29$. Por fim, seja $r = 0.1$ o valor para uma taxa de juro fixa relativa ao período de tempo em causa.

Seja $\Omega = \{\uparrow, \downarrow\}$ o espaço de estados futuros e $\mathbb{P}(\uparrow) = \mathbb{P}(\downarrow) = 0.5$ uma medida de probabilidade definida sobre Ω . Na maturidade, a opção vale, sob os cenários em questão,

$$C_T^\uparrow = \max\{40 - 29, 0\} = 11 \quad \text{e} \quad C_T^\downarrow = \max\{10 - 29, 0\} = 0.$$

É natural definir o preço justo a pagar pela opção em $t = 0$ como sendo o valor esperado do retorno descontado à taxa de juro:

$$C_0 = \frac{1}{1 + 0.1} [11 \mathbb{P}(\uparrow) + 0 \mathbb{P}(\downarrow)] = 5.$$

Um processo alternativo para atribuir um preço justo à opção em $t = 0$ consiste em replicá-la através de uma carteira, de uma forma perfeita, ou seja, não permitindo a ocorrência de arbitragem. Desta forma, seja $V(\Delta, B)$ o valor de uma carteira constituída por Δ unidades do activo financeiro e uma quantidade B de dinheiro sujeito à taxa de juro r . O valor desta carteira em $t = 0$ é dado por

$$V_0(\Delta, B) = \Delta S_0 + B = 20\Delta + B.$$

A carteira replica de forma perfeita a opção (sem permitir arbitragem) se

$$\begin{aligned} V_T^\uparrow(\Delta, B) &= 40\Delta + (1 + r)B = 11 = C_T^\uparrow, \\ V_T^\downarrow(\Delta, B) &= 10\Delta + (1 + r)B = 0 = C_T^\downarrow. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema de duas equações a duas incógnitas vem que

$$\Delta = \frac{C_T^\uparrow - C_T^\downarrow}{S_0(c - b)} = \frac{11}{20(1.5)} = \frac{11}{30},$$

$$B = \frac{cC_T^\downarrow - bC_T^\uparrow}{(1+r)(c-b)} = \frac{-(0.5)11}{(1.1)(1.5)} = -\frac{10}{3}.$$

O valor negativo para B traduz um empréstimo. Se este valor fosse positivo tratar-se-ia de um depósito.

Com estes valores para Δ e B vem que

$$V_0(11/30, -10/3) = 20\frac{11}{30} - \frac{10}{3} = 4.$$

Repare-se que este valor é diferente de $C_0 = 5$ obtido anteriormente sob $\mathbb{P}(\uparrow) = \mathbb{P}(\downarrow) = 0.5$. Aliás, note-se que o valor esperado do activo em $t = T$, descontado à taxa de juro $r = 0.1$, também não coincide com S_0 :

$$\frac{1}{1+0.1} [40\mathbb{P}(\uparrow) + 10\mathbb{P}(\downarrow)] = \frac{250}{11} \simeq 22.73 \neq 20.$$

Existem duas formas de corrigir esta discrepância. Uma das formas é exigir um prémio de risco r_p ,

$$S_0 = 20 = \frac{1}{1+0.1+r_p} [40\mathbb{P}(\uparrow) + 10\mathbb{P}(\downarrow)],$$

reflectindo uma aversão natural dos investidores face ao risco. A outra forma passa por considerar uma nova medida de probabilidade

$$S_0 = 20 = \frac{1}{1+0.1} [40\mathbb{Q}(\uparrow) + 10\mathbb{Q}(\downarrow)].$$

Esta medida é neutra face ao risco no sentido de não exigir um prémio de risco. Fazendo as contas vem que $\mathbb{Q}(\uparrow) = 2/5$ e $\mathbb{Q}(\downarrow) = 3/5$. Veja-se que a discrepância nos valores dos preços da opção desaparece sob esta nova medida:

$$C_0 = \frac{1}{1+0.1} [11\mathbb{Q}(\uparrow) + 0\mathbb{Q}(\downarrow)] = 4.$$

Risco Neutral

De acordo com o que vimos para a modelação (diferencial estocástica) de um activo financeiro,

$$S_t \sim \text{lognormal}(m, p)$$

com parâmetros $m = \log(s_0) + (\mu - \sigma^2/2)t$ e $p = \sigma\sqrt{t}$. Recorde-se, aqui, que μ é a deriva e σ a volatilidade de $\{S_t\}_{t \geq 0}$. Vimos, também, que a função densidade de uma

lei lognormal(m, p) é dada por $h(s) = \frac{1}{sp\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(s)-m}{p}\right)^2\right)$ se $s > 0$ e 0 caso contrário.

Mudando 0 para t , t para T (mas $t - 0$ para $T - t$) e s_0 para S vem

$$S_T \sim \text{lognormal}(m, p)$$

com parâmetros $m = \log(S) + (\mu - \sigma^2/2)(T - t)$ e $p = \sigma\sqrt{T - t}$. Estamos a considerar t como o nosso instante inicial, em que o valor do activo S é determinístico. Sabe-se que

$$E(S_T) = e^{m + \frac{1}{2}p^2}.$$

Logo, fazendo as contas,

$$E(S_T) = Se^{\mu(T-t)}.$$

Esta expressão não é surpreendente. Por um lado, vimos (no caso discreto da modelação estocástica de um activo, com $S(t)$ determinístico) que

$$\frac{E(S(t + \Delta t) - S(t))}{S(t)} = \mu\Delta t \iff \frac{E(S(t + \Delta t) - S(t))}{\Delta t} = \mu S(t).$$

E, por outro lado, sabe-se que S_T resultou de um limite tomado sobre o caso discreto.

Logo, a hipótese de risco neutral é assegurada tomando $\mu = r$

$$S_T \sim \text{lognormal}(m, p)$$

com parâmetros $m = \log(S) + (r - \sigma^2/2)(T - t)$ e $p = \sigma\sqrt{T - t}$. Sob esta hipótese, tem-se

$$E(S_T) = Se^{r(T-t)},$$

ou, se quisermos,

$$S = e^{-r(T-t)}E(S_T).$$

Vamos ver que a fórmula de Black-Scholes pressupõe uma situação de risco neutral. O preço de uma opção europeia pode ser atribuído pelo retorno esperado do ganho exercido na maturidade, descontado à taxa de juro r ,

$$C(t, S) = e^{-r(T-t)}\hat{E}(\max\{S_T - E, 0\}),$$

em que $\hat{E}(\cdot)$ se reporta à probabilidade de risco neutral seguida por S_T . De facto, a fórmula anterior para $C(t, S)$ coincide com a de Black-Scholes. Para verificarmos que assim acontece, necessitamos do seguinte resultado.

Proposição 1 *Se L for uma variável aleatória a seguir uma distribuição lognormal então*

$$E(\max\{L - E, 0\}) = E(L)N(d_1) - EN(d_2),$$

em que $N(d)$ é a função de distribuição (cumulativa) de uma lei de probabilidade normal de média 0 e desvio padrão 1,

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}\bar{s}^2} d\bar{s}.$$

Os números d_1 e d_2 são dados por

$$d_1 = \frac{\log(E(L)/E) + p^2/2}{p} \quad e \quad d_2 = \frac{\log(E(L)/E) - p^2/2}{p},$$

em que p é o desvio padrão de L .

Demonstração. Sejam $g(s)$ a função densidade da distribuição lognormal (com parâmetros m e p) e $h(\bar{s})$ a função densidade da distribuição normal (de média 0 e desvio padrão 1):

$$g(s) = \begin{cases} \frac{1}{ps\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(s)-m}{p}\right)^2} & s > 0, \\ 0 & s \leq 0 \end{cases} \quad e \quad h(\bar{s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\bar{s}^2}.$$

Tem-se que

$$E(\max\{L - E, 0\}) = \int_E^{+\infty} (s - E)g(s) ds = \int_E^{+\infty} sg(s) ds - E \int_E^{+\infty} g(s) ds.$$

A mudança de variável que nos leva à função densidade da lei normal é dada por

$$\bar{s} = \frac{\log(s) - m}{p} \iff s = e^{p\bar{s} + m},$$

em que

$$m = \log(E(L)) - \frac{p^2}{2}, \quad \text{ou seja} \quad e^{m + \frac{1}{2}p^2} = E(L).$$

Efectuando a mudança de variável e completando o quadrado no primeiro integral, origina

$$\begin{aligned} E(\max\{L - E, 0\}) &= \int_{(\log(E)-m)/p}^{+\infty} e^{p\bar{s} + m} h(\bar{s}) d\bar{s} - E \int_{(\log(E)-m)/p}^{+\infty} h(\bar{s}) d\bar{s} \\ &= e^{m + p^2/2} \int_{(\log(E)-m)/p}^{+\infty} h(\bar{s} - p) d\bar{s} - E \int_{(\log(E)-m)/p}^{+\infty} h(\bar{s}) d\bar{s}. \end{aligned}$$

Recorrendo a $N(d)$ vem que

$$\begin{aligned} E(\max\{L - E, 0\}) &= e^{m + p^2/2} \left(1 - N\left(\frac{\log(E)-m}{p} - p\right) \right) - E \left(1 - N\left(\frac{\log(E)-m}{p}\right) \right) \\ &= e^{m + p^2/2} N\left(\frac{-\log(E)+m}{p} + p\right) - EN\left(\frac{-\log(E)+m}{p}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando a expressão de m e as propriedades dos logaritmos, obtém-se o que se pretendia provar:

$$E(\max\{L - E, 0\}) = E(L)N\left(\frac{\log(E(L)/E) + p^2/2}{p}\right) - EN\left(\frac{\log(E(L)/E) - p^2/2}{p}\right).$$

■

A aplicação da proposição anterior com $L = S_T$ e $E(\cdot) = \hat{E}(\cdot)$ resulta em

$$\begin{aligned} C(t, S) &= e^{-r(T-t)} \hat{E}(\max\{S_T - E, 0\}) \\ &= e^{-r(T-t)} S e^{r(T-t)} N(d_1) - e^{-r(T-t)} EN(d_2) \\ &= SN(d_1) - e^{-r(T-t)} EN(d_2), \end{aligned}$$

em que

$$d_1 = \frac{\log(E(S_T)/E) + p^2/2}{p} = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

e

$$d_2 = \frac{\log(E(S_T)/E) - p^2/2}{p} = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Chegámos, deste modo, à já nossa conhecida fórmula de Black-Scholes. Esta derivação utilizou, como função densidade de risco neutral, a função densidade de uma distribuição lognormal com os parâmetros indicados em cima.

Distribuição e Volatilidade Implícitas

Através dos preços observados no mercado para um conjunto de opções europeias, sobre o mesmo activo financeiro, mas relativas a diferentes preços de exercício, é possível estimar a volatilidade do activo e a sua função densidade de risco neutral.

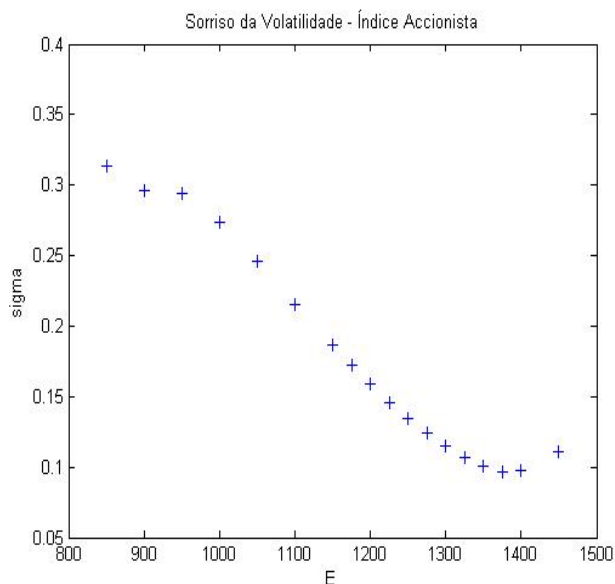
Suponhamos que temos um conjunto de n opções europeias relativas a diferentes preços de exercício $E_1 < \dots < E_n$. Sejam C_1, \dots, C_n os preços observados para estas opções no instante temporal t , a distar $T - t$ da maturidade das opções. Se especificarmos a taxa de juro sem risco r , o valor do activo S , a distância até à maturidade $T - t$ e o preço de exercício E_i , então a fórmula de Black-Scholes para $C(t, S; E_i)$ fica a depender unicamente da volatilidade σ . Assim, é possível calcular σ_i através de

$$C(t, S; E_i, \sigma_i) = C_i.$$

Os valores $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ são designados por *volatilidades implícitas*. O seu gráfico, em função do preço de exercício, tem o aspecto de um sorriso (conhecido como o sorriso da volatilidade, em inglês *volatility smile*).

A forma dos sorrisos da volatilidade depende do tipo de activo financeiro subjacente às opções. Na figura seguinte, traça-se um sorriso com dados do índice S&P de 2 de Março de 2006 (referente a opções *call* com maturidade em Maio de 2006). Em opções

sobre *equities* (acções ou índices accionistas) o sorriso da volatilidade toma geralmente uma forma decrescente e convexa. Os sorrisos de volatilidades referentes a opções sobre mercadorias costumam ser também convexos, decrescendo primeiro para depois crescer até ao nível inicial.



Conhecidas as volatilidades implícitas, é possível estimar os preços das opções em instantes temporais $t' \geq t$ e para valores do activo S' diferentes, recorrendo às fórmulas de Black-Scholes $C(t', S'; E_i, \sigma_i)$, $i = 1, \dots, n$.

No cenário acima descrito para os sorrisos da volatilidade, é também possível estimar uma função densidade de risco neutral. À distribuição associada a esta estimação chama-se *distribuição implícita*. Existem variadas formas de conduzir esta estimação. Um dos processos mais utilizados encontra-se descrito em exercício.

Na prática, esta função densidade não coincide com uma função densidade de uma distribuição lognormal. Uma experiência simples consiste em calcular a média e o desvio padrão associados à distribuição implícita e traçar a função densidade lognormal com estes parâmetros. Verifica-se, por exemplo, para opções europeias *call* sobre *equities*, que a função densidade de risco neutral estimada, associada à distribuição implícita, apresenta um pico maior do esta lognormal. A sua cauda esquerda é geralmente mais pesada e a direita mais leve.

Exercícios

1. Considere a fórmula

$$C(t, S; E) = e^{-r(T-t)} \int_E^{+\infty} (s - E)g(s) ds.$$

Prove que

$$g(E) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 C}{\partial E^2}(t, S; E).$$

Diga como estimaria $g(E_i)$, $i = 1, \dots, n$, através de diferenças centrais de segunda ordem.

2. Considere a fórmula de Black-Scholes para o preço $C(t, S)$ de uma opção *call* europeia. Sejam E o preço de exercício e T a maturidade da opção. Seja r a taxa de juro constante e com capitalização contínua e σ a volatilidade do activo subjacente.

- (a) Reescreva esta fórmula como

$$C(t, S) = e^{-r(T-t)} (Se^{r(T-t)}N(d_1) - EN(d_2)).$$

Explique o significado financeiro do termo $EN(d_2)$ e, a seguir, do termo $Se^{r(T-t)}N(d_1)$.

- (b) Faça E a tender para zero em $C(t, S)$. Que função obtém?
- (c) Faça T a tender para $+\infty$ em $C(t, S)$. Que função obtém?
- (d) Mostre que a função obtida nas duas alíneas anteriores satisfaz a equação de Black-Scholes.

Aula 8: Paridade Put-Call e Delta-Hedging

Nesta aula serão introduzidas algumas das ideias mais básicas sobre a forma de conduzir operações de cobertura (*hedging*) de carteiras ou portfólios através de instrumentos de atribuição de preços a derivados. Através de operações de *hedging* reduz-se (em teoria anula-se) o risco de uma carteira quando sujeita aos movimentos de um activo subjacente, tomando posições opostas em instrumentos ou derivados financeiros relacionados com esse activo.

Os esquemas de *hedging* dividem-se em *estáticos* (quando a cobertura, ou *hedge*, é feita inicialmente e nunca mais é ajustada) e em *dinâmicos* (quando ocorre re-balanceamento da carteira ao longo do tempo). Entre os primeiros está o recurso à *paridade put-call*.

Paridade Put-Call

Suponhamos que uma carteira foi formada tomando uma posição longa numa unidade de um activo (ou seja, detendo uma unidade do activo), uma posição curta numa opção *call* e uma posição longa numa opção *put*. Suponhamos que as opções têm o mesmo preço de exercício E e a mesma maturidade T . O valor desta carteira, num dado instante t e quando o valor do activo é dado por S , pode ser expresso por

$$\Pi(t, S) = S + P(t, S) - C(t, S),$$

onde $P(t, S)$ e $C(t, S)$ são os valores das opções *put* e *call*, respectivamente.

Na maturidade das opções, esta carteira vale:

$$\Pi(T, S_T) = S_T + \max\{E - S_T, 0\} - \max\{S_T - E, 0\}.$$

Se fizermos as contas, considerando, separadamente, os casos $S_T \leq E$ e $S_T > E$, concluímos que

$$\Pi(T, S_T) = E.$$

Independentemente do valor do activo na maturidade das opções, o valor da carteira é sempre igual a E nesta data. A cobertura ou *hedge* é assim conseguida qualquer que seja a movimentação do activo subjacente.

Um investidor interessado em adquirir uma carteira com esta composição num instante $t < T$ deseja saber, naturalmente, quanto deverá pagar para o efeito. Sob as hipóteses utilizadas para a derivação do modelo Black-Scholes, nomeadamente a existência de uma taxa de juro sem risco r (com capitalização contínua) e a existência de neutralidade face ao risco (equivalente a ausência de arbitragem), o valor desta carteira deverá coincidir com o valor do preço de exercício descontado a esta taxa de juro:

$$S + P(t, S) - C(t, S) = Ee^{-r(T-t)}.$$

Esta relação é conhecida por *paridade put-call* e pode ser provada também recorrendo a argumentos de ausência de arbitragem (ver exercício). É uma forma simples de eliminação

do risco de uma carteira utilizando derivados. Permite também determinar o preço de uma *call* a partir de uma *put* e viceversa.

O estudo de perfis de ganhos e perdas de outras carteiras envolvendo opções *call* e *put* é relegado para exercício.

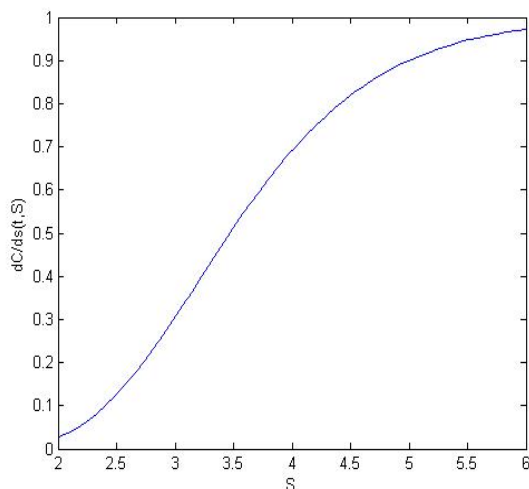
É possível, também, reduzir o risco de uma carteira composta por um determinado número de activos financeiros recorrendo a apenas um tipo de derivados, mas de forma dinâmica.

Delta-Hedging

O delta de uma opção europeia foi introduzido como sendo a taxa de variação do preço da opção em função do valor do activo financeiro. No caso de uma opção do tipo *call* tem-se, então, que

$$\Delta_C = \Delta_C(t, S) = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S).$$

Na figura seguinte retratamos a curva $\partial C/\partial S(t, S)$ em função de S para um instante (não imediatamente) antes da data de exercício.



O delta de uma opção, para um dado valor de S , é o declive da recta tangente à curva $C = C(t, S)$ no ponto $(S, C(t, S))$. Suponhamos que um investidor deseja precaver-se ou prevenir-se contra possíveis movimentos no valor do activo subjacente. Para o efeito, constitui uma carteira com a seguinte composição:

$$\Pi(t, S) = \Delta S - C(t, S).$$

Vejamos qual o valor desta carteira sob uma pequena perturbação do valor do activo:

$$\Pi(t, S + \delta S) = \Delta(S + \delta S) - C(t, S + \delta S).$$

Se fizermos uma expansão de Taylor de $C(t, S)$ em torno de (t, S) ao longo de um deslocamento $(0, \delta S)$ e desprezarmos os termos de segunda ordem, vem que

$$\Pi(t, S + \delta S) \simeq \Delta(S + \delta S) - \left(C(t, S) + \delta S \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right).$$

Logo, se fizermos $\Delta = \Delta_C(t, S) = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S)$, obtemos

$$\Pi(t, S + \delta S) \simeq \Pi(t, S),$$

o que resulta numa estratégia de *hedging*. Esta escolha de Δ torna o valor da carteira insensível a pequenas variações no valor do activo financeiro.

O delta da carteira de valor $\Pi(t, S) = \Delta S - C(t, S)$ é definido por

$$\Delta_{\Pi} = \Delta_{\Pi}(t, S) = \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S) = \Delta - \frac{\partial C}{\partial S}(t, S)$$

A estratégia de *hedging* acima descrita,

$$\Delta = \Delta_C,$$

destina-se a criar uma carteira *delta-neutral*. Neste sentido, é possível afirmar-se que o modelo de Black-Scholes faz uma valoração de opções tomando uma posição delta-neutral sobre uma carteira com esta composição. A relação $\frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S) > 0$, por outro lado, traduziria especulação e não *hedging*.

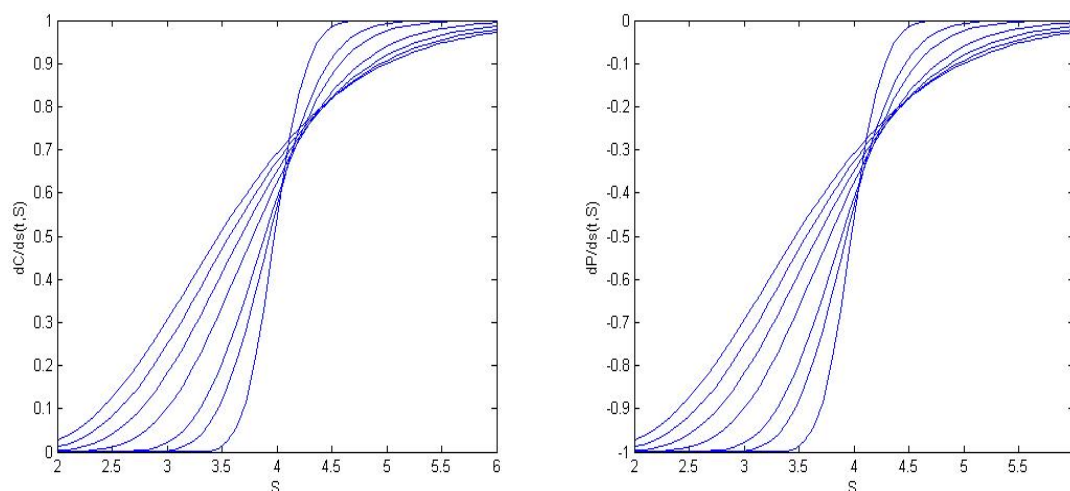
É importante observar duas coisas. Em primeiro lugar, refira-se que uma carteira delta-neutral é insensível a movimentações no activo subjacente, mas apenas no sentido das aproximações de primeira ordem. Em segundo lugar, esta posição delta-neutral é *instantânea*, o que, na prática, a faz ser válida apenas durante curtos períodos de tempo.

A manutenção de uma carteira delta-neutral envolve um ajuste periódico, conhecido por re-balanceamento. Trata-se, assim, de um esquema de *hedging* dinâmico, em que as decisões se tomam em função do valor da carteira nos vários momentos temporais (veja-se que se pretendeu $\Pi(t, S + \delta S) \simeq \Pi(t, S)$ para t arbitrário). Se os custos de transacções forem muito elevados, ou a composição da carteira for pequena relativamente a estes custos, pode ser impraticável manter um esquema deste tipo.

O delta de opções europeias *call* e *put* é exemplificado nas figuras seguintes, para vários valores temporais a aproximarem-se da data de exercício. As curvas são traçadas recorrendo à fórmula de Black-Scholes. De facto, prova-se que

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) = N(d_1) \quad \text{e} \quad \Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S}(t, S) = N(d_1) - 1,$$

em que $N(\cdot)$, d_1 e d_2 representam as mesmas quantidades da fórmula para $C(t, S)$.



Constata-se que as curvas aproximam-se de funções-passo (*step functions*) quando se aproximam da maturidade. Em termos financeiros, isto indica que os esquemas de *delta-hedging* são isentos de risco até à maturidade das opções.

Consideremos, novamente, o exemplo do esquema de *delta-hedging* anterior. Veja-se que se a opção *call* expirar claramente *in-the-money*, ou seja, se o valor do activo subjacente for claramente superior ao do preço de exercício ($S_T \gg E$), então um investidor que tenha entrado em posição curta sobre um determinado número destas opções comprou, durante o tempo de vida da opção, os activos necessários à formação da sua carteira *delta-neutral*. O investidor teve oportunidade para estabelecer uma posição delta-neutral e para efectuar o re-balanceamento à medida que o valor do activo foi variando.

Se o valor do activo descer ao ponto da opção expirar claramente *out-of-the-money* ($S_T \ll E$), o investidor ainda teve oportunidade de se desfazer, gradualmente, dos activos comprados aquando do *delta-hedging* inicial.

Note-se, uma vez mais, que esta discussão foi simplificada ao ignorar o contexto prático onde, por exemplo, os custos de transacção têm um papel relevante. De qualquer das formas, consegue-se antever que uma situação de risco, na prática, apenas pode acontecer quando a opção expirar *at-the-money* ($S_T \simeq E$).

As Letras Gregas

Dada uma função $\Pi(t, S; r, \sigma)$ a descrever o valor de uma carteira, em função do tempo t e do valor do activo S , são várias as suas derivadas parciais com interesse financeiro.

Estas derivadas parciais, conhecidas por *letras gregas*, são descritas em baixo para o caso do preço de uma opção europeia do tipo *call*.

- O teta de uma opção *call* é a sua derivada parcial em ordem a t :

$$\Theta_C = \Theta_C(t, S) = \frac{\partial C}{\partial t}(t, S).$$

O teta é geralmente negativo no caso de opções, o que faz sentido pois à medida que o tempo de vida de uma opção se aproxima da sua data de exercício, a opção tende a ficar cada vez menos valiosa.

Não faz sentido exercer nenhum tipo de *hedging* sobre a passagem do tempo. O teta é visto pelos *traders* como uma medida meramente descritiva.

- O gama de uma opção *call* é a sua derivada parcial de segunda ordem relativamente a S :

$$\Gamma_C = \Gamma_C(t, S) = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S).$$

Se o gama for pequeno, ou seja, se a curvatura de $C(t, S)$ em ordem a S for pequena, então o delta (a derivada parcial de $C(t, S)$ em ordem a S) varia moderadamente. Neste caso, os ajustes necessários à manutenção de uma carteira delta-neutral são pouco frequentes. Se o gama for elevado a situação é oposta.

É possível desenvolver esquemas que conduzam a uma carteira gama-neutral. Tais esquemas requerem um número de transacções demasiadamente elevado.

- O vega⁴ de um opção *call* é a sua derivada parcial em ordem a σ :

$$\mathcal{V}_C = \mathcal{V}_C(t, S; \sigma) = \frac{\partial C}{\partial \sigma}(t, S; \sigma).$$

É também possível desenvolver esquemas de vega-hedging para manter carteiras vega-neutrais. A neutralidade-vega destina-se a proteger uma carteira contra grandes variações no valor do activo financeiro entre dois momentos de re-balanceamento delta ou gama.

- O ró de uma opção *call* é a sua derivada parcial em ordem a r ,

$$\rho_C = \rho_C(t, S; r) = \frac{\partial C}{\partial r}(t, S; r),$$

medindo a sensibilidade de uma carteira em relação à taxa de juro sem risco.

Apenas as carteiras de dimensão considerável são frequentemente alvo de esquemas de hedging. Mesmo nestes casos, os esquemas de *hedging* resumem-se a manter as carteiras delta-neutrais. É complicado manter carteiras gama ou vega neutrais porque é difícil encontrar derivados financeiros que permitam estas operações a preços competitivos para os volumes de transacção em causa. O que acontece na prática é monitorizar, apenas, o comportamento de gama e de vega.

⁴Não existe nenhuma letra grega chamada vega. Trata-se de um jargão financeiro...

Exercícios

1. Deduza, novamente, a fórmula de Black-Scholes para o preço de opções europeias *put*, desta vez recorrendo à fórmula deduzida para as opções europeias *call* e à paridade *put-call*.
2. Prove a relação de paridade *put-call* recorrendo à equação de Black-Scholes (e supondo que esta tem solução única).
3. Prove a paridade *put-call* mostrando (em ambos os casos encontrando uma estratégia de arbitragem) que nem

$$S + P(t, S) - C(t, S) - Ee^{-r(T-t)} > 0$$

nem

$$Ee^{-r(T-t)} + C(t, S) - P(t, S) - S > 0$$

podem ocorrer.

4. Trace os perfis de ganhos e perdas em função do valor do activo na maturidade para as seguintes estratégias de transacção compósitas (envolvendo uma opção e o activo subjacente):
 - (a) Uma opção *call* em posição longa e um activo em posição curta (compra de uma *call* coberta).
 - (b) Uma opção *call* em posição curta e um activo em posição longa (venda de uma *call* coberta).
 - (c) Uma opção *put* em posição longa e um activo em posição curta (compra de uma *put* protectiva).
 - (d) Uma opção *put* em posição curta e um activo em posição longa (venda de uma *put* protectiva).
5. Trace os perfis de ganhos e perdas em função do valor do activo na maturidade para as seguintes estratégias de transacção compósitas (envolvendo opções europeias com a mesma maturidade):
 - (a) *Bull spread* com *calls*: uma posição longa numa *call* com preço de exercício E_1 e uma posição curta noutra *call* com preço de exercício E_2 ($E_1 < E_2$).
 - (b) *Bear spread* com *puts*: uma posição longa numa *put* com preço de exercício E_1 e uma posição curta noutra *put* com preço de exercício E_2 ($E_1 > E_2$).
 - (c) *Butterfly spread* com *calls*: duas posições longas em duas *calls* (o preço de exercício da primeira *call*, E_1 , é inferior ao da segunda, E_2) e duas posições curtas em duas *call* (cujo preço de exercício, E , é igual e satisfaz $E_1 < E < E_2$).

Nota: Um *spread* é uma estratégia de transacção em que se tomam duas ou mais posições do mesmo tipo (por exemplo, duas *calls* ou duas *puts*).

6. Trace os perfis de ganhos e perdas em função do valor do activo na maturidade para as seguintes estratégias de transacção compósitas (envolvendo opções europeias com a mesma maturidade):
- (a) *Straddle*: duas posições longas, numa *call* e numa *put*, com o mesmo preço de exercício.
 - (b) *Strip*: três posições longas, numa *call* e em duas *puts*, todas com o mesmo preço de exercício.
 - (c) *Strap*: três posições longas, em duas *calls* e numa *put*, todas com o mesmo preço de exercício.
 - (d) *Strangle*: duas posições longas, numa *call* e numa *put* (o preço de exercício da *call*, E_1 , é superior ao da *put*, E_2).

Nota: Estas quatro estratégias são conhecidas por estratégias de combinação (pois envolvem a tomada de posições em *calls* e *puts* ao mesmo tempo).

7. Com base na fórmula de Black-Scholes para o preço de uma opção *call* europeia, derive expressões para teta, gama, vega e ró.
8. Considere uma opção europeia sobre um activo financeiro. Suponha que $V(t, S)$ depende apenas de t [$V(t, S) \equiv V(t)$].
- (a) Resolva, nestas circunstâncias, o problema de valor final formado pela equação de Black-Scholes e pela condição de valor final $V(T) = E$.
 - (b) Qual é o valor da função delta associada à opção no caso da alínea (a)? Existirá necessidade de recorrer a *delta-hedging*?

Aula 10: O Método Binomial

O método binomial permite calcular, numericamente, o preço ou valor de opções. Nesta aula debruçar-nos-emos, essencialmente, sobre opções do estilo europeu, na sua versão mais simples. No entanto, este método é facilmente aplicável a outro tipo de opções, incluindo os casos em que o activo paga dividendos ou em que a opção pode ser exercida antes da maturidade do contrato (estilo americano).

O método binomial é uma técnica numérica da família das diferenças finitas. A sua aplicação pressupõe a discretização do valor do activo subjacente à opção ao longo de um número finito de instantes temporais. Em cada instante temporal considera-se um número, igualmente finito, de valores possíveis para o activo.

O método binomial parte de um valor S^0 para o valor de S no instante t^0 . No instante seguinte, $t^1 = t^0 + \Delta t$, admitem-se dois cenários para o respectivo valor de S^1 : ou aumenta para cS^0 ou diminui para bS^0 , em que $c > 1$ e $b \in (0, 1)$. Estas variações ocorrem com uma probabilidade determinada: a probabilidade de subir para $S_1^1 = cS^0$ é dada por $p \in (0, 1)$ e a probabilidade de descer para $S_0^1 = bS^0$ vale $1 - p$.

No instante temporal seguinte, $t^2 = t^1 + \Delta t$, aplicam-se os mesmos passos para os dois valores possíveis de S^1 . Desta forma, admite-se que o valor de S^2 possa ser

$$cS_1^1 \text{ (com probabilidade } p) \quad \text{ou} \quad bS_1^1 \text{ (com probabilidade } 1 - p)$$

ou

$$cS_0^1 \text{ (com probabilidade } p) \quad \text{ou} \quad bS_0^1 \text{ (com probabilidade } 1 - p).$$

Feitas as contas, constatamos que existem apenas três valores possíveis para S^2 :

$$S_2^2 = c^2 S_0^0, \quad S_1^2 = cb S_0^0, \quad S_0^2 = b^2 S_0^0.$$

(Por uma questão de notação substituímos S^0 por S_0^0 .) Estes valores podem ser representados graficamente através da árvore representada na figura seguinte.

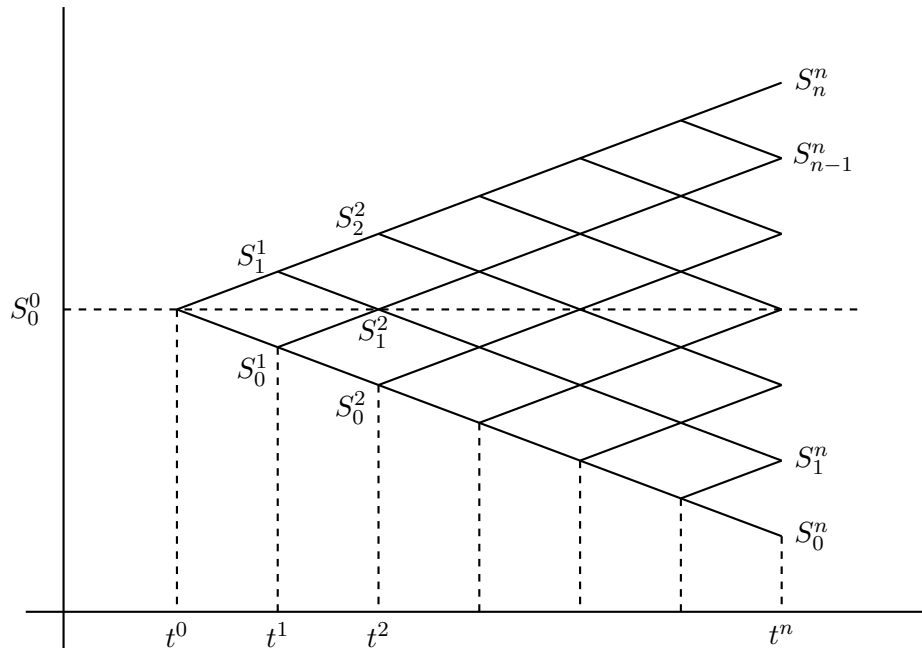
Verifica-se, facilmente, que dois dos caminhos que emanam de S_0^0 encontram-se passados dois instantes temporais, o que é uma consequência de $bS_1^1 = cS_0^1$. No instante temporal $t^3 = t^2 + \Delta t$, consideram-se quatro valores possíveis para S^3 . De uma forma geral, no instante t^j , o valor de S^j pode assumir $j + 1$ valores:

$$S_i^j = c^i b^{j-i} S_0^0, \quad i = 0, \dots, j.$$

Na maturidade de uma opção, $T = t^0 + n\Delta t$, são $n + 1$ os valores determinados:

$$S_i^n = c^i b^{n-i} S_0^0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Estamos a supor que $\Delta t = (T - t^0)/n$, em que n é objecto de escolha e Δt função de T e de n .



O método binomial calcula, numa primeira fase, os valores de S_i^n , $i = 0, \dots, n$. O esforço computacional requerido para o efeito, medido em termos do número de operações aritméticas elementares, é da ordem de n^2 . Nesta fase, o método percorre a árvore da esquerda para a direita.

O espaço de armazenagem exigido é da ordem de n , uma vez que não é necessário, como veremos de seguida, guardar os valores intermédios S_i^j com $j < n$ (e mesmo que fosse isso poderia ser feito implicitamente).

Numa segunda fase, o método binomial gera valores para o preço de opções, seguindo um sentido temporal inverso, da maturidade T para o instante inicial t^0 . Considere-se o caso de uma opção europeia do tipo *call*, com maturidade T e preço de exercício E . No instante $t^n = T$, o valor da opção deverá coincidir com o seu valor intrínseco:

$$C_i^n = \max\{S_i^n - E, 0\} \quad i = 0, \dots, n.$$

É apenas neste momento do método binomial, quando aplicado a opções europeias, que se faz a distinção entre *puts* e *calls*. No caso das *puts* ter-se-ia

$$P_i^n = \max\{E - S_i^n, 0\} \quad i = 0, \dots, n.$$

O método binomial calcula, no instante temporal t^{n-1} , os valores

$$C_i^{n-1} = e^{-r\Delta t} (pC_{i+1}^n + (1-p)C_i^n), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Ou seja, os valores para os preços da opção no instante temporal t^{n-1} são os *valores esperados* em t^n , descontados à taxa de juro sem risco r .

Para percorrer a árvore da direita para a esquerda, aplicar-se-ia

$$C_i^j = e^{-r\Delta t} (pC_{i+1}^{j+1} + (1-p)C_i^{j+1}), \quad i = 0, \dots, j,$$

para j a variar de $n - 2$ até 0.

O custo desta segunda fase é, também, da ordem de n^2 em número de operações e da ordem de n em espaço de armazenamento.

Testou-se, em MATLAB, o método binomial para $S^0 = 20$, $t^0 = 0$, $E = 22$, $r = 0.05$ e $\sigma = 0.2$. Fez-se $p = 0.5$. As escolhas de c e de b são as descritas mais à frente para este valor de p . O resultado encontra-se relatado na tabela seguinte para distâncias à maturidade de 3, 6 e 9 meses. O valor de T é dado em anos.

T	$C(t^0, S^0)$	$C(t^0, S^0) - C_0^0$		
		$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
0.25	23.82263	-0.09079	0.00640	0.00084
0.50	58.12942	-0.00253	0.02388	-0.00209
0.75	90.44026	0.10250	-0.02710	0.00294

A segunda coluna desta tabela relata o valor da fórmula de Black-Scholes em (t^0, S^0) . Para os três valores de n mencionados, indica-se o erro entre o valor C_0^0 aproximado pelo método binomial e o valor $C(t^0, S^0)$ da fórmula de Black-Scholes (o qual se toma como exacto apesar do seu cálculo requerer integração numérica).

A Escolha dos Parâmetros

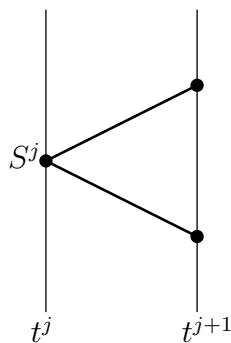
A escolha dos parâmetros c (salto para cima), b (salto para baixo) e da probabilidade p segue uma ideia simples, a de fazer com que a média e a variância do caminho aleatório discreto gerado pelo método binomial coincidam com a média e variância lognormais do activo subjacente, sob um cenário de risco neutral (em que a deriva μ é substituída pela taxa de juro sem risco r).

Sob a hipótese de risco neutral sabe-se que, partindo da observação determinística S^j feita no instante temporal t^j , se tem que

$$\hat{E}(S_{t^{j+1}}) = e^{r\Delta t} S^j.$$

Por outro lado, o valor esperado de S^{j+1} no caminho aleatório binomial discreto, partindo da observação determinística S^j , é dado por

$$E_{bin}(S^{j+1}) = (pc + (1-p)b) S^j.$$



Seguindo a ideia apresentada, surge a primeira das equações que relaciona os três parâmetros em causa:

$$pc + (1 - p)b = e^{r\Delta t}. \quad (4)$$

A segunda equação aparece igualando as duas correspondentes variâncias. Sob a hipótese de risco neutral sabe-se que, partindo da observação determinística S^j feita no instante temporal t^j , se tem que

$$\hat{E}((S_{t^{j+1}})^2) = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}(S^j)^2.$$

Desta forma vem que

$$\hat{V}(S_{t^{j+1}}) = e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2\Delta t} - 1) (S^j)^2.$$

O valor esperado de $(S^{j+1})^2$ no caminho aleatório binomial discreto, partindo da observação determinística S^j , é dado por

$$E_{bin}((S^{j+1})^2) = (pc^2 + (1 - p)b^2) (S^j)^2.$$

Assim sendo, e recorrendo à primeira equação já desenvolvida,

$$V_{bin}(S^{j+1}) = (pc^2 + (1 - p)b^2 - e^{2r\Delta t}) (S^j)^2.$$

Igualando as duas variâncias⁵, surge, assim, a segunda das equações que relaciona os três parâmetros p , c e b :

$$pc^2 + (1 - p)b^2 = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}. \quad (5)$$

As equações (4) e (5) deixam um grau livre na determinação dos três parâmetros. Existem, essencialmente, duas escolhas.

⁵Bastaria, aliás, ter igualado os respectivos momentos de segunda ordem.

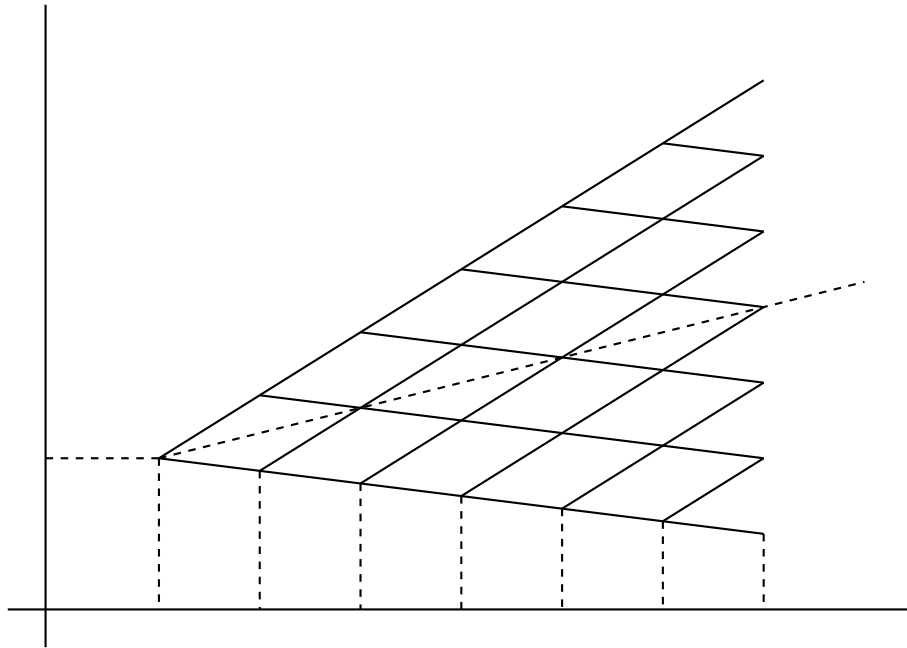
A primeira escolha consiste em tomar $p = 0.5$. Desta escolha resultam os seguintes valores para c e b :

$$c = e^{r\Delta t} \left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right) \quad \text{e} \quad b = e^{r\Delta t} \left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right).$$

Note-se que se Δt for escolhido tal que

$$2 > e^{\sigma^2\Delta t} + e^{-2r\Delta t}$$

então $cb > 1$. Neste caso, a árvore acompanha a tendência média de subida do activo subjacente (dada pela deriva), como se pode ver pela figura seguinte.



A outra escolha passa por fazer $c = 1/b$. Recorrendo a (4) e (5) e fazendo as contas, vem que

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - b}{c - b}, \quad c = a + \sqrt{a^2 - 1} \quad \text{e} \quad b = a - \sqrt{a^2 - 1},$$

com

$$a = \frac{1}{2} \left(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t} \right) > 1.$$

Neste caso, seria necessário escolher Δt apropriadamente para que as probabilidades p e $1 - p$ fossem ambas positivas e o método binomial pudesse ser aplicado. A árvore corresponderia à traçada no princípio da aula, em que os valores de $S_{j/2}^j$ são os mesmos para todo o j par de 0 até n . Aparentemente esta árvore não acompanha a tendência de subida esperada do activo (relacionada com a sua deriva). Porém, as probabilidades de subida (p) e de descida ($1 - p$) são diferentes. Por exemplo, se $\Delta t > \log(c + b)/(2r)$ então $p > 1 - p$.

Exercícios

1. Prove que sob a hipótese de risco neutral (em que a deriva μ é substituída pela taxa de juro sem risco r na distribuição lognormal do activo) e partindo da observação determinística S^j feita no instante temporal t^j , se tem que

$$\hat{E}((S_{t^{j+1}})^2) = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}(S^j)^2.$$

2. Deduza, a partir das equações (4) e (5), as expressões dadas para c e b , no caso $p = 1/2$.
3. Deduza, a partir das equações (4) e (5), as expressões dadas para p , c e b , no caso $c = 1/b$.
4. Considere um método trinomial em que, para todo o estado do activo financeiro, se consideram três estados possíveis, subida por um factor $c > 1$, manutenção e descida por um factor $b = 1/c \in (0, 1)$.
 - (a) Desenhe a árvore para três instantes temporais (t^0 , t^1 e t^2), indicando os valores possíveis nos instantes temporais t^1 e t^2 em função de S_0^0 e de c .
 - (b) Considere equiprováveis as três situações (subida, manutenção e descida). Calcule, com recurso à esperança do activo sob a hipótese de risco neutral, um valor para c (em função da taxa de juro r constante e com capitalização contínua e do incremento temporal Δt).

Aula 11: Opções sobre Activos que Pagam Dividendos

Quando o activo subjacente a uma opção (europeia) é uma acção ou um índice accionista, a modelação do seu preço pode ou deve considerar o facto do activo proporcionar pagamento de dividendos. Estes pagamentos consistem, basicamente, na distribuição de lucros da empresa aos seus accionistas.

Os dividendos podem ser modelados de forma determinística ou estocástica e, no primeiro caso, em modo contínuo ou discreto.

Dividendos Pagos a Uma Taxa Constante

Existem inúmeras formas de enquadrar o pagamento de dividendos. Começamos por considerar a situação em que o pagamento de dividendos é feito de forma contínua. Na prática tal nunca acontece, pois as companhias pagam os seus dividendos apenas umas poucas vezes ao longo do ano. Porém, se a opção for sobre um índice accionista (como, por exemplo, o S&P 500), esta hipótese faz algum sentido pois as ocorrências de dividendos são tão frequentes que podem ser modeladas como se de um fenómeno contínuo se tratassem.

Suponhamos que o activo paga um dividendo a uma taxa constante $d \in (0, 1)$ com capitalização contínua. Trata-se, obviamente, da forma mais simples de considerar dividendos pagos continuamente. Pelo menos dois tipos de opções (sobre índices accionistas e sobre taxas de câmbio com um tempo de vida curto) são passíveis deste tipo de modelação.

No âmbito da derivação do modelo de Black-Scholes, o valor da carteira $\Pi(t, S)$, ao ser ajustado à presença de dividendos, assume a forma

$$\Pi(t, S) = \Delta (S + tSd) - V(t, S).$$

O novo termo ΔtSd corresponde aos dividendos pagos ao longo de t unidades de tempo à taxa d , relativos a Δ unidades do activo subjacente, no pressuposto de que $\Delta t = t - t_0 = t$ é relativamente pequeno (com $t_0 = 0$), tendo-se usado $e^{td}S \simeq (1 + td)S = S + tdS$.

A derivada parcial da função que define a carteira, em ordem a S , é nula quando

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S) = 0 \iff \Delta = \frac{1}{1 + td} \frac{\partial V}{\partial S}(t, S).$$

Procedendo da mesma forma que na derivação da equação de Black-Scholes, chega-se a uma equação com derivadas parciais (determinística) da forma

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) = -\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) + \Delta Sd.$$

Prossegue-se a metodologia conhecida, raciocinando em termos de ausência de arbitragem (instantânea):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) = r\Pi(t, S).$$

Combinando as duas últimas equações,

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) + \Delta S d = r(\Delta(1 + td)S - V(t, S)).$$

Com a escolha para Δ acima mencionada, obtém-se a EDP

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) + \left(r - \frac{d}{1 + td}\right) S \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) - rV(t, S) = 0.$$

Muitos autores simplificam esta equação considerando⁶

$$\frac{d}{1 + td} \simeq d$$

(o que acontece quando t não é relativamente muito grande).

Assim sendo, a equação que modela o preço de uma opção europeia *call* quando o activo subjacente paga dividendos a uma taxa constante é a EDP:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S) + (r - d) S \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) - rC(t, S) = 0.$$

As condições finais mantêm-se as mesmas:

$$C(T, S) = \max\{S - E, 0\}.$$

As condições de fronteira para $S \rightarrow 0^+$ também não sofrem alteração:

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} C(t, S) = 0, \quad t \geq 0.$$

Existe a necessidade, no entanto, de incluir o pagamento de dividendos nas condições de fronteira para $S \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} S e^{-d(T-t)} - C(t, S) = E e^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0.$$

A nova EDP difere da de Black-Scholes apenas no coeficiente que multiplica o termo $S \partial C / \partial S(t, S)$ que, assim, passa a ser diferente do simétrico do coeficiente que multiplica o termo $C(t, S)$. Aparentemente, esta discrepância obrigar-nos-ia a ter de calcular de novo a expressão analítica da solução da nova EDP. Porém, se fizermos a mudança de variáveis dependentes

$$\bar{C}(t, S) = e^{d(T-t)} C(t, S),$$

⁶Esta derivação foi ligeiramente diferente da que se pode encontrar em outros textos de apoio. Obter-se-ia directamente d em vez de $d/(1 + td)$ se se tivesse considerado S constante em tSd aquando da aplicação da Fórmula de Itô.

obtemos uma EDP que é a equação de Black-Scholes com $r - d$ no lugar de r . Desta forma, multiplicando $\bar{C}(t, S) = e^{d(T-t)}C(t, S)$ por $e^{-d(T-t)}$, concluímos que o preço de uma opção europeia do tipo *call*, a pagar dividendos a uma taxa constante d , é igual a

$$C(t, S) = e^{-d(T-t)}SN(\bar{d}_1) - e^{-r(T-t)}EN(\bar{d}_2),$$

em que

$$\bar{d}_1 = \frac{\log(S/E) + (r - d + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

e

$$\bar{d}_2 = \frac{\log(S/E) + (r - d - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

com $S > 0$ e $t \in [0, T)$. Quando $t = T$, a fórmula é dada por $C(T, S) = \max\{S - E, 0\}$.

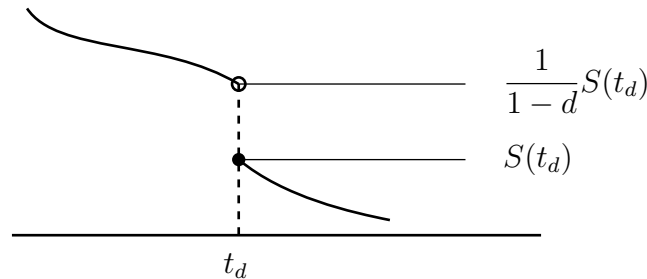
Dividendos Pagos de Forma Discreta

Suponhamos, agora, que o activo subjacente paga dividendos em determinadas instâncias temporais. Para simplificar a apresentação, consideremos apenas uma dessas instâncias, que designaremos por t_d . Seja d a taxa paga no instante t_d . Nesta altura, os detentores do activo recebem um pagamento igual a Sd .

Designemos por t_d^- e t_d^+ instantes temporais que ocorrem respectivamente antes e depois de t_d . Na ausência de arbitragem, tem-se forçosamente que

$$S(t_d^+) = S(t_d^-) - dS(t_d^-) \iff S(t_d^-) = \frac{1}{1 - d}S(t_d^+)$$

pois, caso contrário, seria possível comprar o activo antes de t_d e vendê-lo logo a seguir com um lucro (instantâneo e sem risco) de $dS(t_d^-)$. Enquanto função do tempo, o valor do activo sofre uma descontinuidade em t_d . A função $S(t)$ tende para $S(t_d)$ à direita de t_d e para $S(t_d)/(1 - d)$ à esquerda (como se representa na figura a seguir).



A análise do preço de opções europeias considera, porém, t e S como variáveis independentes. Na presença de um dividendo pago (a uma taxa d) quando $t = t_d$, o preço de

uma opção europeia deve seguir a equação de Black-Scholes para $t \in [t_d, T]$. Assim, e no caso de uma opção do tipo *call*, vem que esse preço é dado por

$$C_d(t, S) = C(t, S; E),$$

em que $C(t, S; E)$ designa a fórmula de Black-Scholes para uma opção europeia *call* com maturidade T e preço de exercício E .

Em $t = t_d$, o valor de $C_d(t, S)$ sofre uma descontinuidade. Para $t < t_d$, a equação de Black-Scholes tem que ser resolvida com uma condição final diferente da das opções europeias *call* sem dividendos. Esta condição reflecte o pagamento de um dividendo em t_d e, de acordo com a discussão tida em cima, toma a forma

$$C_d(t_d, S) = C(t_d, S/(1-d); E).$$

Resumindo, o processo de cálculo do valor $C_d(t, S)$ de uma opção europeia *call*, com maturidade T e preço de exercício E , sobre um activo a pagar dividendos em $t = t_d$ a uma taxa d , é dado por (ver, também, figura seguinte):

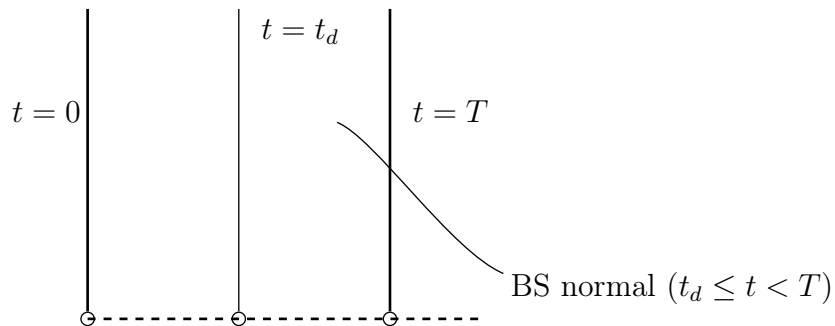
1. Resolver a equação de Black-Scholes para $t_d \leq t \leq T$ com

$$C_d(T, S) = \max\{S - E, 0\}$$

(recorrendo à fórmula de Black-Scholes).

2. Resolver a equação de Black-Scholes para $t_{inicial} \leq t < t_d$ com

$$C_d(t_d, S) = C(t_d, S/(1-d); E).$$



Uma forma de aproximar $C_d(t, S)$, quando $t < t_d$, seria considerar que

$$C_d(t, S) \simeq C(t, S/(1-d); E).$$

Desta forma, evitar-se-ia integrar numericamente a equação de Black-Scholes, regressivamente, a partir de t_d . Fica como exercício provar que, curiosamente, se tem que

$$C(t, S/(1-d); E) = \frac{1}{1-d} C(t, S; (1-d)E).$$

Este processo para o cálculo de $C_d(t, S)$ é facilmente generalizável a um número finito de ocorrências de dividendos.

Exercícios

1. Faça a mudança de variáveis $\bar{C}(t, S) = e^{d(T-t)}C(t, S)$ para obter a equação referida na modelação de preços de opções sobre activos que pagam dividendos a uma taxa constante com capitalização contínua.
2. Mostre que a equação de Black-Scholes é invariante ao escalonamento na variável independente S , no sentido em que continua a ser satisfeita depois de uma mudança de variável do tipo $S = c\bar{S}$, com $c > 0$. **Sugestão:** Substitua (t, S) por (t, \bar{S}) nos argumentos da equação e escreva as derivadas em ordem a S como derivadas em ordem a \bar{S} .
3. Prove que $C(t, S/(1-d); E) = \frac{1}{1-d}C(t, S; (1-d)E)$.
4. O objectivo deste exercício é deduzir, novamente, a fórmula de Black-Scholes para opções europeias do tipo *call* quando o activo subjacente paga dividendos a uma taxa contínua e constante $d \in (0, r)$. Esta fórmula foi deduzida nesta aula recorrendo ao Lema de Itô e à equação de Black-Scholes. Prove, agora, a mesma fórmula, mas através de um argumento de risco neutral (ver a aula correspondente), substituindo a deriva μ por $r - d$.
5. Volte a deduzir os valores de p , c e de b da aula anterior, para as duas escolhas consideradas, mas na situação em que o activo subjacente paga dividendos a uma taxa contínua e constante $d \in (0, r)$.
6. Repita a experiência em MATLAB relatada na aula anterior, para o caso em que o activo subjacente paga dividendos a uma taxa $d = 0.02$. Compare, de forma crítica, os valores obtidos para o preço das opções com os obtidos no caso em que não há dividendos.

Aula 12: Preços de Contratos Forward e de Contratos de Futuros e de Opções sobre Futuros

Preços de Contratos Forward

Quem assume uma posição longa um contrato *forward* compra, na maturidade T do mesmo, um activo subjacente por um determinado preço F . A contraparte assume uma posição curta e vende o activo por F em T . Existe uma entrega diferida mas não há opção ou escolha. A questão que se coloca aqui é saber qual será o preço F .

A atribuição de preço aos contratos *forward* é facilitada pelo facto do risco ser eliminado no estabelecimento do contrato, na presença de uma taxa de juro sem risco. Dir-se-ia que um contrato *forward* necessita de apenas uma operação de cobertura ou *hedging* (feita na celebração do contrato).

Suponhamos que o activo subjacente ao contrato *forward* vale $S(t)$ no instante t . Pretende-se determinar o preço F do contrato *forward* de forma a eliminar qualquer possibilidade de arbitragem. Seja r uma taxa de juro com capitalização contínua (constante e sem risco) e T a data de exercício ou maturidade do contrato. É fácil raciocinar em termos de arbitragem e concluir que o preço F deve satisfazer

$$F = S(t)e^{r(T-t)}.$$

(O raciocínio segue a mesma direcção dos exercícios das primeiras aulas e fica relegado para exercício.)

Uma outra maneira de encarar este resultado é através da paridade *put-call*. Considere-se uma carteira constituída por uma posição curta numa opção europeia *call*, uma posição longa numa opção europeia *put* (ambas com a mesma maturidade T e o mesmo preço de exercício, agora designado por F) e uma posição longa num activo (supõe-se que se detém o activo). Esta carteira vale

$$S + P(t, S) - C(t, S).$$

Logo, em $t = T$, vale F , o mesmo de uma posição curta num contrato *forward*. De forma semelhante à utilizada no caso da paridade *put-call*, tem-se, utilizando argumentos de arbitragem, que

$$S + P(t, S) - C(t, S) = Fe^{-r(T-t)}.$$

Se suposermos que essa carteira não tem, para quem detém o activo como numa posição curta num *forward*, qualquer custo no momento da sua constituição, vem que $P(t, S) = C(t, S)$. Assim sendo, $F = Se^{r(T-t)}$.

Os contratos de futuros são contratos *forward* modificados para reduzir o risco de incumprimento e potenciar a liquidez. Os preços de ambos coincidem sob hipóteses relacionadas com a forma como são tidos em conta os ganhos ou perdas que podem ocorrer durante o tempo de vida dos futuros (ver apêndices).

Preços de Opções sobre Futuros

Tem interesse, por vezes, estabelecer contratos de opções sobre os preços dos contratos de futuros porque estes têm grande liquidez e um custo de transacção reduzido.

Uma opção (europeia) sobre um futuro tem um preço que depende do instante temporal t e do preço ou valor F do futuro subjacente. Como $F = Se^{r(T-t)}$, basta fazer uma mudança de variáveis na equação de Black-Scholes, passando da variável independente S para a variável independente F e da variável dependente $V(t, S)$ para a variável dependente $\hat{V}(t, F)$

$$V(t, S) = \hat{V}(t, F) = \hat{V}(t, F(t, S)) \quad \text{com} \quad F(t, S) = Se^{r(T-t)}.$$

Omitindo os argumentos temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{V}}{\partial F} (rSe^{r(T-t)}), \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial \hat{V}}{\partial F} e^{r(T-t)}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial F^2} e^{2r(T-t)}. \end{aligned}$$

O resultado é a equação

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t}(t, F) + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial F^2}(t, F) - r\hat{V}(t, F) = 0$$

que, comparativamente à de Black-Scholes, não apresenta o termo relativo à derivada parcial de $\hat{V}(t, F)$ em ordem a F .

A expressão analítica para a solução pode ser determinada recorrendo ao caso em que são pagos dividendos de forma contínua, escolhendo $d = r$. No caso de opções *call* vem que

$$\hat{C}(t, F) = e^{-r(T-t)} (FN(\bar{d}_1) - EN(\bar{d}_2)),$$

em que

$$\bar{d}_1 = \frac{\log(F/E) + \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

e

$$\bar{d}_2 = \frac{\log(F/E) - \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

com $F > 0$ e $t \in [0, T)$. Quando $t = T$, a fórmula é dada por $\hat{C}(T, F) = \max\{F - E, 0\}$.

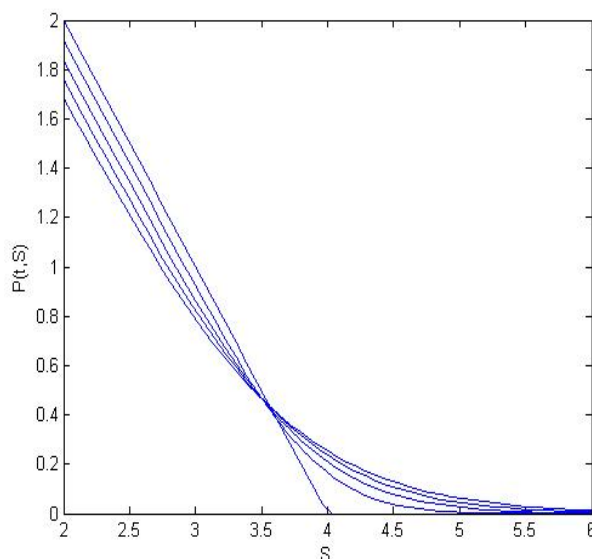
Exercícios

1. Mostre que quando $F \neq S(t)e^{r(T-t)}$ num contrato *forward* é possível encontrar uma possibilidade de arbitragem. Considere os casos $F < S(t)e^{r(T-t)}$ e $F > S(t)e^{r(T-t)}$ separadamente.
2. Deduza a equação que modela o preço de opções sobre futuros com base na equação de Black-Scholes e nas mudanças de variável sugeridas.
3. Quais são as condições que a taxa de juro e a volatilidade associadas ao comportamento do preço dos futuros devem satisfazer para que $\hat{V}(t, F) = F^2$ seja uma solução da equação que modela o valor de opções sobre futuros?

Aula 13: Opções Americanas

Uma opção americana permite ao detentor ou comprador do contrato exercer o direito sobre o activo subjacente em qualquer momento do tempo de vida da opção (direito esse que é de compra ou de venda consoante se trate de uma *call* ou de uma *put*). A amplitude da escolha associada a uma opção americana é superior à de uma opção europeia. Assim sendo, são expectáveis duas coisas: o valor de uma opção americana não deverá ser inferior ao de uma opção europeia; a modelação do preço de uma opção americana será mais complicada do que o da sua congénere europeia.

No caso de uma opção europeia *put*, é fácil verificar (veja-se a figura seguinte) que o valor de uma opção dado pela fórmula de Black-Scholes é inferior, para valores relativamente pequenos do activo subjacente, ao seu valor intrínseco na maturidade (ou seja ao valor da função que descreve os ganhos e perdas na maturidade da opção).



Seja $P(t, S)$ o valor de uma opção americana do tipo *put* no instante t e para um valor S do activo subjacente. Ora, se o valor de S for tal que $P(t, S) < \max\{E - S, 0\}$, constata-se uma possibilidade de arbitragem. Bastaria a um especulador ou agente de arbitragem adquirir uma opção ao preço $P(t, S)$ e exercê-la imediatamente (o que seria possível por a opção ser do tipo americana). Este esquema de arbitragem daria, sem qualquer risco, um lucro imediato de $E - S - P(t, S)$. Resulta, desta observação, a obrigatoriedade de impor a restrição

$$P(t, S) \geq \max\{E - S, 0\}.$$

No desenvolvimento do modelo de Black-Scholes para opções europeias, a ausência de arbitragem traduziu-se, para uma carteira composta por uma posição curta numa opção e

por uma posição longa num determinado número Δ de activos subjacentes a essa opção, pela relação

$$\frac{d\Pi}{dt}(t, S) = r\Pi(t, S).$$

No caso das opções americanas, esta igualdade não faz sentido, porque o retorno desta carteira pode ser inferior ao de um investimento a uma taxa de juro sem risco r . Quem detém a posição curta pode ser confrontado com um exercício prematuro da opção. Desta forma, quando a opção é americana tem-se, apenas, que

$$\frac{d\Pi}{dt}(t, S) \leq r\Pi(t, S).$$

Seguindo a derivação do modelo de Black-Scholes para opções europeias, obtém-se, para opções americanas, a *inequação diferencial*

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial P}{\partial S}(t, S) - rP(t, S) \leq 0.$$

Como vimos anteriormente, na ausência de arbitragem, existem apenas duas possibilidades para o valor de $P(t, S)$: ou é igual a $\max\{E - S, 0\}$ ou é maior do que $\max\{E - S, 0\}$. Vamos simplificar a discussão considerando que $S < E$.

Quando $P(t, S) = \max\{E - S, 0\} = E - S$, a estratégia óptima para o detentor da opção consiste em exercer o seu direito (pois $P(t, S) < E - S$ não pode acontecer). Se substituirmos $P(t, S)$ por $E - S$ na inequação diferencial obtemos

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial P}{\partial S}(t, S) - rP(t, S) = -rE < 0.$$

Quando $P(t, S) > \max\{E - S, 0\} = E - S$, a estratégia óptima para o detentor da opção consiste em mantê-la (caso contrário o valor da sua carteira diminui). Neste caso, a inequação diferencial é verificada como uma equação diferencial (a equação de Black-Scholes).

Como o valor de $P(t, S)$ é desconhecido — não convém esquecer que este valor é o objecto da modelação em curso —, não se pode definir, à partida, quando é que acontece uma possibilidade ou a outra. Vamos supor que existe uma curva, no plano $t \times S$, a separar os dois casos. Para simplificar ainda mais a nossa discussão, vamos supor que esta curva é representável por uma função de t . Seja $S_f(t)$ essa função.

Tem-se, assim, que $P(t, S) = \max\{E - S, 0\}$ quando $0 < S < S_f(t)$ e que $P(t, S) > \max\{E - S, 0\}$ quando $S_f(t) < S < +\infty$. A função $S_f(t)$ é desconhecida e a sua determinação faz parte do problema associado à modelação do valor de $P(t, S)$.

Pretende-se, deste modo, calcular $P(t, S)$ e $S_f(t)$ tais que

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial P}{\partial S}(t, S) - rP(t, S) < 0, \quad 0 < S < S_f(t),$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial P}{\partial S}(t, S) - rP(t, S) = 0, \quad S_f(t) < S < +\infty,$$

com $S_f(t)$ a satisfazer as condições

$$P(t, S_f(t)) = \max\{E - S_f(t), 0\}, \quad \frac{\partial P}{\partial S}(t, S_f(t)) = -1$$

e $P(t, S)$ a satisfazer a condição final para $t = T$ e as condições de fronteira quando S tende para 0^+ e para $+\infty$ dadas para as opções europeias *put*.

A Fronteira Livre

O problema acima colocado é conhecido como um *problema de fronteira livre*⁷. A fronteira é definida pelo gráfico da função $S_f(t)$ no plano $t \times S$. De um lado da fronteira a opção deve ser exercida e do outro deve ser mantida. Esta fronteira é *livre* por ser desconhecida e constituir parte da solução do problema.

É típico colocar condições sobre a fronteira livre para garantir propriedades acerca da solução dos respectivos problemas (como, por exemplo, a existência e a unicidade de solução). No nosso caso, as condições impostas sobre a fronteira

$$P(t, S_f(t)) = \max\{E - S_f(t), 0\}, \quad \frac{\partial P}{\partial S}(t, S_f(t)) = -1$$

são suficientes para garantir a existência e a unicidade de solução do problema de fronteira livre. O tratamento de problemas de fronteira livre está fora do âmbito deste curso. O conhecimento de expressões analíticas para estes problemas está circunscrito a poucos casos, muito simples. Na esmagadora maioria dos problemas, a determinação de soluções tem que ser feita de forma aproximada, recorrendo a métodos numéricos.

A condição de fronteira $P(t, S_f(t)) = \max\{E - S_f(t), 0\}$ esteve na base da definição da fronteira livre.

A motivação para a outra condição, $\partial P/\partial S(t, S_f(t)) = -1$, resulta imediatamente se supusermos que a derivada parcial $\partial P/\partial S$ existe e é contínua. Como anteriormente, considera-se apenas o caso $S_f(t) < E$. Como em $S = S_f(t) < E$ a derivada de $\max\{E - S, 0\}$ vale -1 , vem que

$$\frac{\partial P}{\partial S}(t, S_f(t)) = -1.$$

(Seria fácil argumentar que não seria possível ter

$$\frac{\partial P}{\partial S}(t, S_f(t)) < -1.$$

Se tal acontecesse, a função $P(t, S)$ decresceria, a partir de $S = S_f(t)$ (para a direita), mais rapidamente do que o valor intrínseco $\max\{E - S, 0\}$, o que não é possível pelos argumentos apresentados no princípio da aula.)

⁷Os exemplos mais conhecidos de problemas de fronteira livre são os problemas do obstáculo e o problema de Stefan para a fusão do gelo.

Uma Reformulação em Problema de Complementaridade Linear

Fica sem demonstração provar que o problema de fronteira livre anterior é equivalente ao problema de complementaridade linear, dado por

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial P}{\partial S}(t, S) - rP(t, S) \right) (P(t, S) - \max\{E - S, 0\}) = 0,$$

$$P(t, S) \geq \max\{E - S, 0\},$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(t, S) + rS \frac{\partial P}{\partial S}(t, S) - rP(t, S) \leq 0,$$

com $P(t, S)$ a satisfazer a condição final para $t = T$ e as condições de fronteira quando S tende para 0^+ e para $+\infty$ dadas para as opções europeias *put*.

A primeira condição deste problema designa-se por condição de complementaridade e garante que a solução satisfaz a equação de Black-Scholes ou, então, coincide com o valor intrínseco da opção. A relação de complementaridade, envolvendo um produto, é não linear, mas o problema diz-se linear no mesmo sentido em que a equação de Black-Scholes é também linear.

Na formulação em problema de complementaridade linear, a fronteira livre não aparece explicitamente. Esta formulação é mais conveniente para o desenvolvimento de métodos numéricos.

O Método Binomial para Opções Americanas

A primeira fase do método binomial para opções americanas é semelhante à do estilo europeu, na forma de calcular S_i^n , $i = 0, \dots, n$. No entanto, guardam-se, nesta fase, todos os valores intermédios S_i^j , para $j = 0, \dots, n - 1$ e $i = 0, \dots, j$.

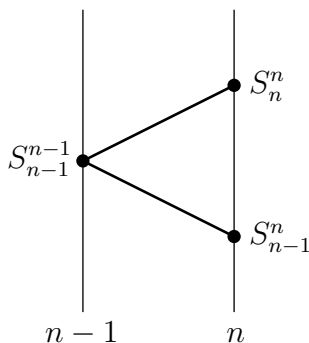
Na maturidade $t^n = T$, o valor da opção americana deverá coincidir com o seu valor intrínseco (apresentamos, apenas, o tipo *put*):

$$P_i^n = \max\{E - S_i^n, 0\}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Porém, no instante temporal t^{n-1} , é preciso entrar em consideração com a possibilidade de um exercício prematuro da opção:

$$P_i^{n-1} = \max\{\max\{E - S_i^{n-1}, 0\}, e^{-r\Delta t} (pP_{i+1}^n + (1-p)P_i^n)\}, \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

A figura seguinte ilustra os nós da árvore binomial aqui utilizados quando $i = n - 1$.



A árvore é percorrida da direita para a esquerda, contemplando-se a mesma possibilidade de exercício prematuro:

$$P_i^j = \max \{ \max \{ E - S_i^j, 0 \}, e^{-r\Delta t} (pP_{i+1}^{j+1} + (1-p)P_i^{j+1}) \}, \quad i = 0, \dots, j,$$

com j a variar de $n-2$ até 0.

Testou-se, em MATLAB, o método binomial para opções *put* americanas nas condições da aula onde este foi dado ($S^0 = 20$, $t^0 = 0$, $E = 22$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$ e $p = 0.5$). O resultado encontra-se relatado na tabela seguinte para distâncias à maturidade de 3, 6 e 9 meses. O valor de T é dado em anos.

T	$P(t^0, S^0)$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
0.25	196.49	206.68	206.61	206.61
0.50	203.81	219.40	219.38	219.39
0.75	209.46	230.30	230.31	230.30

O valor destas opções é claramente superior ao valor das correspondentes opções *put* europeias (dado por $P(t^0, S^0)$).

Exercícios

1. Mostre que no caso de uma opção do tipo *call* (sobre um activo que não paga dividendos) nunca é *optimal* exercer a opção antes da maturidade. (Ou seja, prove que o valor de uma opção europeia *call* dado pela fórmula de Black-Scholes é sempre superior ao seu valor intrínseco, para valores temporais anteriores à maturidade.)
2. Considere um investidor que toma uma posição longa numa opção *call* americana com um preço de exercício de 10 euros. A opção custou 2 euros. Que valores do activo subjacente dão origem a arbitragem no momento da compra da opção?
3. Suponha que o preço $P(S)$ de uma opção do tipo *put* depende apenas do valor S do activo subjacente. Sejam E o preço de exercício, r a taxa de juro sem risco e σ a volatilidade do activo subjacente.

- (a) Mostre que a equação de Black-Scholes se simplifica, para ficar na seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 P}{dS^2}(S) + rS \frac{dP}{dS}(S) - rP(S) = 0.$$

Classifique a equação obtida.

- (b) Seja $c = 2r/\sigma^2$. Prove que esta equação se reduz à forma

$$\frac{d^2 \bar{P}}{dx^2}(x) + (c - 1) \frac{d\bar{P}}{dx}(x) - c\bar{P}(x) = 0.$$

- (c) Calcule λ_1 e λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) de forma a que a solução geral da equação se escreva como:

$$P(S) = C_1(S/E)^{\lambda_1} + C_2(S/E)^{\lambda_2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- (d) Utilize as condições de fronteira das opções *put* quando $S \rightarrow +\infty$ para concluir que $C_1 = 0$. (Suponha que r e σ são tais que $\lambda_1 \geq 1$ e $\lambda_2 < 0$.)
- (e) Suponha, agora, que a opção *put* tem estilo americano. Seja $S_f > 0$ o valor real da fronteira livre. Determine a constante C_2 de forma a que $P'(S_f)$ tenha o valor apropriado.
- (f) Como determinaria S_f ?

4. Apresente a relação de paridade *put-call* para opções americanas e justifique-a recorrendo a um argumento de arbitragem.

Aula 14: Exemplos de Opções Exóticas

As opções europeias ou americanas estudadas anteriormente apresentam um ganho, em posição longa, dado por $\max\{S - E, 0\}$ (*calls*) ou $\max\{E - S, 0\}$ (*puts*), em que S representa o valor do activo subjacente à opção e E o preço de exercício. As opções europeias podem ser exercidas unicamente na maturidade.

Quando as funções que definem os ganhos ou perdas são diferentes destas, as opções dizem-se exóticas. As opções exóticas podem contemplar estilos de exercício europeu ou americano — e não é esta a característica que as define.

Entre os exemplos de opções exóticas, encontram-se as opções binárias (que descreveremos a seguir), as opções sobre opções e as opções de escolha (uma forma mais complicada de opções sobre opções).

As opções podem também depender da trajectória do respectivo activo subjacente. De certa forma, as opções americanas, que vimos anteriormente, pertencem a esta classe, pois o exercício prematuro destas opções é função da trajectória do activo. As opções podem ser exóticas e, simultaneamente, depender da trajectória do activo.

As opções exóticas e as opções dependentes da trajectória do activo são tipicamente transaccionadas em mercados ao balcão (*over-the-counter*), procurando responder a necessidades específicas. Por vezes, existe uma procura genuína deste tipo de produtos para operações de cobertura especiais (*hedging*). Em outras situações, as opções exóticas são lançadas para reflectir o posicionamento de instituições financeiras face a variáveis do mercado. Nos últimos anos, tem-se assistido ao aparecimento de novos derivados financeiros (e, em particular, de novas opções exóticas), cada vez mais complexos e difíceis de modelar.

Opções Binárias

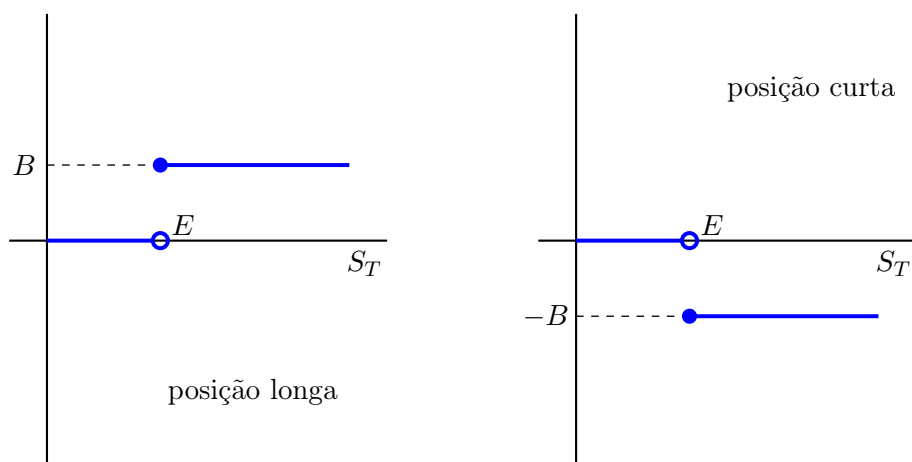
As opções binárias, ou digitais, podem ser vistas como formas de apostar se o valor do activo, na maturidade, ficará acima ou abaixo do preço de exercício. Suponhamos, primeiro, que se trata de uma opção do tipo *call*. Neste caso, a função que descreve o ganho da posição longa na maturidade é dada por

$$\begin{cases} B & \text{se } S \geq E, \\ 0 & \text{se } S < E, \end{cases}$$

em que B é a recompensa obtida quando o valor do activo excede o preço de exercício E na maturidade. Esta função pode ser descrita, recorrendo à função de Heaviside H (que vale 0 se $x < 0$ e 1 se $x \geq 0$):

$$BH(S - E) = \begin{cases} B & \text{se } S \geq E, \\ 0 & \text{se } S < E. \end{cases}$$

Esta é a forma mais simples de uma opção binária (conhecida por *cash-or-nothing call*). Os perfis de ganhos e perdas são retratados na figura seguinte.



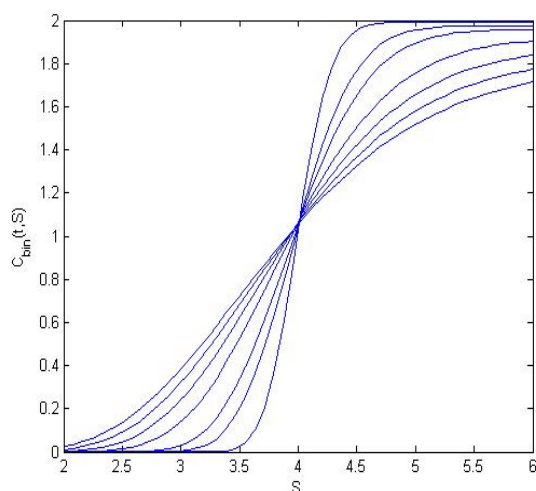
Existe uma forma rápida e expedita de calcular o preço destas opções. Na aula da neutralidade face ao risco, vimos que $N(d_2)$ é a probabilidade do activo estar acima do preço de exercício E , sob a hipótese de neutralidade face ao risco (ou seja, é igual a $P(S_T \geq E) = \int_E^{+\infty} g(s)ds$ quando S_T segue uma lognormal com r no lugar de μ e de função densidade $g(s)$). Assim sendo, o valor esperado da opção na maturidade vale $BN(d_2)$. Basta, então, descontar este valor à taxa de juro sem risco r , obtendo-se

$$C_{bin}(t, S) = Be^{-r(T-t)}N(d_2),$$

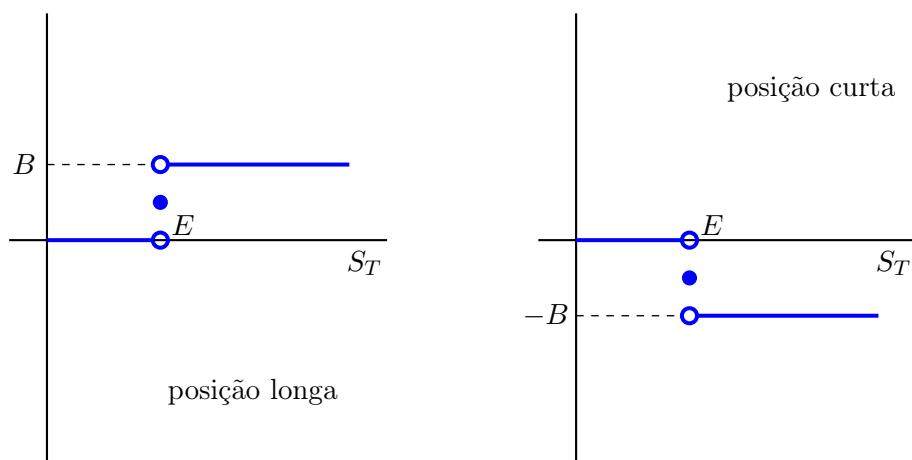
com

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

A figura seguinte mostra os gráficos de $C_{bin}(t, S)$ para vários valores de t a aproximarem-se da maturidade. Os dados escolhidos foram: $E = 4$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$ e $B = 2$, para valores de t compreendidos entre $t_0 = 0$ e $T = 4$ e valores de S a variar entre $S_{t_0} = 2$ e $S_T = 6$.



Observa-se que estes gráficos ‘aproximam-se’ da função que descreve o ganho na maturidade. Mais rigorosamente falando, a convergência dá-se pontualmente excepto em $S = E$. Neste ponto, fica a sensação, pela experiência numérica relatada em cima, que a convergência se dá para $B/2$. De facto, ao tomarmos o limite de $C_{bin}(t, S)$, quando t tende para T , observa-se a convergência pontual para a função descrita graficamente de seguida em posição longa.



Sublinhe-se a dificuldade acrescida que existe em estabelecer uma carteira delta-neutral para este tipo de opções. Se derivarmos $C_{bin}(t, S)$ em ordem a S , estas funções delta ‘aproximam-se’ da função delta de Dirac $\delta(S - E)$, que vale zero quando $S \neq E$.

Existe uma outra forma de modelar o valor de operações binárias. Continuemos a examinar o caso de uma *cash-or-nothing call* nas condições descritas há pouco. Recorde-se que o desenvolvimento do modelo de Black-Scholes permitiu estabelecer a equação de

Black-Scholes independentemente da condição final imposta. Esta condição foi utilizada para determinar uma solução particular da equação, diferente, por exemplo, consoante se tratou de uma *call* ou de uma *put*. Para determinar o preço de uma opção binária da forma acima exposta, basta resolver a equação de Black-Scholes para $V(t, S) = C_{bin}(t, S)$ mas com a condição final

$$C_{bin}(T, S) = BH(S - E)$$

no lugar de

$$C(T, S) = \max\{S - E, 0\}.$$

Viu-se na aula da fórmula de Black-Scholes que, para determinar a solução da equação de Black-Scholes a satisfazer uma condição final, é necessário calcular um integral de Poisson da forma

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{1}{4\tau}(x-s)^2} ds.$$

A função u_0 é, porém, diferente da considerada nessa aula, pois está relacionada com a nova condição final imposta.

Através das mudanças de variável

$$t = T - \left(\frac{2}{\sigma^2}\right) \tau, \quad S = Ee^x, \quad C_{bin}(t, S) = Ev(\tau, x)$$

e

$$v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x),$$

a condição final $C_{bin}(T, S) = BH(S - E)$, nas variáveis originais, passa a ser dada, nas novas variáveis, por

$$u(0, x) = u_0(x) = e^{-\alpha x} BH(Ee^x - E)/E.$$

Existe uma (e uma só) solução da equação de difusão a verificar a nova condição inicial, uma vez que $u_0(x)$ continua a ser uma função bem comportada e que não cresce muito rapidamente quando $|x| \rightarrow +\infty$ (no sentido exposto nessa aula). Feitas as contas, obtém-se igualmente $C_{bin}(t, S) = Be^{-r(T-t)} N(d_2)$.

Não há nenhuma contradição matemática em ter $\lim_{t \rightarrow T} C_{bin}(t, E) = B/2$ como vimos anteriormente. De facto, o método de resolução da equação diferencial assentou no cálculo do integral de Poisson que é indiferente ao valor de u_0 (e, conseqüentemente, ao valor final para $C_{bin}(T, S)$ imposto ao modelo) num conjunto finito de pontos.

Exercícios

1. Deduza a expressão para o valor $C_{bin}(t, S)$ de uma opção *cash-or-nothing call*, concluindo o penúltimo parágrafo da aula.

2. Uma opção binária *supershare* apresenta um ganho na maturidade, para a posição longa do tipo *call*, dado por

$$\frac{1}{A} [H(S - E) - H(S - E - A)] \quad (A > 0).$$

- (a) Trace o gráfico desta função.
 (b) Explique o significado financeiro deste derivado.
 (c) Calcule o valor da opção.
3. Uma opção binária *asset-or-nothing* apresenta um ganho na maturidade (para a posição longa do tipo *call*) igual a S se $S > E$ e igual a 0 caso contrário.

- (a) Trace o perfil de ganhos e perdas na maturidade.
 (b) Calcule o valor da opção.

4. As opções de escolha (*chooser options* ou *as you like options*) são caracterizadas por dar a oportunidade ao detentor do contrato de escolher, num determinado instante (aqui designado por T_1 [$> t$]), se a opção é do tipo *call* ou do tipo *put*. Sejam T_2 [$> T_1$] o instante da maturidade da opção e E o seu preço de exercício (qualquer que seja o tipo escolhido em T_1).

Supondo que a opção (tipo *call* ou *put*) a ser escolhida tem estilo europeu, desenvolva uma fórmula que descreva o valor da opção de escolha. **Sugestão:** Recorra à paridade *put-call* substituindo o valor da *put* em $\max\{call, put\}$.

5. Reconstitua a matéria desta aula (e os exercícios já apresentados) para o caso de opções binárias do tipo *put*.
6. Uma opção com berro (*shout option*) é uma opção de estilo europeu em que o detentor do contrato pode *berrar* ao vendedor uma vez durante o tempo de vida do contrato. Na maturidade T , o detentor recebe o maior valor de entre o ganho tradicional e o valor intrínseco da opção no momento do berro.

Considere uma opção com berro do tipo *call* e com preço de exercício E . Seja $b \in (0, T)$ o momento do berro e S_b o valor do activo nesta ocasião.

- (a) Sejam $E = 30$ e $S_b = 50$. Qual o ganho da posição longa quando $S_T = 40$? E quando $S_T = 60$?
- (b) Mostre que, quando $S_b \geq E$, o ganho da opção na maturidade se pode escrever na forma

$$\max\{S_T - S_b, 0\} + (S_b - E).$$

- (c) Através do resultado da alínea anterior, mostre como poderia ser modelado o preço de uma opção com berro (a partir do momento deste).

7. As opções com início posterior (*forward start options*) são usadas, frequentemente, em esquemas de incentivos salariais. Estas opções estipulam que o direito de opção do detentor do contrato apenas entra em vigor numa data futura, posterior à sua transacção.

Considere uma opção com início posterior, de estilo europeu e do tipo *call*. Seja T_1 a data em que o direito de opção entra em vigor e seja T_2 (com $T_2 > T_1$) a data de maturidade do contrato. Suponha que o activo subjacente à opção vale S_0 no momento ($t = 0$) de transacção do contrato e S_1 quando $t = T_1$.

Seja C o valor de uma opção *call* europeia (tradicional) em $t = 0$ e com maturidade $T_2 - T_1$. Seja r o valor da taxa de juro sem risco.

- Mostre, através da fórmula de Black-Scholes, que o valor das opções *call* europeias tradicionais é (aproximadamente) proporcional ao valor do activo subjacente, quando estas se encontram *at-the-money*.
- Com base na alínea anterior, apresente uma justificação para que o preço da opção com início posterior (nas condições acima descritas) seja dado por CS_1/S_0 em $t = T_1$.
- Diga por que motivo é que o preço da opção com início posterior, em $t = 0$, é

$$e^{-rT_1} \hat{E}(CS_1/S_0).$$

(Supõe-se, nesta alínea, que CS_1/S_0 é uma variável aleatória.)

- Mostre que este valor é dado por Ce^{-dT_1} no caso do activo pagar dividendos a uma taxa de juro constante d . (Tome S_1 como uma variável aleatória e S_0 como um real.)
- Faça $d = 0$. O que é que conclui?

Aplicação a Produtos Estruturados

As opções exóticas são frequentemente incluídas em produtos estruturados. Estes produtos são aplicações financeiras, de curto, médio ou longo prazo, com remuneração variável, a qual está dependente da evolução de outros activos, designados por subjacentes. Tipicamente, os produtos estruturados garantem, a quem os compra, um reembolso mínimo pelo montante do valor investido, ou seja, oferecem um ganho garantido no vencimento para além do montante investido.

A título de exemplo, consideremos uma taxa de juro $r = 0.125$, capitalizada continuamente, e um índice de acções com volatilidade $\sigma = 0.5$ que se encontra neste momento a 1000 pontos. Este índice de acções será o activo subjacente. Consideremos uma opção *call* binária de tipo *cash-or-nothing* sobre o índice de acções, de recompensa B e preço de exercício $E = 1000$, atingindo a maturidade dentro de um ano. Um ganho na maturidade

desta opção em posição longa é de

$$C_{bin}(T, S) = \begin{cases} B & \text{se } S \geq 1000, \\ 0 & \text{se } S < 1000. \end{cases}$$

O preço Black-Scholes desta *cash-or-nothing* é dado por (em $t_0 = 0$ e $S = 1000$)

$$C_{bin}(0, S) = Be^{-0.125(1-0)}N(d_2),$$

com

$$d_2 = \frac{\log(1000/1000) + \left(0.125 - \frac{1}{2}0.5^2\right)(1-0)}{0.5\sqrt{1-0}} = 0.$$

Logo, com $S = 1000$,

$$C_{bin}(0, S) = Be^{-0.125}N(0) = Be^{-0.125}0.5 \simeq 0.441B.$$

A taxa nominal r_1 para um período de capitalização (ver exercício em apêndice) é dada por (com $t_0 = 0$)

$$e^{rt} = (1 + r_1)^t \iff 1 + r_1 = e^r \iff r_1 = e^r - 1.$$

Assim sendo,

$$r_1 = e^{0.125} - 1 \simeq 0.13 \quad (\text{taxa de } 13,3\%).$$

O produto estruturado é constituído por um depósito a prazo e uma opção como a descrita em cima. A instituição financeira que venda este produto recebe D unidades monetárias do cliente e vende-lhe a *call*. Na maturidade do produto terá de pagar ao cliente que o comprou a recompensa B se a *call* for accionada e devolver-lhe $r_{cliente}D$. A questão a resolver é determinar o valor de $r_{cliente}$ e o valor de B de forma a que a instituição tenha sempre lucro.

Determinemos, primeiro, o valor de B , de forma a que o produto estruturado proporcione um lucro nunca inferior a, digamos, 1% à instituição financeira que venda o produto. No pior cenário para esta, ou seja quando a *call* é exercida, a instituição financeira fará um lucro de 1% quando

$$0.01D = 0.133D + 0.441B(1 + 0.133) - B,$$

uma vez que esta coloca a render, à taxa de 13.3% de que dispõe, o dinheiro D do cliente e o prémio da *call* que lhe vendeu em $t_0 = 0$. Na maturidade deverá pagar-lhe a recompensa B . Obtém-se assim B em função de D :

$$-0.123D = -0.500347B \quad (\text{aproximadamente } B = 0.246D).$$

Se a *call* não for exercida (e supondo que se especifica $B = 0.246D$), vem que

$$0.133D + 0.441B(1 + 0.133) = 0.133D + 0.441(0.246D)(1 + 0.133) \simeq 0.256D.$$

A racionalidade económica para a instituição financeira que comercializasse este produto estruturado seria, por exemplo, oferecer aos clientes uma taxa $r_{cliente}$ de 0.5% no caso do índice de ações estar igual ou acima de 1000 pontos ($S \geq 1000$) e oferecer uma taxa $r_{cliente}$ de 25.1% no caso do índice de ações estar abaixo de 1000 pontos ($S < 1000$). Note-se que em ambos os cenários a instituição financeira lucraria sempre 0.5% do valor D investido pelo cliente!

Aula 15: Exemplos de Opções Dependentes da Trajectória do Activo

As opções podem ser simultaneamente exóticas e dependentes da trajectoria do activo. É o caso das opções onde uma barreira marca uma passagem para o interior (opções *knock-in*), activando o direito de exercício, ou para o exterior (opções *knock-out*) desactivando este direito.

Opções de Barreira

Nas opções de barreira para o exterior, o direito de exercício cessa se o valor do activo passar um determinado valor. Há duas possibilidades a considerar. O direito de exercício pode terminar se o activo subir acima da barreira (opções *up-and-out*). Na outra possibilidade, o direito cessa se o valor do activo descer abaixo da barreira (opções *down-and-out*). O estilo de exercício pode ser europeu ou americano.

A barreira pode ser imposta em sentido contrário, fazendo com que o direito de exercício apenas surja se o activo passar um determinado valor. As opções de barreira para o interior contemplam, também, duas possibilidades, *up-and-in* e *down-and-in*. Quando o direito de exercício surge, pode ser exercido apenas na maturidade (estilo europeu) ou em qualquer instante, desde o momento em que a barreira é cruzada até à maturidade (estilo americano).

Uma Opção de Barreira *down-and-out*

Consideremos, primeiro, o caso de uma opção *knock-out* da forma *down-and-out*. Suponhamos que se trata de uma opção do tipo *call* em estilo europeu. Seja H o valor da barreira e E o preço de exercício.

Quando a opção é transaccionada ($t = t_0$) tem-se, necessariamente, que $S > H$. Se o valor do activo atingir $S = H$ a opção deixa de existir, no sentido em que cessa o direito de exercício. Quando isso acontece, a opção deixa de ter qualquer valor. O valor da opção deve, então, satisfazer a seguinte condição de fronteira

$$C_o^d(t, H) = 0.$$

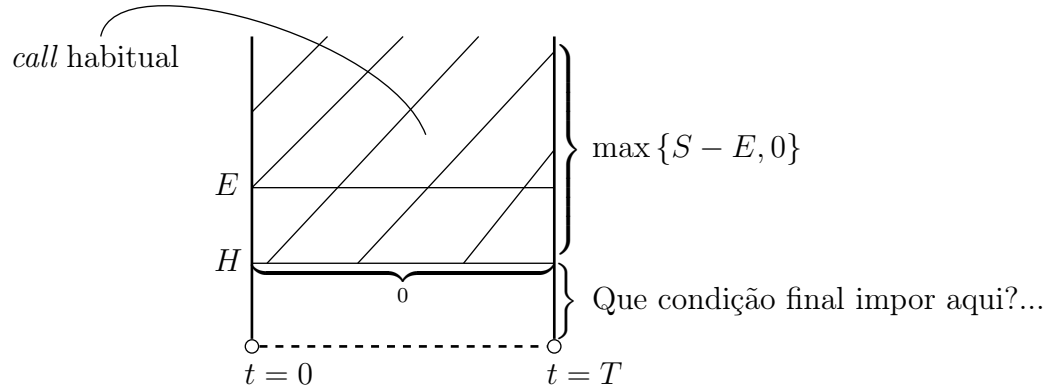
O valor da opção tem, naturalmente, de obedecer à equação de Black-Scholes para $S > H$. Se a opção ainda existir na maturidade, o seu valor respeita a tradicional condição final

$$C_o^d(T, S) = \max\{S - E, 0\}.$$

O problema que modela o preço da opção está formulado, mas resta saber se existe uma solução da equação de Black-Scholes a satisfazer estas duas condições. Em primeiro lugar, vamos impor que $E > H$, o que, por um lado, faz um certo sentido de um ponto de vista financeiro e, por outro, torna a condição final compatível com a condição de fronteira:

$$C_o^d(T, H) = 0.$$

A figura seguinte pretende retratar estas condições finais e de fronteira.



Note-se que a solução obtida deve obedecer ainda à condição de fronteira no limite $\lim_{S \rightarrow +\infty} S - C_o^d(t, S) = Ee^{-r(T-t)}$, $t \geq 0$, apesar desta condição não ser explicitamente necessária para a modelação do preço da opção.

Recorrendo às já habituais mudanças de variável,

$$t = T - \left(\frac{2}{\sigma^2}\right) \tau, \quad S = Ee^x, \quad C_o^d(t, S) = Ev(\tau, x)$$

e

$$v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x),$$

o problema assume a forma (relembre que $\tau = 0$ corresponde a $t = T$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x), \quad \tau \geq 0 \quad \text{e} \quad -\infty < x < +\infty, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \geq x_0, \\ u(\tau, x_0) &= 0, \quad \tau \geq 0, \end{aligned}$$

em que

$$u_0(x) = \max \left\{ e^{\frac{1}{2}(c-1)x} (e^x - 1), 0 \right\} \quad \text{e} \quad c = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

O valor de x_0 mencionado em cima é dado por (relembre também que $x = 0$ corresponde a $S = E$)

$$x_0 = \log \left(\frac{H}{E} \right) < 0.$$

Acontece que o problema em cima é resolvido através do problema em encontrar $u(\tau, x)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x), \quad \tau \geq 0 \quad \text{e} \quad -\infty < x < +\infty, \\ u(0, x) &= \bar{u}_0(x), \quad -\infty < x < +\infty,\end{aligned}$$

para uma determinada função $\bar{u}_0(x)$ (que deverá necessariamente coincidir com $u_0(x)$ para $x \geq x_0$), problema este que já sabemos resolver.

Como a equação de difusão $\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x)$ é invariante sob translacções e reflexões do seu sistema coordenado, continua a ser uma sua solução a função $u_{BS}(\tau, 2x_0 - x)$, em que $u_{BS}(\tau, x)$ é a solução da equação, dada na aula sobre a fórmula de Black-Scholes, que deu origem a esta fórmula (para uma *call* europeia). E, uma vez que a equação é linear, ela admite uma solução da forma $u(\tau, x) = u_{BS}(\tau, x) - u_{BS}(\tau, 2x_0 - x)$. Faça-se, então,

$$u_o^d(\tau, x) = u_{BS}(\tau, x) - u_{BS}(\tau, 2x_0 - x).$$

Logo, $u_o^d(\tau, x)$ é a solução (única) deste último problema quando $\bar{u}_0(x) = u_o^d(0, x)$ (uma vez que tal $\bar{u}_0(x)$ é uma função bem comportada e a não crescer muito rapidamente quando $|x| \rightarrow +\infty$ no sentido exposto nessa aula). Os dois problemas são equivalentes porque, por um lado, esta solução satisfaz, trivialmente, a condição de fronteira

$$u(\tau, x_0) = u_{BS}(\tau, x_0) - u_{BS}(\tau, 2x_0 - x_0) = 0$$

e, por outro, para $x \geq x_0 \geq 2x_0$, vem que

$$\bar{u}_0(x) = u_0(x).$$

(Olhar para os valores que $\bar{u}_0(x)$ toma quando $x < 2x_0$ é irrelevante para a análise em causa.) Porém, a equivalência referida pressupõe que no primeiro problema se tenha $u(0, x) = \bar{u}_0(x)$, $x < x_0$.

Efectuando as mudanças de variável em sentido inverso, obtemos o valor da opção de barreira *down-and-out*

$$C_o^d(t, S) = C_{BS}(t, S) - \left(\frac{S}{H}\right)^{-(c-1)} C_{BS}(t, H^2/S),$$

em que $C_{BS}(t, S)$ é o valor da fórmula de Black-Scholes para uma opção *call* europeia.

Uma Opção de Barreira *down-and-in*

Uma opção *knock-in* da forma *down-and-in* dá ao comprador o direito de exercício apenas se o valor do activo passar para baixo de uma determinada barreira durante o seu tempo de vida. Consideremos, então, uma opção *down-and-in* do tipo *call* em estilo europeu. Seja H o valor da barreira e E o preço de exercício.

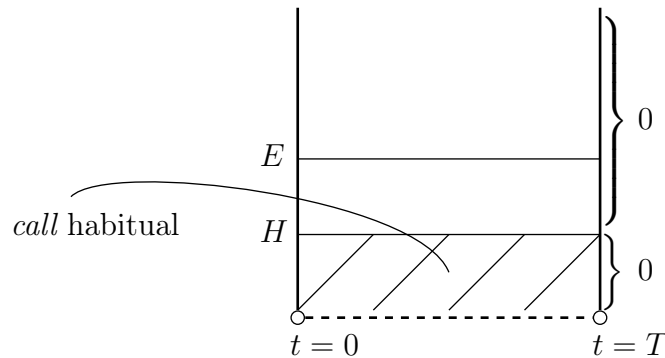
Quando $S < H$, a opção passa a ser uma opção *call* europeia normal. Logo, o problema inclui, desde logo, uma condição de fronteira da forma

$$C_i^d(t, H) = C_{BS}(t, H).$$

Quando $S \geq H$ na maturidade não é possível exercer a opção, ou seja, $C_i^d(T, S) = 0$. Como também estamos a considerar $E > H$, tem-se que $C_i^d(T, S) = C_{BS}(T, S) = 0$, para $S < H$. Desta forma, colocamos a condição final

$$C_i^d(T, S) = 0.$$

A figura seguinte pretende retratar estas condições finais e de fronteira.



A solução a encontrar deve satisfazer, também, uma condição de fronteira do tipo $\lim_{S \rightarrow +\infty} C_i^d(t, S) = 0$, indicando a improbabilidade da opção vir a tornar-se activa para valores muito grandes do activo, apesar de, uma vez mais, não precisarmos desta condição de fronteira para modelar o preço da opção.

Como de um ponto de vista financeiro, faz sentido dizer que o valor de uma opção *call* europeia é igual à soma do valor de uma opção *call down-and-in* com uma *call down-and-out* (com a mesma maturidade e o mesmo preço de exercício),

$$C_{BS}(t, S) = C_i^d(t, S) + C_o^d(t, S),$$

vem que a solução para o nosso problema é dada por

$$C_i^d(t, S) = C_{BS}(t, S) - C_o^d(t, S).$$

Uma nota final para a relação $E > H$ que não faz, de facto, muito sentido financeiro, pois torna o valor da *call down-and-in* sempre nulo na maturidade. Em todo o caso, a modelação de uma *call down-and-in* nestas condições foi um exercício interessante.

Outras Opções Dependentes da Trajectoria do Activo

Em opções asiáticas, por exemplo, o ganho na maturidade depende de um preço médio do activo durante o tempo de vida da opção. O cálculo deste preço médio pode ser estipulado de várias formas. Pode ser uma média tomada em tempo contínuo (ou o mais perto possível do que isso representa na prática) ou em determinados instantes temporais previamente especificados. O cálculo da média pode ser aritmético ou geométrico e com ou sem ponderação.

As opções asiáticas de preço médio (*average price options*) possibilitam um ganho na maturidade, em posição longa, dado por $\max\{S_{md} - E, 0\}$ (no caso de *calls*) ou por $\max\{E - S_{md}, 0\}$ (no caso de *puts*), em que S_{md} traduz a média do activo ao longo do tempo de vida da opção.

As opções asiáticas podem, também, incidir sobre o preço de exercício (*average strike options*). Neste tipo de opções asiáticas, o ganho na maturidade é dado por $\max\{S_T - S_{md}, 0\}$ (*calls*) ou por $\max\{S_{md} - S_T, 0\}$ (*puts*), em que S_T representa o valor do activo na maturidade.

As opções *lookback* incorporam ganhos na maturidade dependentes de um valor mínimo ou máximo que o activo atingiu durante o tempo de vida da opção. O ganho na maturidade, nas opções *lookback* do tipo *call*, é dado por $\max\{S_{min} - E, 0\}$, em que S_{min} representa o valor mínimo do activo ao longo do tempo de vida da opção. No caso das opções *lookback* do tipo *put*, o ganho na maturidade é dado por $\max\{E - S_{max}, 0\}$, em que S_{max} traduz o valor máximo do activo ao longo do tempo de vida da opção. Estes valores mínimos ou máximos podem ser determinados de forma (aproximadamente) contínua ou em amostragens espaçadas em tempo.

Exercícios

1. Verifique que $C_o^d(t, S)$ satisfaz a condição de fronteira quando S tende para $+\infty$ apresentada na formulação do valor de opções *down-and-out*.
2. Confirme que $C_i^d(t, S)$ satisfaz a condição final e a condição de fronteira quando S tende para $+\infty$, mencionadas na formulação do valor de opções *down-and-in*.
3. Faça H tender para zero na expressão para o preço $C_i^d(t, S)$ de uma opção *call* europeia *down-and-in*. O que é que obtém? (Se não conseguir responder a esta questão na sua generalidade, pode supor que $c = 2r/\sigma^2 > 1$.) Explique o significado financeiro da resposta dada.
4. Uma opção asiática de preço médio (*average strike option*) apresenta um ganho na maturidade em que o preço de exercício é substituído pela média do valor do activo subjacente à opção durante o tempo de vida desta.

- (a) Como seria o ganho de uma posição longa associada ao tipo *put*? (Para simplificar, considere o caso em que a média é tomada sobre um conjunto discreto de instantes t_1, \dots, t_N em $(0, T)$.)
- (b) Mostre que a equação diferencial estocástica que modela a média do valor do activo (multiplicado por um factor de t) é dada por $dA_t = S_t dt$.
- (c) No contexto do Lema de Itô, considere $V(t, S, A)$ dependente de três variáveis (tempo t , valor S do activo e sua ‘média’ A). Considere a carteira $\Pi(t, S, A) = \Delta S - V(t, S, A)$. A aplicação deste lema dá origem a

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} + S_t \frac{\partial \Pi}{\partial A} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial \Pi}{\partial S} dX_t,$$

em que os argumentos são tomados em (t, S_t, A_t) (e μ e σ designam, respectivamente, a deriva e a volatilidade associadas ao activo).

Desenvolva uma equação correspondente à de Black-Scholes considerando que a carteira Π tem um retorno igual ao de um investimento sem risco à taxa de juro r .

Aula 16: Obrigações e Modelos de Taxas de Juro

A modelação do preço de futuros e opções foi baseada na hipótese de a taxa de juro ser uma constante conhecida. Pelo facto destes derivados terem um tempo de vida relativamente curto, esta hipótese não é demasiado restrictiva. Porém, os produtos financeiros de maior duração, como as obrigações, são mais sensíveis às variações na taxa de juro. Importa, assim, estudar modelos que descrevam a variação temporal das taxas de juro.

Uma obrigação é um contrato em que o comprador, mediante um investimento inicial, obtém, na maturidade do contrato, um rendimento pré-estabelecido. A obrigação pode pagar dividendos em determinadas instâncias durante o tempo de vida do contrato. Estes dividendos são conhecidos por cupões. Uma obrigação sem cupões designa-se por obrigação de cupão-zero. As obrigações são subscritas pelo Estado ou por empresas, e podem ser vistas como uma forma de contrair um empréstimo para obtenção de capital. O tempo de vida de uma obrigação pode ser da ordem da dezena de anos, contrastando, por exemplo, com o tempo de vida das opções que, geralmente, não excede os nove meses.

Preço de Obrigações — Taxas de Juro Determinísticas

Seja $V(t)$ o preço a pagar por uma obrigação que, na sua maturidade T , paga ao comprador um valor Z . Desta forma, $V(T) = Z$. Pretende-se conhecer o valor de $V(t)$ quando $t < T$.

Suponhamos que a taxa de juro é conhecida e representável por uma função $r(t)$. É também conhecida a função $K(t)$ que representa o valor dos pagamentos dos cupões (modelado de forma contínua).

O argumento de arbitragem (instantânea) leva-nos a igualar o retorno da obrigação ao retorno de um empréstimo à taxa de juro em causa. Desta forma, coloca-se a equação diferencial ordinária

$$\frac{dV}{dt}(t) + K(t) = r(t)V(t),$$

cuja solução, quando imposta a condição final $V(T) = Z$, é dada por

$$V(t) = e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} \left(Z + \int_t^T K(u)e^{\int_u^T r(\tau)d\tau} du \right).$$

O preço das obrigações de cupão-zero ($K(t) \equiv 0$) reduz-se a

$$V(t) = e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} Z.$$

O preço de uma obrigação pode também ser encarado como uma função de T ($V(t) \equiv V(t; T)$). Se escrevermos a fórmula para a sua expressão na forma

$$-\int_t^T r(\tau; T)d\tau = \log \left(\frac{V(t; T)}{Z} \right)$$

e a derivarmos em ordem a T , obtemos

$$r(T; T) = -\frac{1}{V(t; T)} \frac{\partial V}{\partial T}(t; T).$$

Como $r(T; T) > 0$ e $V(t; T) > 0$, resulta imediatamente desta expressão que a derivada parcial de $V(t; T)$ em ordem a T é negativa, o que traduz o decréscimo do valor de uma obrigação com aumento da sua maturidade.

Estimação das Taxas de Juro

Os valores de mercado das obrigações podem servir para estimar as taxas de juro. No entanto, a fórmula dada em cima para $r(T; T)$ não pode ser utilizada na prática porque requer um valor para uma derivada. Mas, se supusermos que $r(t; T)$ é aproximadamente constante, obtemos, com $Z = V(T; T)$,

$$-(T - t)r(t; T) \simeq \log \left(\frac{V(t; T)}{V(T; T)} \right).$$

Esta expressão pode ser utilizada para estimar a taxa de juro, em função de t e de T , sem apelar ao conhecimento de derivadas:

$$r(t; T) \simeq -\frac{\log(V(t; T)/V(T; T))}{T - t}.$$

Recorrendo aos valores de mercado para o preço das obrigações para uma dada maturidade T , é possível traçar valores de $r(t; T)$ para vários valores de t . O gráfico da função que une os pontos assim traçados é conhecido por curva de rentabilidade (*yield curve*), relativa à maturidade T .

Este tipo de curvas de rentabilidade não deve ser confundido com um outro tipo de curvas de rentabilidade, que descrevem aproximações das taxas de juro calculadas através dos preços de mercado $V(t; T_i)$ de obrigações com diferentes maturidades T_i (observados no mesmo instante t).

Os perfis mais observados para as curvas de rentabilidade são crescentes com tendência a estabilizar, ou inicialmente crescentes e depois decrescentes sem nunca atingir os valores iniciais mas com a mesma tendência constante no final (*mean reverting*). Este tipo de perfis para estas curvas de rentabilidade traduz uma expectativa normal nos mercados, que recompensa quem pretende guardar o seu investimento por um período de tempo mais longo.

Preço de Obrigações — Taxas de Juro Estocásticas

A incerteza sobre o futuro empobrece uma modelação determinística das taxas de juro. A modelação estocástica das taxas de juro assenta num modelo diferencial estocástico da mesma família do que foi utilizado para os activos financeiros, mas com características

diferentes. Em primeiro lugar, é preciso notar que o objecto de modelação não será uma taxa de juro qualquer, mas a chamada taxa *spot* (a taxa de juro cobrada para um depósito o mais pequeno possível) — de um ponto de vista matemático trata-se da taxa de juro com capitalização contínua.

Supõe-se, então, que a taxa *spot* segue um processo de Itô $\{r_t\}_{t \geq 0}$, solução da equação diferencial estocástica:

$$dr_t = u(t, r_t)dt + w(t, r_t)dX_t.$$

As funções $u(t, r)$ e $w(t, r)$ serão identificadas mais adiante para vários dos modelos mais conhecidos. É aqui, porém, que assenta a principal diferença relativamente ao modelo lognormal de um activo financeiro. No caso das taxas de juro, os modelos têm de contemplar o efeito de reversão à média (*mean reverting*). De facto, não é sensato esperar que as taxas de juro sigam uma deriva crescente como no caso dos activos financeiros (o que, aliás, foi observado nas curvas de rentabilidade relativas aos preços de obrigações com a mesma maturidade). As funções u e w — e sobretudo a função u — têm de forçar a evolução temporal da taxa de juro no sentido desta reverter a um valor médio.

Assim como o preço de uma opção foi considerado função do tempo e do valor do activo subjacente, vamos considerar que o preço de uma obrigação é uma função $V(t, r)$ do tempo t e do valor da taxa de juro r . A modelação de Black-Scholes foi baseada na constituição de uma carteira formada por opções e activos subjacentes. No caso das obrigações, não existe activo subjacente para efeitos de *hedging*. (Estamos na presença de um mercado incompleto pois o activo subjacente às obrigações não é negociável.) Uma forma de cobertura seria, por exemplo, combinar, na mesma carteira, duas obrigações com maturidades diferentes.

Seja $\Pi(t, r)$ o valor de uma carteira constituída por uma obrigação de valor $V_1(t, r)$, maturidade T_1 e valor final Z_1 e um número Δ de obrigações de valor $V_2(t, r)$, maturidade T_2 e valor final Z_2 . O valor desta carteira é dado por

$$\Pi(t, r) = V_1(t, r) + \Delta V_2(t, r).$$

(Por enquanto, são consideradas, apenas, obrigações de cupão-zero.)

A aplicação do Lema de Itô a esta função $\Pi(t, r)$ (partindo do princípio que as funções $u(t, r)$ e $w(t, r)$ permitem esta operação) resulta em

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(\frac{\partial V_1}{\partial t}(t, r_t) + \frac{1}{2}w^2(t, r_t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}(t, r_t) \right) dt + \frac{\partial V_1}{\partial r}(t, r_t) dr_t \\ &+ \Delta \left(\frac{\partial V_2}{\partial t}(t, r_t) + \frac{1}{2}w^2(t, r_t) \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}(t, r_t) \right) dt + \Delta \frac{\partial V_2}{\partial r}(t, r_t) dr_t. \end{aligned}$$

A escolha

$$\Delta = - \frac{\frac{\partial V_1}{\partial r}(t, r_t)}{\frac{\partial V_2}{\partial r}(t, r_t)}$$

elimina, em $d\Pi_t$, a componente estocástica associada a dr_t . Formula-se, então, uma equação com derivadas parciais (determinística)

$$\frac{d\Pi}{dt}(t, r) = \frac{\partial V_1}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r) \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}(t, r) - \frac{\frac{\partial V_1}{\partial r}(t, r)}{\frac{\partial V_2}{\partial r}(t, r)} \left(\frac{\partial V_2}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r) \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}(t, r) \right).$$

Prosseguindo o raciocínio seguido para a formulação da equação de Black-Scholes, recorre-se ao argumento de arbitragem (já clássico neste curso),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, r) = r\Pi(t, r),$$

do qual resulta a EDP

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial V_1}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r) \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}(t, r) - rV_1(t, r) \right) / \frac{\partial V_1}{\partial r}(t, r) \\ &= \left(\frac{\partial V_2}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r) \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}(t, r) - rV_2(t, r) \right) / \frac{\partial V_2}{\partial r}(t, r). \end{aligned}$$

Ambos os membros desta equação são funções de t e de r . Repare-se, porém, que o membro do lado esquerdo depende de T_1 e Z_1 mas não depende de T_2 e Z_2 e que o membro do lado direito depende de T_2 e Z_2 mas não depende de T_1 e Z_1 . A única possibilidade disto acontecer simultaneamente é quando ambos os membros não dependem das maturidades T_1 e T_2 e dos valores finais Z_1 e Z_2 .

Logo, tem-se, para $V = V_1$ ou $V = V_2$, que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r) \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(t, r) - rV(t, r) \right) / \frac{\partial V}{\partial r}(t, r)$$

é uma função de apenas t e r . Vamos escrever esta função, por motivos que ficarão claros depois, na forma $\lambda(t, r)w(t, r) - u(t, r)$. Para isto ser possível, a função $w(t, r)$ tem de ser diferente de zero no seu domínio (na prática divide-se a função em causa por w e representa-se o quociente por λ e o resto por $-u$). Chega-se, deste modo, à EDP

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r) \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(t, r) + [u(t, r) - \lambda(t, r)w(t, r)] \frac{\partial V}{\partial r}(t, r) - rV(t, r) = 0.$$

A esta equação associa-se a condição final $V(T, r) = Z$.

A maioria dos modelos de taxas de juro seleccionam as funções $u(t, r)$ e $w(t, r)$ de forma a que a EDP em cima admita soluções da forma

$$V(t, r) = Ze^{A(t) - rB(t)}$$

com $A(T) = B(T) = 0$. Prova-se que se esta expressão para $V(t, r)$ for solução da EDP então existem funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ e $\eta(t)$ tais que

$$\begin{aligned} w(t, r) &= \sqrt{\alpha(t)r - \beta(t)}, \\ u(t, r) &= -\gamma(t)r + \eta(t) + \lambda(t, r)\sqrt{\alpha(t)r - \beta(t)}. \end{aligned}$$

A demonstração é deixada como exercício. Prova-se, também, que $A(t)$ e $B(t)$ satisfazem um problema de valor inicial dado por um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares (ver exercício).

Os vários modelos de taxas de juro deste tipo existentes na literatura variam na forma como concretizam as escolhas para as funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ e $\eta(t)$. Alguns dos modelos mais conhecidos são os seguintes:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dX_t \quad (\text{Vasicek}),$$

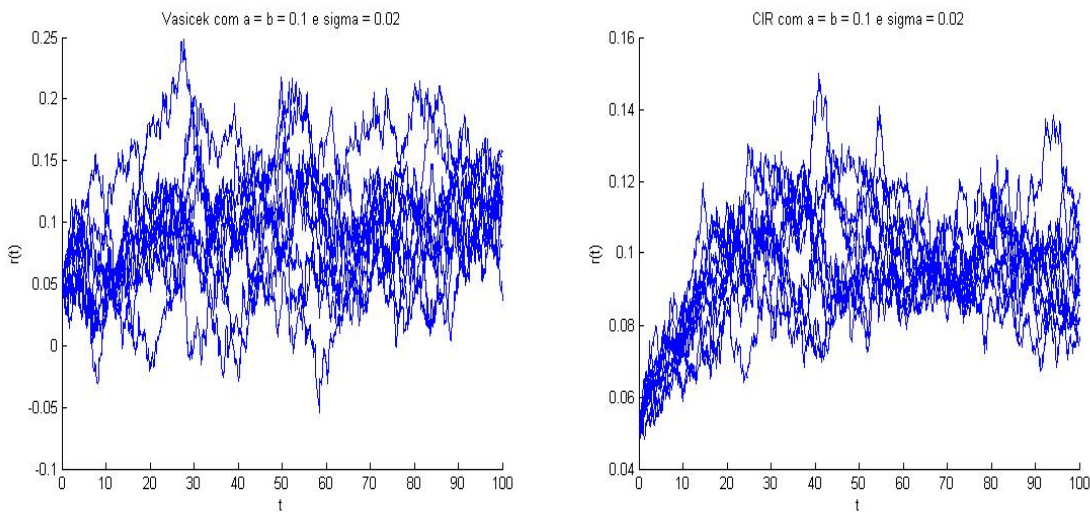
$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dX_t \quad (\text{Cox, Ingersoll e Ross})$$

e

$$dr_t = [\theta(t) - ar_t]dt + \sigma dX_t \quad (\text{Hull e White}),$$

em que a e b são constantes positivas (tipicamente inferiores a um) e $\theta(t)$ é uma função calculada através de taxas de juro *forward* (algo que não vimos neste curso). As taxas de juro podem assumir valores negativos no modelo de Vasicek, o que não acontece com o modelo de Cox, Ingersoll e Ross. Todos possuem a propriedade de reversão à média. É trivial descobrir as funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ e $\eta(t)$ que dão origem a estes modelos.

Exemplificamos, de seguida, a simulação das equações diferenciais estocásticas relativas aos modelos de Vasicek (gráficos do lado esquerdo) e Cox, Ingersoll e Ross (gráficos do lado direito).



As trajectórias discretas para os valores das taxas de juro foram geradas em MATLAB, para valores de t entre 0 e 100, com $r(0) = 0.05$. O valor escolhido para o passo da discretização foi $\Delta t = 0.1$ e os incrementos estocásticos seguiram a lei Gaussiana da aula sobre a modelação estocástica do valor de um activo financeiro. Fez-se $a = b = 0.1$ e $\sigma = 0.02$. Observa-se que as trajectórias do modelo de Vasicek tomaram, por vezes, valores negativos. As trajectórias do modelo de Cox, Ingersoll e Ross assumem uma forma mais parecida com as habituais curvas de rentabilidade (inicialmente crescentes e depois constantes).

Exercícios

1. Resolva o problema de valor final $dV/dt(t) + K(t) = r(t)V(t)$; $V(T) = Z$.
2. No âmbito das taxas de juro determinísticas, calcule a expressão para o preço de uma obrigação que envolve o pagamento de um cupão de forma discreta no tempo. Considere que o cupão paga K_c no instante temporal $t_c < T$.
3. Demonstre que se $V(t, r) = Ze^{A(t)-rB(t)}$ for solução da EDP

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(t, r) + [u(t, r) - \lambda(t, r)w(t, r)]\frac{\partial V}{\partial r}(t, r) - rV(t, r) = 0$$

então $w(t, r)$ e $u(t, r)$ têm as formas dadas em cima. **Sugestão:** Substitua a expressão dada para $V(t, r)$ na equação e derive duas vezes seguidas em ordem a r , obtendo:

$$\frac{1}{2}B(t)\frac{\partial^2[w^2(t, r)]}{\partial r^2} - \frac{\partial^2[u(t, r) - \lambda(t, r)w(t, r)]}{\partial r^2} = 0.$$

A seguir, constate que, sendo $B(t)$ dependente de T , se tem forçosamente que

$$\frac{\partial^2[w^2(t, r)]}{\partial r^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2[u(t, r) - \lambda(t, r)w(t, r)]}{\partial r^2} = 0.$$

4. Utilizando o exercício anterior mostre que $A(t)$ e $B(t)$ satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt}(t) &= \eta(t)B(t) + \frac{1}{2}\beta(t)B^2(t), \\ \frac{dB}{dt}(t) &= \frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t) + \gamma(t)B(t) - 1. \end{aligned}$$

(Formula-se um problema de valor final juntando ao sistema as condições finais $A(T) = B(T) = 0$.)

5. Seja $S(t)$ o preço de um activo financeiro. Considere uma outra função do tempo, $r(\tau)$, a descrever a taxa de juro com capitalização contínua.
 - (a) Calcule o valor F de um contrato *forward* em função de $r(\tau)$, da maturidade T e do valor do activo num instante t antes de T .
 - (b) Qual é a relação entre a expressão para $S(t)$ encontrada na alínea anterior e o valor em t de uma obrigação de cupão-zero e valor F na maturidade T ?

Aula 17: Opções sobre Obrigações e outros Produtos sobre Taxas de Juro

Na presença de um cupão pago de forma contínua, a EDP que descreve o preço de uma obrigação em função do tempo e da taxa de juro passa a ser dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(t, r) + [u(t, r) - \lambda(t, r)w(t, r)]\frac{\partial V}{\partial r}(t, r) - rV(t, r) + K(t, r) = 0.$$

(A demonstração, relegada para um exercício, consistiria em alterar o retorno da carteira de valor $\Pi(t, r)$ para $r\Pi(t, r) - K_1(t, r) - \Delta K_2(t, r)$ e em prosseguir a derivação da equação a partir desse ponto.)

O Preço de Risco do Mercado para Obrigações

A fim de esclarecer a forma utilizada na aula anterior para a função $\lambda(t, r)w(t, r) - u(t, r)$, vamos considerar uma carteira constituída por apenas uma obrigação, cujo preço é representado por $V(t, r)$ e cuja maturidade é dada por T . A aplicação do Lema de Itô, substituindo dr_t pela sua expressão $u(t, r_t)dt + w(t, r_t)dX_t$, resultaria em

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t, r_t) + \frac{1}{2}w^2(t, r_t)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(t, r_t) + u(t, r_t)\frac{\partial V}{\partial r}(t, r_t) \right) dt + w(t, r_t)\frac{\partial V}{\partial r}(t, r_t)dX_t.$$

Recorrendo à EDP para o preço das obrigações de cupão-zero vem que

$$dV_t = \left(w(t, r_t)\lambda(t, r_t)\frac{\partial V}{\partial r}(t, r_t) + rV(t, r_t) \right) dt + w(t, r_t)\frac{\partial V}{\partial r}(t, r_t)dX_t,$$

ou, equivalentemente,

$$dV_t - rV(t, r_t)dt = w(t, r_t)\frac{\partial V}{\partial r}(t, r_t)(dX_t + \lambda(t, r_t)dt).$$

Uma carteira com esta constituição não está isenta de risco. Veja-se que o membro do lado direito não é nulo e, sobretudo, que depende da componente estocástica dX_t associada à variação da taxa de juro. Esta componente comporta um elemento de risco medido por $\lambda(t, r_t)dt$. A função λ representa, assim, o *preço de risco do mercado* para obrigações.

O Preço de Risco do Mercado para Activos Financeiros

É possível aplicar, a opções, a derivação da EDP para o preço das obrigações de cupão-zero. A carteira $\Pi(t, S)$ passaria a ser constituída por uma opção de valor $V_1(t, S)$ e um número Δ de opções de valor $V_2(t, S)$. As opções teriam maturidades diferentes (e preços de exercício não necessariamente iguais). Seguindo a mesma derivação da EDP para o preço das obrigações de cupão-zero, chegar-se-ia a

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}w^2(t, S)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) + [u(t, S) - \lambda(t, S)w(t, S)]\frac{\partial V}{\partial S}(t, S) - rV(t, S) = 0.$$

Escolhendo $u(t, S) = \mu S$ e $w(t, S) = \sigma S$, como no modelo diferencial estocástico para o valor dos activos financeiros (em que μ designa a deriva ou flutuação e σ a volatilidade), vem que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) + [(\mu - \lambda_S \sigma)S] \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) - rV(t, S) = 0.$$

Tomámos $\lambda(t, S)$ como uma constante λ_S . Esta equação está, praticamente, na forma da equação de Black-Scholes, que admite como solução $V(t, S) = S$. Para identificarmos o valor de λ_S , substitui-se $V(t, S)$ por S na equação em cima, resultando em $\mu - \lambda_S \sigma = r$, ou seja

$$\lambda_S = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Este valor é conhecido como o *preço de risco do mercado* para activos financeiros. Substituindo λ_S por este valor na equação em cima, elimina-se a participação indesejada de μ e obtém-se a equação de Black-Scholes. (O papel desta escolha de λ_S é idêntico ao de $\Delta = \partial V / \partial S(t, S_t)$ no processo que levou à equação de Black-Scholes no sentido de ambos fazerem desaparecer μ .)

Opções sobre Obrigações

As opções sobre obrigações seguem a mesma mecânica financeira das opções sobre activos financeiros. Dividem-se em europeias e americanas e podem ser do tipo *call* ou *put*.

A modelação do preço de opções sobre obrigações é exemplificada através de uma opção europeia *call* com preço de exercício E e maturidade T , sobre uma obrigação de cupão-zero com maturidade $T_B \geq T$ e valor na maturidade dado por Z .

Para calcular o preço de uma opção deste tipo seria preciso, primeiro, resolver a EDP

$$\frac{\partial V_B}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r) \frac{\partial^2 V_B}{\partial r^2}(t, r) + [u(t, r) - \lambda(t, r)w(t, r)] \frac{\partial V_B}{\partial r}(t, r) - rV_B(t, r) = 0$$

com a condição final $V_B(T_B, r) = Z$, para determinar o preço $V_B(t, r)$ da obrigação.

Depois, ter-se-ia de resolver a EDP

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r) \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(t, r) + [u(t, r) - \lambda(t, r)w(t, r)] \frac{\partial V}{\partial r}(t, r) - rV(t, r) = 0$$

com a condição final $V(T, r) = \max\{V_B(T, r) - E, 0\}$, para determinar o preço $V(t, r)$ da opção.

Outros Produtos sobre Taxas de Juro

Swaps. Um *swap* sobre uma taxa de juro é um contrato entre duas partes para *trocar* os pagamentos das taxas de juro sobre um determinado capital durante um período de tempo previamente acordado.

Suponhamos que o capital é representado por Z e que A paga a B à taxa de juro fixa de r^* . No entanto, B paga a A a uma taxa de juro variável ou flutuante, designada por r . Os pagamentos decorrem até à maturidade T do contrato.

Pretende-se saber qual o valor deste produto financeiro para a parte A. Seja $ZV(t, r)$ esse valor (o que A teria de pagar). Uma forma de modelar o *swap* é considerá-lo uma obrigação de valor $ZV(t, r)$, com pagamento de cupão, que na maturidade não apresenta valor. O cupão é pago de forma contínua e o seu valor é dado por $K(t, r) = (r - r^*)Z$. Substituindo $K(t, r)$ por $(r - r^*)Z$ na EDP que descreve o preço de uma obrigação na presença de um cupão pago de forma contínua, obtém-se a EDP

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(t, r) + [u(t, r) - \lambda(t, r)w(t, r)]\frac{\partial V}{\partial r}(t, r) - rV(t, r) + r - r^* = 0,$$

à qual se deve juntar a condição final $V(T, r) = 0$.

Dependendo da curva de rentabilidade, r pode ser inferior a r^* e o valor de $V(t, r)$ pode ser negativo. O *swap* pode, assim, constituir um débito, o que contrasta com todos os outros produtos financeiros até agora estudados.

Caps e Floors. Um *cap* é um empréstimo a uma taxa de juro variável, com a ressalva desta nunca poder ser superior a um dado valor r^* designado por *cap*. Quem contrai o empréstimo tem de pagar um montante Z na maturidade T do empréstimo. O valor $ZV(t, r)$ do *cap* (ou seja, o que quem contrai o empréstimo tem de pagar) segue a EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}w^2(t, r)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(t, r) + [u(t, r) - \lambda(t, r)w(t, r)]\frac{\partial V}{\partial r}(t, r) - rV(t, r) \\ + \min\{r, r^*\} = 0, \end{aligned}$$

e a condição final $V(T, r) = 1$.

Um *floor* obedece a regras semelhantes às do *cap*, mas a taxa de juro variável não pode, no caso do *floor*, ser inferior a r^* . Bastaria, assim, substituir $\min\{r, r^*\}$ por $\max\{r, r^*\}$ na última equação.

Existem opções sobre *swaps*, *caps* e *floors*. A modelação dos seus valores é feita de modo análogo à modelação do preço de opções sobre obrigações.

Algumas Notas Finais

Os modelos estudados nesta aula e na anterior são conhecidos por modelos de estrutura temporal (*term structure models*) para taxas de juro. Esta designação está associada ao facto destes modelos dependerem da evolução temporal das curvas de rentabilidade.

Os modelos que vimos envolvem um único factor (ou seja, uma única fonte de incerteza) e apresentam algumas limitações na forma como enquadram a *estrutura* da volatilidade. No entanto, são modelos relativamente fáceis de resolver numericamente e, quando utilizados correctamente, apropriados para a atribuição de preços a *caps*, *floors* e opções europeias sobre obrigações ou *swaps*.

Existem outros modelos mais complicados, que apresentam uma estrutura temporal multifactorial. Estes modelos oferecem outra flexibilidade na forma de enquadrar a volatilidade e a sua evolução futura, adaptando-se melhor a derivados sobre taxas de juro mais complexos. Entre os modelos multifactoriais mais conhecidos encontra-se o Modelo de Heath, Jarrow e Morton (HJM) e o Modelo LIBOR. Estes modelos requerem uma simulação computacional dispendiosa e, por este motivo, são mais utilizados para investigação e desenvolvimento do que para a atribuição quotidiana de preços.

Exercícios

- Desenvolva a EDP que descreve o preço de uma obrigação na presença de um cupão pago de forma contínua.
- É possível, e frequente na prática, modelar o preço de opções sobre obrigações através da fórmula de Black-Scholes. Quais são as vantagens e as desvantagens deste procedimento?
- Neste exercício define-se *martingale* como sendo a solução $\{S_t\}_{t \geq 0}$ de uma equação diferencial estocástica da forma $dS_t = \sigma S_t dX_t$.
 - Seja $S_0 = s_0 \in \mathbb{R}$. Mostre que $E(S_t) = s_0$, qualquer que seja $t \geq 0$ (ou seja, que o valor esperado de uma martingale em qualquer instante futuro é sempre igual ao seu valor actual).

Suponha, agora, que tem dois activos financeiros a seguir os processos estocásticos $\{P_t\}_{t \geq 0}$ e $\{Q_t\}_{t \geq 0}$, soluções das equações diferenciais estocásticas

$$\begin{aligned} dP_t &= (r + \sigma_q \sigma_p) P_t dt + \sigma_p P_t dX_t, \\ dQ_t &= (r + \sigma_q^2) Q_t dt + \sigma_q Q_t dX_t, \end{aligned}$$

com r, σ_p, σ_q constantes reais.

- Aplique o Lema de Itô para concluir que

$$\begin{aligned} d(\ln(P_t)) &= (r + \sigma_q \sigma_p - \sigma_p^2/2) dt + \sigma_p dX_t, \\ d(\ln(Q_t)) &= (r + \sigma_q^2/2) dt + \sigma_q dX_t \end{aligned}$$

(basta provar uma das duas).

- Tomando como verdadeira a linearidade na integração de Itô, mostre que

$$d\left(\ln\left(\frac{P_t}{Q_t}\right)\right) = -\frac{(\sigma_p - \sigma_q)^2}{2} dt + (\sigma_p - \sigma_q) dX_t.$$

(d) Aplicando novamente o Lema de Itô, mostre que

$$d\left(\frac{P_t}{Q_t}\right) = (\sigma_p - \sigma_q)\frac{P_t}{Q_t}dX_t.$$

(e) Conclua que $\{P_t/Q_t\}_{t \geq 0}$ é uma martingale e que, como tal,

$$p_0 = q_0 E\left(\frac{P_t}{Q_t}\right).$$

(f) Que papel desempenha σ_q (nas equações que aparecem a seguir à alínea (a))?

(g) Suponha, agora, que $q_0 = 1$ e que Q_t se comporta como um investimento à taxa de juro r constante e com capitalização contínua. Mostre, neste caso, que,

$$p_0 = e^{-rt} E(P_t).$$

Comente esta relação no enquadramento da matéria da disciplina.

Aula 18: Atribuição de Preços a Activos Financeiros (Teorema Fundamental usando Programação Linear)

Começemos por recordar o exemplo da aula sobre neutralidade face ao risco. Tratava-se um activo financeiro cujo preço no instante $t = 0$ valia $S_0 = 20$. Consideraram-se $S_T^\uparrow = cS_0 = 40$ ($c = 2$) e $S_T^\downarrow = bS_0 = 10$ ($b = 0.5$) os valores futuros possíveis para S_T no instante $t = T$. Tomou-se $r = 0.1$ como o valor para uma taxa de juro fixa relativa ao período de tempo em causa. A medida de probabilidade neutra face ao risco (no sentido de não exigir um prémio de risco) foi definida como

$$S_0 = 20 = \frac{1}{1 + 0.1} [40 \mathbb{Q}(\uparrow) + 10 \mathbb{Q}(\downarrow)].$$

As contagens deram $\mathbb{Q}(\uparrow) = 2/5$ e $\mathbb{Q}(\downarrow) = 3/5$. De uma forma geral, temos que as probabilidades neutras face ao risco são dadas por

$$p_c = \frac{R - b}{c - b} \quad \text{e} \quad p_b = \frac{c - R}{c - b},$$

com $R = 1 + r$.

Medida de Probabilidade Neutra Face ao Risco

Generalizemos, agora, a situação anterior a um espaço de estados futuros (para $t = T$) finito, dado por

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$$

e sejam S_0^i , $i = 0, \dots, n$, os preços (em $t = 0$) de $n + 1$ activos financeiros. Supõe-se, sem perda de generalidade, que todos os estados têm uma probabilidade positiva de ocorrência. O primeiro activo, indexado por 0, é um activo sem risco a uma taxa de juro fixa de r . Será conveniente supor que $S_0^0 = 1$. Note-se que os valores deste activo são conhecidos independentemente do estado futuro que venha a acontecer: $S_T^0(\omega_j) = R = 1 + r$, $j = 1, \dots, m$. Sejam $S_T^i(\omega_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, os valores que os activos assumem no instante $t = T$ para os vários estados futuros.

Uma medida de probabilidade neutra face ao risco sobre o espaço de estados $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ é dada por um vector de números (p_1, \dots, p_m) tal que

$$\sum_{j=1}^m p_j = 1, \quad p_j > 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$S_0^i = \frac{1}{R} \left(\sum_{j=1}^m p_j S_T^i(\omega_j) \right) = \frac{1}{R} \mathbb{E}(S_T^i), \quad i = 0, \dots, n,$$

em que $\mathbb{E}(S_T^i)$ representa o valor esperado da variável aleatória S_T^i sob a distribuição de probabilidade neutra face ao risco.

Definição Formal de Arbitragem

Uma oportunidade ou operação de arbitragem (ou simplesmente arbitragem) é uma estratégia de transacção que:

(Tipo A) Tem um *cash flow* inicial positivo e não tem risco de perda no final.

(Tipo B) Não necessita de *cash flow* inicial, não tem risco de perda e tem uma probabilidade positiva de gerar ganhos no futuro.

Teorema Fundamental da Atribuição de Preços a Activos Financeiros

Proposição 1 *Não existe arbitragem do Tipo A se e só se o valor óptimo do programa linear*

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{i=0}^n S_0^i x_i \\ & \text{sujeito a} \quad \sum_{i=0}^n S_T^i(\omega_j) x_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (6)$$

for nulo.

Note que a função objectivo do programa linear representa o custo em formar a carteira no instante $t = 0$ e que as funções das restrições traduzem os ganhos futuros em cada um dos cenários.

Demonstração. Repare-se que $x_i = 0, i = 0, \dots, n$, é um ponto admissível para o programa linear (6) e que, como tal, o seu valor óptimo é menor que ou igual a zero. Além disso, a existir um ponto admissível com valor negativo para a função objectivo tem-se, necessariamente, que (6) é ilimitado (uma vez que as suas restrições são homogéneas). Desta forma, (6) é ilimitado ou, não o sendo, tem valor óptimo nulo.

Note-se que ocorre arbitragem do Tipo A quando existe um ponto admissível para (6) com um valor negativo para a função objectivo. Esta observação e as propriedades sobre este programa linear provadas no parágrafo anterior permitem concluir a demonstração. ■

Proposição 2 *Suponhamos que não existe arbitragem do Tipo A. Não existe arbitragem do Tipo B se e só se todas as restrições em (6) forem activas em todas as suas soluções óptimas.*

Demonstração. Prova-se directamente do facto de todos os estados terem uma probabilidade positiva de ocorrência. ■

O dual de (6) é dado por

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } 0 \\ & \text{sujeito a } \sum_{j=1}^m S_T^i(\omega_j) p_j = S_0^i, \quad i = 0, \dots, n, \\ & \quad p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (7)$$

Como a função objectivo deste programa linear é constante, qualquer um dos seus pontos admissíveis é ótimo.

Teorema 1 *Existe uma medida de probabilidade neutra face ao risco se e só se não existir arbitragem.*

Demonstração. Suponhamos que não existe arbitragem. Como não pode existir arbitragem do Tipo A, o programa linear (6) tem solução ótima e, pelo Teorema da Dualidade Forte, o seu dual (7) tem um ponto admissível. Logo, pelo Teorema de Goldman-Tucker, o primal (6) e o dual (7) têm soluções ótimas, primal x^* e dual p^* , a verificar a condição de complementaridade de forma estrita.

Como não pode também ocorrer arbitragem do Tipo B, todas as restrições primais são activas em x^* . Assim sendo, tem-se que $p_j^* > 0$, $j = 1, \dots, m$. O vector de coordenadas $\bar{p}_j^* = R p_j^*$, $j = 1, \dots, m$, constitui uma medida de probabilidade neutra face ao risco:

$$\sum_{j=1}^m R p_j^* = \sum_{j=1}^m \bar{p}_j^* = 1, \quad (8)$$

$$\frac{1}{R} \left(\sum_{j=1}^m S_T^i(\omega_j) R p_j^* \right) = \frac{1}{R} \left(\sum_{j=1}^m S_T^i(\omega_j) \bar{p}_j^* \right) = S_0^i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (9)$$

A implicação no sentido contrário é deixada como exercício. ■

Exercícios

1. Mostre que para evitar arbitragem tem de ocorrer $b \leq R \leq c$.
2. Prove que se existir uma medida de probabilidade neutra face ao risco então não existem oportunidades de arbitragem.

Aula 19: Detecção de Arbitragem (usando Programação Linear)

Os programas lineares da aula anterior podem ser usados para detectar oportunidades de arbitragem em activos financeiros. Note-se, porém, que estes programas lineares foram formulados sob a hipótese da finitude do espaço de estados futuros.

É possível detectar arbitragem num activo financeiro recorrendo a derivados sobre o próprio e sem limitações relativas ao espaço de estados futuros que o activo pode assumir.

Consideremos, então, um conjunto de n derivados financeiros sobre um mesmo activo e com a mesma maturidade. O activo vale S_0 em $t = 0$ e S_T na maturidade $t = T$. Sejam $\Psi_i(S_T)$, $i = 1, \dots, n$, os ganhos na maturidade para os n derivados. Vamos supor que as funções Ψ_i , $i = 1, \dots, n$, são contínuas e lineares por troços, com dois troços e pontos de quebra K_i , $i = 1, \dots, n$, positivos. (No caso de opções *call* europeias, por exemplo, tem-se que $\Psi_i(S_T) = \max\{S_T - K_i, 0\}$, $i = 1, \dots, n$, em que $K_i = E_i$, $i = 1, \dots, n$, são os preços de exercício.)

Estamos interessados em formar carteiras, constituídas por estes derivados, para os quais existe a possibilidade de arbitragem nos seus preços e no do activo subjacente. Assim sendo, seja x_i , $i = 1, \dots, n$, a composição de uma carteira formada por estes derivados. O ganho desta carteira, na maturidade, é dado por

$$\Psi(x; S_T) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(S_T) x_i.$$

O custo de formar a carteira em $t = 0$ é descrito por

$$\Pi(x) = \sum_{i=1}^n P_0^i x_i,$$

em que P_0^i representa o preço ou prémio de cada derivado ($i = 1, \dots, n$).

Uma carteira x é uma oportunidade de arbitragem do Tipo A se

$$\Pi(x) < 0, \quad \forall_{S_T \in [0, +\infty)} \Psi(x; S_T) \geq 0.$$

Uma carteira x é uma oportunidade de arbitragem do Tipo B se

$$\Pi(x) = 0, \quad \forall_{S_T \in [0, +\infty)} \Psi(x; S_T) \geq 0, \quad \exists_{S_T \in [0, +\infty)} \Psi(x; S_T) > 0.$$

Sendo $\Psi(x; S_T)$ uma combinação linear de funções lineares por troços (com pontos de quebra K_1, \dots, K_n) vem que:

- $\Psi(x; S_T)$ é uma função linear por troços.
- $\Psi(x; S_T)$ é não negativa para todo o $S_T \in [0, +\infty)$ se

$$\Psi(x; 0) \geq 0,$$

$$\Psi(x; K_j) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\Psi'_+(x; K_n) \geq 0 \iff \sum_{i=1}^n [\Psi_i(K_n + 1) - \Psi_i(K_n)] x_i \geq 0.$$

Desta forma, formulamos, para efeitos de detecção de arbitragem nos preços do activo e dos derivados, o seguinte programa linear

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \Pi(x) = \sum_{i=1}^n P_0^i x_i \\ \text{sujeito a} \quad & \Psi(x; 0) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(0) x_i \geq 0, \\ & \Psi(x; K_j) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(K_j) x_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^n [\Psi_i(K_n + 1) - \Psi_i(K_n)] x_i \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Será conveniente, mais à frente, referir este programa linear escrito na forma matricial

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^\top x \\ \text{sujeito a} \quad & Lx \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

É possível estabelecer, de forma semelhante à da aula anterior, os seguintes resultados relativos à inexistência de arbitragem.

Proposição 1 *Não existe arbitragem do Tipo A se e só se o valor óptimo do programa linear (10) for nulo.*

Proposição 2 *Suponhamos que não existe arbitragem do Tipo A. Não existe arbitragem do Tipo B se e só se todas as restrições em (10) forem activas em todas as suas soluções óptimas.*

Teorema 1 *Não existe arbitragem se e só se o dual de (10) tiver um ponto admissível estritamente positivo.*

O caso das opções europeias

Vejamos, agora, em pormenor, o caso em que os derivados são opções *call* europeias com preços de exercício E_1, \dots, E_n e maturidade T . Sejam C_0^i , $i = 1, \dots, n$, os preços das opções no instante $t = 0$. Sob este cenário, o programa linear (10) fica na forma

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c_E^\top x, \\ \text{sujeito a} \quad & L_E x \geq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

em que

$$c_E = \begin{bmatrix} C_0^1 \\ \vdots \\ C_0^n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L_E = \begin{bmatrix} E_2 - E_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ E_3 - E_1 & E_3 - E_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

(Note-se que as duas primeiras restrições em (10) foram retiradas porque são constituídas por coeficientes nulos e, como tal, redundantes.) A matriz L é não singular e, desta forma, o dual de (10) tem solução óptima única.

Seja $C(E)$ a função linear por troços com pontos de quebra E_1, \dots, E_n tal que $C(E_i) = C_0^i$, $i = 1, \dots, n$. Note-se que a função $C(E)$ é estritamente positiva em $[E_1, E_n]$ se $C_0^i > 0$, $i = 1, \dots, n$, estritamente decrescente em $[E_1, E_n]$ se $C_0^i > C_0^{i+1}$, $i = 1, \dots, n - 1$, e estritamente convexa em $[E_1, E_n]$ se

$$\frac{C(E_i) - C(E_{i+1})}{E_{i+1} - E_i} > \frac{C(E_{i+1}) - C(E_{i+2})}{E_{i+2} - E_{i+1}}, \quad i = n - 2, \dots, 1.$$

Teorema 2 *Sejam $E_1 < \dots < E_n$ os preços de exercício de n opções call europeias sobre o mesmo activo, com a mesma maturidade e cujos preços ou prémios são designados por C_0^i , $i = 1, \dots, n$.*

Não existem oportunidades de arbitragem se e só se a função $C(E)$ for estritamente decrescente, estritamente convexa e estritamente positiva no intervalo $[E_1, E_n]$.

Demonstração. O resultado do teorema anterior afirma, sob o cenário das opções consideradas, que não existem oportunidades de arbitragem se e só se existirem escalares y_1, \dots, y_n positivos tais que

$$\begin{aligned} y_n &= C(E_n), \\ y_{n-1} &= \frac{C(E_{n-1}) - C(E_n)}{E_n - E_{n-1}}, \\ y_i &= \frac{C(E_i) - C(E_{i+1})}{E_{i+1} - E_i} - \frac{C(E_{i+1}) - C(E_{i+2})}{E_{i+2} - E_{i+1}}, \quad i = n - 2, \dots, 1. \end{aligned} \quad (13)$$

A partir deste facto e da observação feita antes do (presente) teorema conclui-se facilmente o resultado. ■

O estudo da detecção de arbitragem usando opções *put* de estilo europeu é remetido para um exercício.

O caso de preços *bid-ask*

Suponhamos que, em vez de serem dados preços P_0^i , $i = 1, \dots, n$, para os derivados, são conhecidos preços *bid* $P_{b,0}^i$, $i = 1, \dots, n$ (para compra) e preços *ask* $P_{a,0}^i$, $i = 1, \dots, n$ (para venda). Os preços *bid-ask* satisfazem, obviamente, $P_{a,0}^i > P_{b,0}^i$, $i = 1, \dots, n$.

O programa linear (11) pode ser reformulado para detectar arbitragem, nos derivados e no activo financeiro subjacente a estes, na presença de preços *bid-ask*, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c_a^\top x^a - c_b^\top x^b \\ \text{sujeito a} \quad & L(x^a - x^b) \geq 0, \\ & x^a, x^b \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

em que c_a e c_b são os vectores dos preços *ask* e *bid*. É possível provar, usando os argumentos de dualidade conhecidos, que não existem oportunidades de arbitragem se e só se o dual de (14) tiver um ponto admissível estritamente positivo.

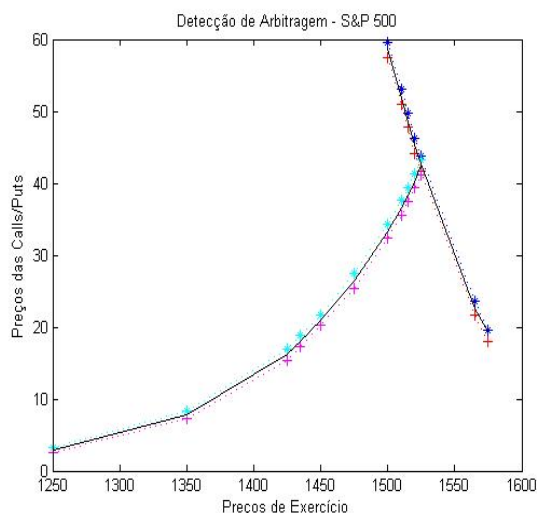
No caso das opções *call* europeias temos o seguinte resultado particular:

Teorema 3 *Sejam $E_1 < \dots < E_n$ os preços de exercício de n opções call europeias sobre o mesmo activo, com a mesma maturidade e cujos preços bid-ask são designados por $C_{b,0}^i, C_{a,0}^i, i = 1, \dots, n$.*

Não existem oportunidades de arbitragem se e só se existir uma função $C(E)$ contínua e linear por troços em $[E_1, E_n]$, com pontos de quebra E_1, \dots, E_n , estritamente decrescente, estritamente convexa e estritamente positiva no intervalo $[E_1, E_n]$ e a verificar $C_{a,0}^i \geq C(E_i) \geq C_{b,0}^i, i = 1, \dots, n$.

Para ilustrar os conceitos introduzidos nesta aula, analisaram-se opções *call* e *puts* sobre o índice S&P 500 (<http://www.cboe.com>) com maturidade a 21/09/2007. Foram usados os preços *bid-ask* cotados no dia 25/06/2007 e ignoradas as opções cujo volume de transacção, neste dia, era inferior a 100 unidades (que, sendo pouco líquidas, poderiam não reflectir preços justos e estar sujeitas a arbitragem).

Foi possível mostrar ser satisfeita a condição necessária e suficiente para a não existência de arbitragem (dada no teorema anterior para o caso das opções *call*), como se ilustra na figura seguinte:



Veja-se que a função em causa está entre os preços *bid-ask* e satisfaz todas as condições exigidas: positividade, convexidade e monotonia decrescente (*calls*) e monotonia crescente (*puts*). Não se encontraram, assim, oportunidades de arbitragem. Note-se, porém, que só foram consideradas opções relativamente líquidas e, por outro lado, que os dados são disponibilizados (gratuitamente) em <http://www.cboe.com> com 20 minutos de atraso (o que não permite detectar arbitragem em tempo real).

Exercícios

1. Sejam $E_1 < \dots < E_n$ os preços de exercício de n opções *put* europeias sobre o mesmo activo e com a mesma maturidade. Sejam P_0^i , $i = 1, \dots, n$, os preços das opções no instante $t = 0$.

Seja $P(E)$ a função linear por troços com pontos de quebra E_1, \dots, E_n tal que $P(E_i) = P_0^i$, $i = 1, \dots, n$, e $P(0) = 0$.

Prove que não existem oportunidades de arbitragem se e só se a função $P(E)$ for estritamente crescente, estritamente convexa e estritamente positiva no intervalo $[0, E_n]$.

2. Na presença de preços *bid-ask* prove que não existem oportunidades de arbitragem se e só se o dual de (14) tiver um ponto admissível estritamente positivo.
3. Prove o último teorema da aula e estabeleça um resultado semelhante para opções *put* europeias.

Aula 20: Seleção de Carteiras — Modelo Quadrático de Markowitz

Esta aula constitui um ponto de viragem neste curso de Matemática Financeira. Até ao momento, estudámos modelos para o comportamento do preço de produtos derivados (futuros, opções, *etc.*) sobre activos financeiros (acções, índices accionistas, taxas de juro, obrigações, mercadorias, *etc.*). Os modelos considerados basearam-se, essencialmente, em problemas governados por equações diferenciais com derivadas parciais.

Vamos, a partir de agora, estudar a seleção (ou constituição) de carteiras (ou portefólios) de investimento. As carteiras de investimento são constituídas, de uma forma geral, por títulos accionistas (acções ou obrigações, por exemplo, ou classes ou índices das mesmas)⁸. Os modelos que estudaremos assentam em problemas de optimização.

Suponhamos que um investidor pretende gastar uma determinada quantia de dinheiro num conjunto de n títulos accionistas. O retorno de cada título accionista i é descrito por uma variável aleatória R_i , cuja média pode ser conhecida (tipicamente por estimação com base em dados históricos). Sejam μ_i , $i = 1, \dots, n$, os retornos esperados dos títulos. Sejam x_i , $i = 1, \dots, n$, as proporções do investimento total a investir em cada um dos títulos.

O retorno esperado da carteira é, assim, dado por

$$E(R) = E(x_1 R_1 + \dots + x_n R_n) = x_1 \mu_1 + \dots + x_n \mu_n \stackrel{\text{def}}{=} \mu^\top x,$$

com

$$\mu = [\mu_1 \ \dots \ \mu_n]^\top \quad \text{e} \quad x = [x_1 \ \dots \ x_n]^\top.$$

A variância do retorno é escrita na forma

$$V(R) = E \left(\left[\sum_{i=1}^n x_i R_i - E \left(\sum_{i=1}^n x_i R_i \right) \right]^2 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j,$$

se representarmos cada entrada i, j da matriz das covariâncias Q por $\sigma_{ij} = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)]$. Na forma matricial, vem que

$$V(R) = x^\top Q x.$$

A matriz Q é, obviamente, simétrica. É também semi-definida positiva, uma vez que a variância nunca é negativa. Vamos supor que Q é definida positiva, o que indica, na prática, a inexistência de títulos redundantes.

Nem todas as escolhas são admissíveis na constituição de uma carteira. No entanto, é possível representar a maioria das restrições práticas de forma poliédrica. Desta forma,

⁸A expressão *título accionista* pretende ser uma tradução para *equity* ou *security*. Não são considerados outros tipos de bens ou activos nas carteiras de investimento sob análise.

vamos considerar que o conjunto das carteiras admissíveis é representável através do conjunto poliédrico

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, Cx \geq d\},$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $d \in \mathbb{R}^p$, com m e p números inteiros positivos. Uma das restrições modelável desta forma, que vamos considerar sempre presente nos modelos a desenvolver, é a restrição de igualdade

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Ao impormos esta restrição estamos a tomar as variáveis x_i como percentagens do investimento total. Se quiséssemos que estas variáveis correspondessem às quantidades de dinheiro a investir nos diferentes títulos, consideraríamos, antes, a restrição de igualdade $\sum_{i=1}^n x_i = M$, onde M seria o montante total do investimento. De uma forma ou de outra, existe a necessidade de impor as n restrições de desigualdade

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

A menos que se diga algo em contrário, o conjunto poliédrico X é definido por

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

O Modelo de Markowitz

O modelo de Markowitz assenta na formulação de um problema de optimização de média-variância. Através da resolução deste problema identifica-se a carteira de menor variância de entre todas as que proporcionam um retorno esperado não inferior a um determinado valor-alvo r . Pretende-se, deste modo, minimizar o risco a partir de um determinado nível de retorno.

A formulação deste problema pode ser descrita na forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x^\top Qx \\ &\text{sujeito a} && \mu^\top x \geq r, \\ &&& x \in X. \end{aligned}$$

Designaremos este problema por $OMV(r)$. Trata-se de um problema de optimização ou programação quadrática (isto porque a função objectivo é quadrática e as restrições são definidas por funções afins), muitas vezes designado por programa quadrático. Os pacotes de *software* para optimização contínua e não linear estão preparados para resolver numericamente programas quadráticos.

O problema de optimização $OMV(r)$ é, também, um problema convexo, uma vez que a função objectivo é convexa e a sua região admissível

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \mu^\top x \geq r, x \in X\}$$

é um conjunto convexo. Aliás, a função objectivo é estritamente convexa: para cada valor positivo do parâmetro r , o problema $OMV(r)$ tem uma solução única (sempre que a sua região admissível seja não vazia; ver exercício no final desta aula).

Diversificação

É sabido que as soluções do modelo de Markowitz tendem a não diversificar as carteiras tanto quanto o desejado, colocando, por vezes, demasiado peso em títulos com baixo retorno. Para contornar este efeito, os investidores costumam incluir restrições do tipo

$$x_i \leq m, \quad i = 1, \dots, n,$$

limitando o investimento em cada componente da carteira ($m \in (0, 1)$). É também possível limitar o investimento sectorialmente, impondo restrições da forma

$$\sum_{i \in S_k} x_i \leq m_k,$$

para cada classe S_k de títulos considerada ($m_k \in (0, 1)$).

O valor objectivo óptimo do problema $OMV(r)$ sobe de cada vez que se inclui em X uma nova restrição. Logo, é necessário ter em linha de conta que a diversificação de uma carteira aumenta a variância do seu retorno e, conseqüentemente, o seu risco.

Custos de Transacção

Em diversas situações práticas, o que se pretende é re-balancear a carteira. Assim sendo, existe uma carteira de referência, que designaremos por x^0 , e a necessidade de limitar as potenciais transacções que o modelo venha a determinar.

Seja y_i a quantidade de títulos i a comprar e z_i a quantidade de títulos i a vender. Seja h o valor máximo para todas as transacções (de compra e venda) permitidas. O problema a resolver passa a ser o seguinte

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x^\top Qx \\ &\text{sujeito a} && \mu^\top x \geq r, \\ &&& x \in X, \\ &&& x_i - x_i^0 \leq y_i, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ &&& x_i^0 - x_i \leq z_i, \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ &&& \sum_{i=1}^n [y_i + z_i] \leq h. \end{aligned}$$

Este problema possuiu a mesma estrutura do anterior, mas inclui $2n$ novas variáveis e $4n + 1$ novas restrições. Estas novas restrições são conhecidas por restrições de *turnover* (h é o valor máximo de *turnover* permitido).

É possível introduzir os custos de transacção directamente no modelo em vez de impor restrições de *turnover*. Seja t_i^y o custo de transacção associado à compra de cada unidade percentual do título i . Da mesma forma, seja t_i^z o custo de transacção associado à venda de cada unidade percentual do título i . A carteira procurada corresponderia à solução do problema

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && x^\top Qx \\ & \text{sujeito a} && \sum_{i=1}^n [\mu_i x_i - t_i^y y_i - t_i^z z_i] \geq r, \\ & && x \in X, \\ & && x_i - x_i^0 \leq y_i, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ & && x_i^0 - x_i \leq z_i, \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Em muitas aplicações, a matriz das covariâncias Q é praticamente singular, apresentando valores próprios muito perto de zero. Este facto faz com que pequenas perturbações nos dados do problema original $\text{OMV}(r)$ conduzam a grandes variações nas suas soluções. Neste sentido, o problema $\text{OMV}(r)$ diz-se pouco robusto, algo que estudaremos mais à frente. Os dois últimos problemas apresentados possuem maior robustez, porque limitam, num caso, e penalizam, noutro, as alterações à carteira de referência x^0 , tornando as suas soluções menos sensíveis a variações nos dados.

Deixa-se uma nota final sobre as restrições de não-negatividade $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Nem sempre existe necessidade de impor estas restrições em todas as variáveis. Um valor negativo para uma variável x_i indica a tomada de uma posição curta sobre o correspondente activo (aquilo a que se designa por venda a descoberto ou *short sale* — vender o que não se possui). Nestes dois últimos problemas, envolvendo uma carteira de referência x^0 , o papel destas restrições é menos relevante (por ser menos provável que uma solução óptima tenha componentes negativas).

Exercícios

1. Descreva matricialmente o conjunto poliédrico

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\},$$

identificando as matrizes e os vectores A , b , C e d .

2. Mostre que o problema $\text{OMV}(r)$ admite uma solução única quando a sua região admissível é não vazia e o conjunto poliédrico é o dado em cima. **Sugestão:** Mostre, antes, que toda a função contínua e estritamente convexa num conjunto convexo e fechado possui um único minimizante.

3. Prove que o valor objectivo óptimo do problema $OMV(r)$ aumenta (ou, mais rigorosamente, não diminui) quando se inclui em X uma nova restrição.
4. Considere um problema alternativo de optimização de média-variância, designado por $OMV2(r)$, em que

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Diga qual dos problemas ($OMV(r)$ ou $OMV2(r)$) apresenta um valor objectivo óptimo menor.

Aula 21: Seleção de Carteiras — Fronteira de Eficiência

Em todos os modelos que vimos, até ao momento, para a constituição ou re-balanceamento de carteiras de investimento, foi considerado constante o valor r do retorno mínimo exigido à carteira seleccionada ($\mu^\top x \geq r$). Na prática, existe a necessidade de atribuir a r diversos valores e de analisar as correspondentes carteiras de risco mínimo.

Fronteira de Eficiência

Regressemos ao modelo de Markowitz para a seleção de carteiras de investimento e consideremos, novamente, o problema de programação quadrática OMV(r)

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x^\top Qx \\ &\text{sujeito a} && \mu^\top x \geq r, \\ &&& x \in X, \end{aligned}$$

em que a matriz Q é simétrica e definida positiva e

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Como a matriz Q é definida positiva e o conjunto poliédrico X é limitado, o problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x^\top Qx \\ &\text{sujeito a} && x \in X \end{aligned}$$

tem uma e uma só solução, que designaremos por x_{min} e que corresponde à carteira admissível de variância mínima. Seja $r_{min} = \mu^\top x_{min}$. De forma semelhante, seja x_{max} uma constituição da carteira de variância máxima⁹ e seja $r_{max} = \mu^\top x_{max}$.

Com o objectivo de estudar a solução dos problemas OMV(r) para vários valores de r , definimos a função

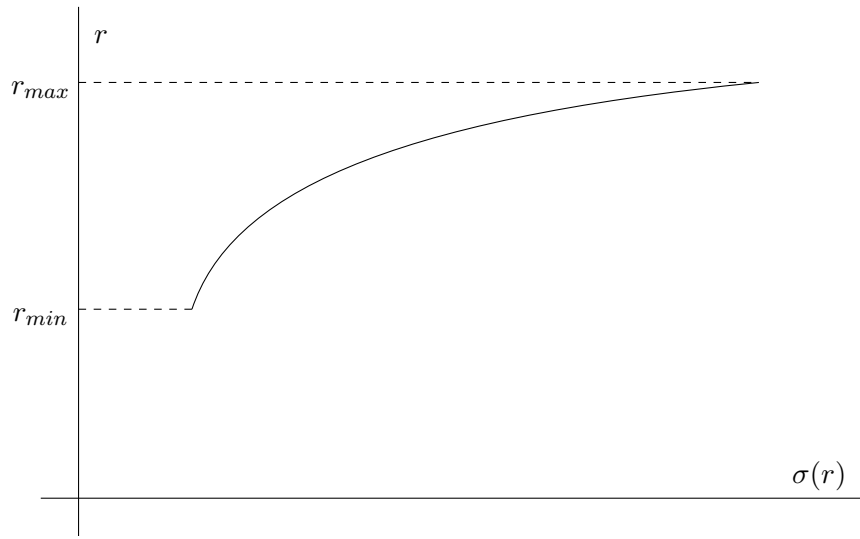
$$\sigma : [r_{min}, r_{max}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(r) = \sqrt{x_r^\top Qx_r},$$

em que x_r designa a solução óptima de OMV(r). O gráfico da função σ ,

$$E = \{(\sigma(r), r) : r \in [r_{min}, r_{max}]\},$$

designa-se por *fronteira de eficiência*. Esta curva possui, geralmente, uma forma parecida com a apresentada na figura seguinte.

⁹Uma carteira admissível associada à variância máxima poderia não existir se X fosse um conjunto ilimitado.



O gráfico de σ deve ser interpretado na horizontal. É típico traçar este gráfico marcando no eixo das ordenadas o valor de r (retorno esperado) e no eixo das abcissas o valor de $\sigma(r)$ (desvio padrão do retorno). Vê-se, assim, que a função σ é estritamente convexa (algo que pode ser provado matematicamente).

Dado um ponto $(\sigma(r), r)$ em E , ao qual corresponde uma carteira com a composição dada por x_r , não existe nenhuma outra carteira admissível que tenha, simultaneamente, um retorno, em média, superior e, em desvio padrão, inferior. É neste sentido que os pontos de E se chamam *eficientes*.

Perante o conhecimento aproximado da curva de eficiência E (através da resolução do problema OMV(r) para vários valores de r), a questão que se coloca é identificar a carteira com as características mais desejáveis. A escolha é remetida para o agente de decisão, neste caso o investidor, e depende do peso que este atribui aos dois critérios em causa (média e desvio padrão do retorno).

O Rácio de Sharpe

Uma forma de identificar uma carteira na fronteira de eficiência é através da maximização do chamado rácio de Sharpe. Para o efeito, é preciso dispor de um valor ($r_f > 0$) para o retorno esperado de uma carteira sem risco. Suporemos que $r_f < r_{min}$, o que é natural pelo facto da carteira x_{min} comportar um risco (mesmo que mínimo).

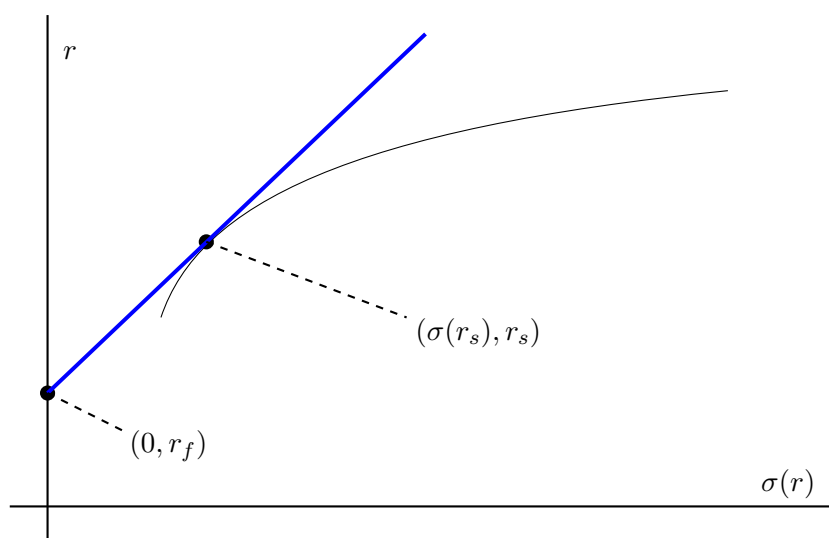
O rácio de Sharpe é dado por

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu^\top x - r_f}{\sqrt{x^\top Q x}}.$$

Pretende-se identificar o ponto $(\sigma(r_s), r_s)$ em E , com $\sigma(r_s) = \sqrt{x_s^\top Q x_s}$, para o qual x_s maximiza esta quantidade. Desta forma, identifica-se a carteira x_s associada à fronteira de

eficiência que maior diferencial médio de retorno proporciona por unidade de risco (desvio padrão do retorno), relativamente a um investimento sem risco. Trata-se de identificar um rácio óptimo entre a recompensa e a variabilidade do investimento (*reward-to-variability ratio*).

Geometricamente, é simples identificar a carteira x_s se considerarmos as semi-rectas com origem em $(0, r_f)$ e que passam por pontos de E . O ponto $(\sigma(r_s), r_s)$ corresponde à semi-recta com estas propriedades que maior declive apresenta num ponto de E (como se reporta na figura a seguir).



A carteira x_s pode ser determinado resolvendo o problema

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && h(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in X. \end{aligned}$$

Porém, a função objectivo deste problema não é côncava, o que faz com que o problema não seja um problema de optimização convexa. A sua resolução numérica fica comprometida pois pode requerer o cálculo de vários maximizantes locais até que o global seja identificado.

Uma estratégia para determinar x_s aproximadamente é traçar um número de pontos suficientemente grande na fronteira admissível, para, depois, descortinar uma possível recta tangente ao gráfico que passe por $(r_f, 0)$.

Existe uma alternativa a estes procedimentos, que assenta no seguinte resultado.

Teorema 1 *A carteira associada à fronteira de eficiência E que maximiza o rácio de*

Sharpe é a solução do problema

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } y^\top Qy \\ & \text{sujeito a } (y, \kappa) \in X^+, \\ & (\mu - r_f e)^\top y = 1, \end{aligned}$$

em que

$$X^+ = \left\{ (y, \kappa) \in \mathbb{R}^{n+1} : \kappa > 0, \frac{y}{\kappa} \in X \right\} \cup \{(0, 0)\}$$

e

$$e = [1 \cdots 1]^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Em primeiro lugar constata-se, através da mudança de variável definida por

$$y = \kappa x \quad \text{e} \quad (\mu - r_f e)^\top x = \frac{1}{\kappa} \quad (\kappa > 0)$$

que o problema, em x , da maximização do rácio de Sharpe é equivalente ao seguinte problema, em (y, κ) :

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } \frac{1}{\sqrt{y^\top Qy}} \\ & \text{sujeito a } \frac{y}{\kappa} \in X, \quad \kappa > 0, \\ & (\mu - r_f e)^\top y = 1. \end{aligned}$$

(Lembramos que $e^\top x = 1$.)

Por sua vez, este problema é equivalente a

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } y^\top Qy \\ & \text{sujeito a } \frac{y}{\kappa} \in X, \quad \kappa > 0, \\ & (\mu - r_f e)^\top y = 1. \end{aligned}$$

A demonstração é concluída reunindo o conjunto

$$\left\{ (y, \kappa) \in \mathbb{R}^{n+1} : \kappa > 0, \frac{y}{\kappa} \in X \right\}$$

com $\{(0, 0)\}$, o que não altera a região admissível deste último problema porque $y = 0$ não satisfaz a restrição $(\mu - r_f e)^\top y = 1$. ■

Note-se que o problema formulado neste teorema possui uma função objectivo quadrática e convexa. Quando X é um conjunto poliédrico, o cone X^+ também é poliédrico (e estamos na presença de um programa quadrático convexo com $n + 1$ variáveis).

Exercícios

1. Mostre que a função σ é estritamente convexa.
2. Prove que X^+ é, em geral, um cone.
3. Identifique X^+ quando X representa uma circunferência de raio unitário em \mathbb{R}^2 .
4. Mostre que quando X é um conjunto poliédrico da forma

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, Cx \geq d\},$$

se tem que

$$X^+ = \{(y, \kappa) \in \mathbb{R}^{n+1} : Ay = \kappa b, Cy \geq \kappa d, \kappa \geq 0\}.$$

5. Recorrendo ao resultado do teorema desta aula e ao exercício anterior, determine, numericamente em MATLAB, a carteira que maximiza o rácio de Sharpe para o problema de selecção de carteiras formulado nos exercícios da aula seguinte.
6. Considere o seguinte problema de optimização (dependente do parâmetro σ):

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \mu^\top x \\ &\text{sujeito a} && x^\top Qx \leq \sigma^2, \\ &&& x \in X. \end{aligned}$$

- (a) Qual é o significado financeiro deste problema?
 - (b) Estude, em função de σ , a existência e unicidade de solução para este problema.
 - (c) Seja σ_{min} (resp. σ_{max}) o valor do risco para o qual o retorno é mínimo (resp. máximo). Trace o gráfico da função $r : [\sigma_{min}, \sigma_{max}] \rightarrow \mathbb{R}$.
7. Considere o seguinte problema de optimização:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \mu^\top x - \delta x^\top Qx \\ &\text{sujeito a} && x \in X, \end{aligned}$$

em que δ é um parâmetro a tomar valores em $[0, +\infty)$.

- (a) Qual é o significado financeiro deste problema?
- (b) Estude, em função de δ , a existência e unicidade de solução para este problema.
- (c) Para que valor de δ obteria a carteira de máximo retorno?
- (d) Como obteria a carteira de menor risco?

Aula 22: Selecção de Carteiras — Modelo Linear

O risco associado ao retorno aleatório R da carteira considerado nas aulas anteriores foi medido pela variância de R . Estamos interessados, agora, em considerar esta medida de risco na forma $\sqrt{V(R)}$:

$$\sigma_{\ell_2}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{E \left(\left[\sum_{i=1}^n x_i R_i - E \left(\sum_{i=1}^n x_i R_i \right) \right]^2 \right)} = \sqrt{E \left(\left[\sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i) x_i \right]^2 \right)}.$$

Recorde-se que R_i é a variável aleatória correspondente ao retorno do título i e que μ_i representa a sua média.

É possível analisar este risco sob diferentes operadores. Por exemplo, se tomarmos o operador ℓ_1 , vem que

$$\sigma_{\ell_1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} E \left(\left| \sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i) x_i \right| \right).$$

No caso Gaussiano, esta medida de risco relaciona-se com a anterior de acordo com a fórmula descrita no seguinte teorema.

Teorema 1 *Se (R_1, \dots, R_n) seguir uma distribuição normal multivariada então*

$$\sigma_{\ell_1}(x) = \sqrt{2/\pi} \sigma_{\ell_2}(x).$$

Demonstração. Este resultado é facilmente demonstrado através das propriedades das leis normais. Sabe-se que $\sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i)x_i$ também segue uma distribuição normal, com média 0 e desvio padrão $\sigma_{\ell_2}(x)$. Logo,

$$\sigma_{\ell_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\ell_2}(x)} \int_{\mathbb{R}} |u| e^{-\frac{u^2}{2\sigma_{\ell_2}(x)^2}} du = \sqrt{2/\pi} \sigma_{\ell_2}(x).$$

■

As duas medidas diferem apenas numa constante. Assim sendo, no caso Gaussiano, é possível substituir a função objectivo do problema $\text{OMV}(r)$ pela função de risco na norma ℓ_1 , obtendo-se, equivalentemente, o seguinte problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && E \left(\left| \sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i) x_i \right| \right) \\ &\text{sujeito a} && \mu^\top x \geq r, \\ &&& x \in X. \end{aligned}$$

Este problema de optimização de média-desvio(ℓ_1) pode ser resolvido para determinar a composição da carteira, independentemente da hipótese Gaussiana que o motivou ser ou não ser praticável. Porém, a sua função objectivo depende, de forma não linear e não suave, das variáveis x_i , $i = 1, \dots, n$. Dada a presença do valor absoluto antes do somatório, não é possível linearizar directamente esta função, aplicando médias aos retornos R_i , $i = 1, \dots, n$.

O Modelo de Konno e Yamazaki

Uma linearização possível ocorre num cenário discreto, como veremos já a seguir. Consideremos n_t períodos de tempo. Seja r_{it} a realização da variável aleatória R_i no período de tempo t . Os valores para r_{it} , $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, n_t$, podem ser obtidos através de dados históricos ou recorrendo a projecções futuras. Uma estimativa para a média μ_i é dada pela média aritmética das ocorrências

$$\mu_i = \frac{1}{n_t} \sum_{t=1}^{n_t} r_{it}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Aplicando o mesmo tipo de estimativa, vem que

$$E \left(\left| \sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i) x_i \right| \right) = \frac{1}{n_t} \sum_{t=1}^{n_t} \left| \sum_{i=1}^n (r_{it} - \mu_i) x_i \right|.$$

A expressão estimada ainda depende (não linear e não suavemente) de x .

No entanto, o problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \frac{1}{n_t} \sum_{t=1}^{n_t} \left| \sum_{i=1}^n (r_{it} - \mu_i) x_i \right| \\ &\text{sujeito a} && \mu^\top x \geq r, \\ &&& x \in X \end{aligned}$$

é equivalente ao problema OMD1(r)

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \frac{1}{n_t} \sum_{t=1}^{n_t} [y_t + z_t] \\ &\text{sujeito a} && y_t - z_t = \sum_{i=1}^n (r_{it} - \mu_i) x_i, \quad t = 1, \dots, n_t, \\ &&& \mu^\top x \geq r, \\ &&& x \in X, \\ &&& y_t \geq 0, \quad z_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, n_t. \end{aligned}$$

A função objectivo deste problema é linear. São afins todas as funções que definem as restrições. Estamos na presença de um problema de optimização linear, também conhecido por problema de programação linear ou simplesmente por programa linear.

A equivalência entre os dois problemas resultou do facto de ser possível substituir, no contexto de minimização, $\left| \sum_{i=1}^n (r_{it} - \mu_i) x_i \right|$ por $y_t + z_t$ com $\sum_{i=1}^n (r_{it} - \mu_i) x_i = y_t - z_t$ e $y_t, z_t \geq 0$. O programa linear tem mais $2n_t$ variáveis (a tomar valores não negativos) e mais n_t restrições de igualdade do que o seu antecessor.

Em princípio, um programa linear é resolvido numericamente com menos esforço computacional do que um programa quadrático de dimensões semelhantes. A abordagem de Konno e Yamazaki pode ser, por este motivo, mais apropriada para problemas de selecção de carteiras de grandes dimensões do que a abordagem de Markowitz.

Exercícios

1. (Este exercício é para ser resolvido numericamente em MATLAB.)

Considere uma carteira constituído por três títulos: acções, obrigações e depósitos a prazo. Os valores históricos destes três títulos são dados na seguinte tabela¹⁰:

Ano	Acções	Obrigações	Depósitos
1990	367.636	1944.25	817.87
1991	479.633	2320.64	854.10
1992	516.178	2490.97	879.04
1993	568.202	2816.40	905.06
1994	575.705	2610.12	954.39
1995	792.042	3287.27	1007.84
1996	937.897	3291.58	1061.15
1997	1298.82	3687.33	1119.51
1998	1670.01	4220.24	1171.91
1999	2021.40	3903.32	1234.02
2000	1837.36	4575.33	1313.00
2001	1618.98	4827.26	1336.89
2002	1261.18	5558.40	1353.47
2003	1622.94	5588.19	1366.73

- (a) Calcule uma estimação das médias μ_1 , μ_2 e μ_3 dos retornos dos três títulos através da média aritmética dos retornos $r_{it} = (v_{it} - v_{it-1})/v_{it-1}$.
- (b) Calcule uma estimação das entradas da matriz Q das covariâncias através da fórmula

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{n_t} \sum_{t=1}^{n_t} (r_{it} - \mu_i)(r_{jt} - \mu_j).$$

- (c) Resolva os problemas $OMV(r)$ e $OMD1(r)$ para os seguintes valores de r : 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1 e 0.11.
- (d) Compare os resultados, verificando se é satisfeita a hipótese de retornos Gaussianos.

¹⁰Estes valores são dados em dólares e foram retirados de G. Cornuejols e R. H. Tütüncü, *Optimization Methods in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. As acções correspondem ao Índice S&P500 e as obrigações são as do Tesouro norte-americano a 10 anos. Os valores dos depósitos a prazo foram calculados com recurso à taxa de juro federal diária norte-americana.

Aula 23: Seleção de Carteiras — Modelo de Black-Litterman

O modelo de Black-Litterman combina a perspectiva do investidor com o equilíbrio do mercado, alterando os valores da esperança e da variância dos retornos calculados historicamente.

Suponhamos, então, que existem n títulos accionistas no mercado descritos pelo vector aleatório R , cuja média e a matriz das covariâncias são conhecidas (a partir de estimação histórica) e representadas, respectivamente, por π e Σ . Recordemos que na notação do modelo de Markowitz usámos $\mu = \pi$ e $\Sigma = Q$.

No modelo de Black-Litterman, μ passa a representar uma média não determinística, mas estocástica. Por um lado, μ não pode diferir muito da média histórica π e, assim sendo, impõe-se que

$$\mu = \pi + \epsilon_1, \quad (15)$$

com

$$\epsilon_1 \sim N(0, \tau\Sigma)$$

e τ um número pequeno. Por outro lado, μ deve reflectir as perspectivas do investidor sobre o mercado. Estas perspectivas (em número k) são traduzidas por

$$P\mu = q + \epsilon_2, \quad (16)$$

em que:

- A matriz $P \in \mathbb{R}^{k \times n}$ expressa as k perspectivas subjectivas do investidor.
- O vector $q \in \mathbb{R}^k$ especifica as percentagens dos retornos das k perspectivas do investidor.
- $\epsilon_2 \sim N(0, \Omega)$ e $\Omega \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é uma matriz diagonal em que os elementos diagonais são positivos e expressam o grau de incerteza das perspectivas (independentes entre si) do investidor.

Escrevemos as equações (15) e (16) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \mu = \begin{bmatrix} \pi \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} \iff A\mu = b + \epsilon,$$

com

$$A = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \pi \\ q \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Estamos na presença de um sistema de equações lineares sobredeterminado em que a matriz é determinística, o vector de variáveis é estocástico e o termo independente é estocástico, da forma $b + \epsilon$ com ϵ a seguir uma lei normal

$$\epsilon \sim N(0, W) \quad \text{com} \quad W = \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}.$$

O sistema $A\mu = b + \epsilon$ pode ser resolvido no sentido dos mínimos quadrados. É possível, então, provar que a solução do problema linear de mínimos quadrados regressivos correspondente, $\min \|A\mu - (b + \epsilon)\|$, é um vector μ de variáveis aleatórias a seguir uma lei normal de média

$$\bar{\mu} = (A^T W^{-1} A)^{-1} A^T W^{-1} b = [(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \pi + P^T \Omega^{-1} q]$$

e matriz das covariâncias

$$B = (A^T W^{-1} A)^{-1} = [(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1}.$$

Exemplos

O problema de selecção de carteiras escolhido para exemplificar o modelo de Black-Litterman encontra-se relatado na aula sobre o modelo linear de Konno e Yamazaki. As carteiras a seleccionar são constituídas por acções, obrigações e depósitos a prazo. Usando uma média aritmética para calcular o valor esperado dos retornos históricos obtém-se

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.1378 \\ 0.0891 \\ 0.0404 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.0357 & 0.0025 & 0.0012 \\ 0.0025 & 0.0097 & 0.0001 \\ 0.0012 & 0.0001 & 0.0003 \end{bmatrix}.$$

Vamos abordar dois exemplos. Em ambos os caso tomaremos $\tau = 0.1$. No primeiro exemplo, supõe-se que o investidor tem duas perspectivas, uma forte (com um grau de certeza elevado) e outra fraca, sendo elas respectivamente:

- O retorno referente aos depósitos será de 2% com um erro de 0.00001.
- O retorno referente às acções excederá o retorno das obrigações em 5% com um erro de 0.001.

Estas duas perspectivas são traduzidas pelo modelo de Black-Litterman através de:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.05 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}.$$

A média e a matriz das covariâncias de μ dadas pelo modelo de Black-Litterman são as seguintes:

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} 0.1127 \\ 0.0741 \\ 0.0253 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0.0013 & 0.0005 & 0.00001 \\ 0.0005 & 0.0008 & 0.000008 \\ 0.00001 & 0.000008 & 0.000008 \end{bmatrix}.$$

Num segundo exemplo, o investidor tem apenas a perspectiva de que o retorno das acções excederá metade do valor dos retornos das obrigações e dos depósitos em 10% com um erro de 0.00001 (perspectiva forte). Neste caso tem-se que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0.00001 \end{bmatrix}.$$

A média dos retornos segundo Black-Litterman passa a ser

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} 0.1642 \\ 0.0873 \\ 0.0412 \end{bmatrix}.$$

Perspectivas com 100% de Confiança

Quando o investidor tem 100% de confiança nas suas perspectivas — o que quase nunca acontece na prática — então $P\mu = q$, ou seja, $P\bar{\mu} = q$. Repare-se que, neste cenário, $\epsilon_2 = 0$ e $\Omega = 0$ e a matriz W não é invertível. Deste modo, não podemos calcular $\bar{\mu}$ como solução regressiva do sistema $A\mu = b + \epsilon$.

A forma de contornar esta aparente dificuldade consiste em calcular $\bar{\mu}$ como a solução do problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \|(\tau\Sigma)^{-\frac{1}{2}}(\bar{\mu} - \pi)\|^2 \\ &\text{sujeito a} \quad P\bar{\mu} = q, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, do problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \frac{1}{2}(\bar{\mu} - \pi)^\top (\tau\Sigma)^{-1}(\bar{\mu} - \pi) \\ &\text{sujeito a} \quad P\bar{\mu} = q. \end{aligned} \tag{17}$$

Formulando e resolvendo as condições necessárias e suficientes para este problema vem que

$$\bar{\mu} = \pi + (\tau\Sigma)P^\top [P(\tau\Sigma^{-1})P^\top]^{-1}(q - P\pi).$$

No primeiro exemplo apresentado anteriormente, se ambas as perspectivas fossem vistas com 100% de certeza, o valor médio de μ , de acordo com a fórmula anterior, daria:

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} 0.1158 \\ 0.0658 \\ 0.02 \end{bmatrix}.$$

Exercícios

1. Resolva o sistema formado pelas condições necessárias para o problema (17). Diga por que motivo estas condições são também suficientes para caracterizar o minimizante global do problema.

Aula 24: Ajuste e Uso de Matrizes de Covariâncias

Ajuste de Matrizes de Covariâncias

A matriz de covariâncias de um vector aleatório, que caracteriza a dispersão das componentes do vector em torno da sua esperança matemática, é frequentemente utilizada no contexto financeiro, em particular nos modelos de média-variância. Porém, as matrizes de covariâncias utilizadas nestes e noutros modelos resultam de estimativas e, como tal, estão sujeitas a erros.

Uma matriz de covariâncias é simétrica e semidefinida positiva. No entanto, uma sua estimação, elemento a elemento, pode não exibir estas propriedades. Nestas situações, é possível ajustar ou corrigir a matriz estimada. Assim, admitamos conhecida uma estimativa $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para uma dada matriz de covariâncias. Pretende-se, numa primeira fase, saber como encontrar uma matriz simétrica e definida positiva em $\mathbb{R}^{n \times n}$ o menos distante possível de H .

Este ajuste ou estimação faz-se no cone das matrizes simétricas e semidefinidas positivas de dimensão $n \times n$, representado por

$$C_s^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X \succcurlyeq 0\}$$

e através da norma matricial de Frobenius ou do traço definida por

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^2}.$$

Deste modo, o problema da determinação da matriz de covariâncias mais próxima de H formula-se da forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \|X - H\|_F \\ &\text{sujeito a} && X \in C_s^n. \end{aligned}$$

Forma Cónica Equivalente

Repare-se que a variável deste problema é uma matriz e não um vector, como é habitual nos problemas de optimização. É possível, porém, converter este problema noutro mais tratável. Em primeiro lugar, considerando uma variável muda $t \in \mathbb{R}$, reescreve-se o problema, de forma equivalente, nas variáveis t e X :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && t \\ &\text{sujeito a} && \|X - H\|_F \leq t \\ &&& X \in C_s^n. \end{aligned}$$

Veja-se que a desigualdade $\|X - H\|_F \leq t$ é, na verdade, uma restrição quadrática:

$$\begin{aligned} \|X - H\|_F \leq t &\iff \|X - H\|_F^2 - t^2 \leq 0 \\ \iff \|x - h\|^2 - t^2 \leq 0 &\iff x^\top I x - 2h^\top x + \gamma \leq 0, \end{aligned}$$

com $\gamma = h^\top h - t^2$ e $x, h \in \mathbb{R}^{n^2}$ vectores que guardam, respectivamente, as componentes de X e de H .

Como a matriz desta restrição quadrática é definida positiva (trata-se da matriz identidade de ordem n^2), é possível reescrever, também de forma equivalente, esta restrição na forma cónica de segunda ordem:

$$y_0 \geq \|(y_1, \dots, y_{n^2})^\top\|$$

em que

$$y_0 = \sqrt{h^\top I^{-1} h - \gamma}$$

e

$$(y_1, \dots, y_{n^2})^\top = I^\top x - I^{-1} h = x - h.$$

(Manteve-se, intencionalmente, a matriz identidade nestas expressões; ver o primeiro exercício.)

Assim sendo, o problema inicial pode ser formulado como um problema de optimização cónica:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } y_0 \\ &\text{sujeito a } (y_1, \dots, y_{n^2})^\top = x - h \\ &\quad X \in C_s^n \\ &\quad y \in C_q^{n^2+1}, \end{aligned}$$

em que

$$C_q^{n^2+1} = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n^2+1} : y_0 \geq \|(y_1, \dots, y_{n^2})^\top\| \right\}$$

designa o chamado cone de segunda ordem. Este problema tem função objectivo linear e restrições lineares e duas restrições cónicas (uma semidefinida e outra cónica de segunda ordem) e pode ser eficientemente resolvido utilizando *software* desenvolvido recentemente para programação cónica.

Generalizações

No âmbito da introdução de restrições lineares da forma

$$\ell_{ij} \leq X_{ij} \leq u_{ij}$$

para determinados pares ordenados (i, j) , é possível formular o problema da determinação da matriz de correlação mais próxima de H :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \|X - H\|_F \\ &\text{sujeito a } 1 \leq X_{ii} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \\ &\quad X \in C_s^n. \end{aligned}$$

Este tipo de restrições ($\ell_{ij} \leq X_{ij} \leq u_{ij}$) permite, também, modelar situações em que são conhecidas determinadas correlações entre bens ou títulos accionistas.

Uma outra generalização conhecida consiste em impor que o menor valor próprio da matriz a determinar seja suficientemente afastado de zero para que a matriz resultante seja bem condicionada e produza dados robustos se utilizada, mais tarde, no âmbito de um problema de otimização financeira. Seja $c > 0$ um limite inferior a impor ao menor valor próprio. Em vez do problema original, revolve-se, neste caso:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \|X - H\|_F \\ &\text{sujeito a} && X - cI \in C_s^n. \end{aligned}$$

Um Exemplo

Perturbámos, com valores em $(-0.01, 0.01)$, as entradas da estimativa da matriz de covariância dos retornos dos três títulos descritos na aula sobre o modelo linear de Konno e Yamazaki:

$$H = \begin{bmatrix} 0.0353 & -0.0074 & 0.0097 \\ -0.0022 & 0.0139 & -0.0006 \\ -0.0049 & -0.0010 & -0.0013 \end{bmatrix}.$$

Calculámos, depois, a matriz de correlação mais perto desta utilizando o código SDPT3:

$$X_* = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0074 & 0.0097 \\ -0.0074 & 1.0000 & -0.0006 \\ 0.0097 & -0.0006 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

(Note-se que os valores próprios de X_* são já, neste exemplo, significativamente afastados de zero: 0.9880, 0.9995, 1.0125.)

Acompanhamento do Desvio a uma Carteira de Referência

No âmbito dos problemas de otimização de média-variância, suponhamos conhecida a composição de uma carteira de referência $x_{ref} \in X$. Pretendemos determinar uma carteira cujo retorno seja o maior possível em relação ao retorno de referência e cujo o erro de acompanhamento (*tracking error*) seja inferior a uma quantidade $TE > 0$ especificada para o efeito. Define-se este erro de acompanhamento como a medida de variabilidade do excesso de retorno, ou seja, como o desvio padrão do excesso de retorno:

$$TE(x) = \sqrt{(x - x_{ref})^\top Q (x - x_{ref})}.$$

A determinação desta carteira faz-se, então, resolvendo o problema

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \mu^\top (x - x_{ref}) \\ &\text{sujeito a} && TE(x) \leq TE \\ &&& x \in X. \end{aligned}$$

É possível, porém, converter este problema num problema de programação cónica (com função objectivo linear e restrições lineares).

A resolução deste tipo de problemas permite gerir carteiras de investimento com retorno acrescido relativamente a determinados índices de referência ou segmentos do mercado, mediante um nível de risco controlado.

Exercícios

1. Prove que o conjunto C_s^n é um cone convexo.
2. Tente desenhar o cone C_s^n , quando $n = 2$, num espaço tridimensional.
3. Converta uma restrição quadrática da forma $z^\top Qz + 2v^\top z + \beta \leq 0$, em que Q é uma matriz simétrica definida positiva, na forma cónica de segunda ordem.
4. Aplique este procedimento ao problema de acompanhamento do erro em selecção de carteiras.

Aula 25: Selecção de Carteiras — Optimização Robusta

Muitos dos problemas de optimização em finanças, em particular os de selecção de carteiras, envolvem dados financeiros desconhecidos que têm de ser estimados e que, como tal, são calculados de forma inexacta ou incerta. Quando a solução dos problemas de optimização depende, de forma sensível, dos dados ou parâmetros, pequenas variações nestes podem causar grandes variações nas soluções óptimas. Esta situação é indesejável.

Uma das formas de lidar com este tipo de incerteza consiste em formular os problemas de optimização de forma robusta de modo a que a solução encontrada seja a melhor sob o pior cenário, esperando que esta seja relativamente boa para todas as possíveis realizações dos parâmetros. Para atingir este objectivo considera-se, geralmente, conjuntos de incerteza onde se encontram a maioria, ou todos, os possíveis valores para os dados ou parâmetros incertos.

No caso dos problemas de optimização em selecção de carteiras os dados incertos são o vector μ dos retornos esperados dos títulos e a matriz Q das covariâncias dos retornos. Os conjuntos de incerteza podem ser modelados na forma

$$U_\mu = \{ \mu \in \mathbb{R}^n : \mu^L \leq \mu \leq \mu^U \}$$

e

$$U_Q = \{ Q \in \mathbb{R}^{n \times n} : Q^L \leq Q \leq Q^U, Q \succcurlyeq 0 \},$$

em que as desigualdades \leq são tomadas elemento a elemento e a desigualdade \succcurlyeq traduz que a matriz Q é simétrica e semi-definida positiva (uma condição necessária para representar uma matriz das covariâncias). As matrizes $Q^L, Q^U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são simétricas mas não necessariamente definidas positivas ou semi-definidas positivas. Usaremos, também, a notação

$$U = U_\mu \times U_Q = \{ (\mu, Q) : \mu \in U_\mu, Q \in U_Q \}.$$

Nesta aula vamos considerar o problema de selecção de carteiras (modelo de Markowitz) escrito na forma OMV(r):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && x^\top Q x \\ & \text{sujeito a} && \mu^\top x \geq r, \\ & && x \in X, \end{aligned}$$

em que as ‘carteiras admissíveis’ variam em

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Vamos, também, abordar o problema de selecção de carteiras escrito na forma OMV2(λ):

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} && (1 - \lambda)(\mu^\top x) - (\lambda)x^\top Q x \\ & \text{sujeito a} && x \in X. \end{aligned}$$

A relação entre estes dois problemas reside na escolha de r em função de λ , ou viceversa.

Proposição 1 *Seja $x^*(\lambda)$ uma solução óptima de $OMV2(\lambda)$ com $\lambda \in [0, 1]$. Então $x^*(\lambda)$ também é uma solução óptima de $OMV(r)$ com $r = \mu^\top x^*(\lambda)$.*

Variando r e λ de forma apropriada em ambas as formulações percorre-se toda a fronteira de eficiência.

Uma Formulação Robusta

Recorrendo aos conjuntos de incerteza introduzidos em cima, as formulações robustas destes dois problemas são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \{ \max_{Q \in U_Q} x^\top Q x \} \\ & \text{sujeito a} \quad \{ \min_{\mu \in U_\mu} \mu^\top x \} \geq r, \\ & \quad \quad \quad x \in X \end{aligned} \tag{18}$$

e

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} \quad \{ \min_{\mu \in U_\mu, Q \in U_Q} (1 - \lambda)(\mu^\top x) - (\lambda)x^\top Q x \} \\ & \text{sujeito a} \quad x \in X. \end{aligned} \tag{19}$$

A relação entre estes dois problemas robustos, generalizando a proposição anterior relativa às suas versões não robustas, traduz-se no seguinte resultado.

Proposição 2 *Seja $x^*(\lambda)$ uma solução óptima de (19) com $\lambda \in [0, 1]$. Então $x^*(\lambda)$ também é uma solução óptima de (18) com*

$$r = \min_{\mu \in U_\mu} \mu^\top x^*(\lambda).$$

Em ambos os problemas (18) e (19) tenta-se otimizar o pior cenário possível. No problema (18) a incerteza surge na função objectivo e nas restrições, enquanto que no problema (19) a incerteza aparece apenas na função objectivo.

Estas formulações incorporam dois ou mais níveis de optimização, reflectindo uma das características típica dos problemas de optimização robusta (o que torna a sua resolução particularmente difícil). Em alguns casos especiais é possível reduzir os níveis de optimização a um único nível, convertendo o problema de optimização robusta num problema de optimização linear, quadrática, convexa ou não linear. Por exemplo, no caso especial em que Q^U é semi-definida positiva obtém-se o seguinte resultado.

Proposição 3 *Suponha-se que Q^U é uma matriz semi-definida positiva. Seja x um vector não negativo e $\lambda \in [0, 1]$. Neste caso, $\mu^* = \mu^L$ e $Q^* = Q^U$ constitui uma solução óptima do problema*

$$\min_{(\mu, Q) \in U} (1 - \lambda)(\mu^\top x) - (\lambda)x^\top Q x,$$

Usando este resultado, conclui-se que, quando Q^U é uma matriz semi-definida positiva, o problema (19) é equivalente ao seguinte problema de programação quadrática convexa:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} \quad (1 - \lambda)(\mu^L)^\top x - (\lambda)x^\top Q^U x \\ & \text{sujeito a} \quad x \in X, \end{aligned}$$

cujas resolução é, obviamente, muito mais simples do que a da sua versão robusta.

Exemplo

Neste exemplo de otimização em selecção de carteiras, considerámos dados relativos a uma carteira com 5 títulos: 10 Year Note, Russell 1000 Growth, Russell 1000 Value, Russell 2000 Growth e Russell 2000 Value, obtidos mensalmente entre Outubro de 2002 e Junho de 2007. As médias dos retornos foi calculada, não de forma aritmética (ou seja por $r_{it} = (v_{it} - v_{it-1})/v_{it-1}$), mas de forma logarítmica usando $r_{it} = \log(v_{it}/v_{it-1})$. A matriz das covariâncias foi calculada como em aula anterior através do estimador da máxima verosimilhança, mas recorrendo aos retornos médios logarítmicos. Os valores para μ^L e μ^Q foram obtidos considerando os percentis 2.5% e 97.5% dos dados históricos dos títulos. As matrizes Q^L e Q^U foram determinadas substituindo, na fórmula do estimador referido, as médias dos retornos por, respectivamente, μ^L e μ^Q . Na tabela seguinte indicam-se as médias dos retornos e os valores de μ^L e μ^Q .

	10YN	R1000G	R1000V	R2000G	R2000V
μ	0.0048	0.0085	0.0115	0.0141	0.0147
μ^L	-0.0486	-0.0215	-0.0127	0.0116	-0.0225
μ^U	0.0565	0.0230	0.0257	0.0404	0.0377

O cálculo da carteira de risco mínimo (ou variância mínima) deu, na versão não robusta,

$$x_{min} = (0.1346 \ 0.2239 \ 0.2788 \ 0.1361 \ 0.2265) \text{ correspondendo a } r_{min} = 0.0110$$

e, na versão robusta,

$$x_{min} = (0 \ 0.3191 \ 0.3663 \ 0.1011 \ 0.2135) \text{ correspondendo a } r_{min} = -0.0152.$$

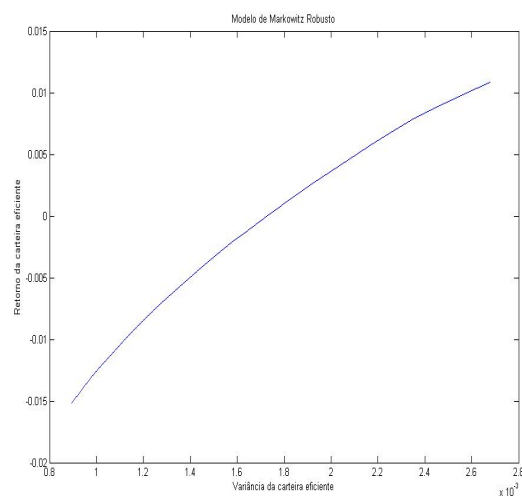
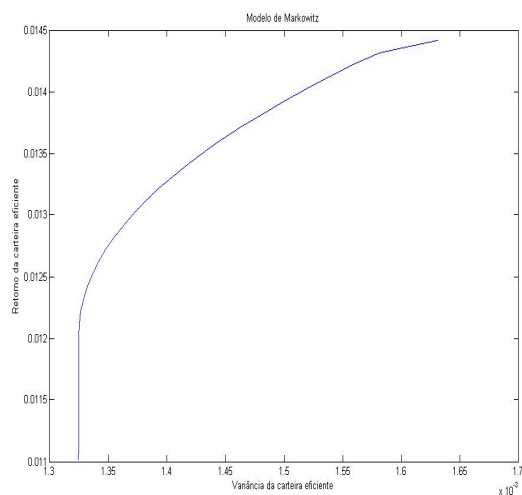
Estes resultados traduzem claramente as salvaguardas pessimistas da versão robusta. A carteira de maior retorno (ou variância mínima) é, na versão não robusta,

$$x_{max} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \text{ correspondendo a } r_{max} = 0.0147$$

e, na versão robusta,

$$x_{max} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) \text{ correspondendo a } r_{max} = 0.0116.$$

As fronteiras eficiente não robusta e robustas são descritas nos dois seguintes gráficos.



Outra Formulação Robusta

É também possível descrever a fronteira eficiente correspondente ao modelo de Markowitz através da resolução do problema de otimização não linear $OMV3(\lambda)$

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && (1 - \lambda)\sqrt{x^\top Q x} - \lambda(\mu^\top x) \\ &\text{sujeito a} && x \in X, \end{aligned}$$

com λ a percorrer o intervalo $[0, 1]$. A versão robusta de $OMV3(\lambda)$ é, então, descrita na forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \left\{ \max_{\mu \in U_\mu, Q \in U_Q} (1 - \lambda)\sqrt{x^\top Q x} - \lambda(\mu^\top x) \right\} \\ &\text{sujeito a} && x \in X. \end{aligned} \tag{20}$$

Escolhas possíveis para os conjuntos de incerteza são dadas por

$$U = \left\{ (\mu, Q) : (\mu - \hat{\mu})^\top \hat{Q}^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \frac{\delta^2}{n_t} \text{ e } Q = \hat{Q} \right\}$$

e

$$U = \left\{ (\mu, Q) : (\mu - \hat{\mu})^\top \hat{Q}^{-1} (\mu - \hat{\mu}) + 2 \frac{n_t - 1}{n_t} \|V(Q - \hat{Q})V\|_F^2 \leq \frac{\delta^2}{2} \right\}$$

com $V^2 = \hat{Q}^{-1}$ e $\|\cdot\|_F$ a norma matricial de Frobenius ou do traço. Nestas expressões, $\hat{\mu}$ e \hat{Q} representam os valores estimados para as médias dos retornos e a sua matriz das covariâncias, com base numa amostra de dimensão n_t . O valor de δ modera o grau de incerteza.

Existem, igualmente, casos especiais do conjunto de incerteza U que tornam o problema robusto (20) equivalente a um problema de optimização de um só nível. Se se recorrer ao primeiro conjunto de incerteza acima descrito, resulta que (20) é equivalente a

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && (1 - \lambda + \lambda\delta/\sqrt{n_t})\sqrt{x^\top \hat{Q}x} - \lambda(\hat{\mu}^\top x) \\ &\text{sujeito a} && x \in X. \end{aligned}$$

Exercícios

1. Prove as duas primeiras proposições da aula.

Aula 26: Construção de um Índice de Fundos

A metodologia de gestão de uma carteira pode ser classificada, grosseiramente, como activa ou passiva. Os métodos de gestão activa recorrem a uma análise técnica baseada em modelos de optimização e técnicas de previsão. As estratégias passivas baseiam-se na diversificação e podem consistir, por exemplo, em estratégias do tipo comprar e esperar (*buy and hold*), ou seja, em estabelecer uma carteira inicial diversa com base em determinados critérios e aguardar, passivamente, os desenvolvimentos do mercado.

A estratégia de gestão passiva de carteiras que estudaremos nesta aula é designada por indexação. A ideia central passa por construir uma carteira que reflecta e siga, o melhor possível, o comportamento de uma vasta variedade de títulos. A uma carteira deste tipo chama-se um índice de fundos.

Um Modelo de Programação Linear Inteira

Dado um conjunto de n títulos, pretendemos seleccionar um subconjunto deste, constituído por q títulos ($q < n$), de modo a que o subconjunto seja o mais representativo possível do conjunto inicial.

Para este efeito seja ρ_{ij} um índice de semelhança entre os títulos i e j , com $i \neq j$ e $i, j \in \{1, \dots, n\}$. A quantidade ρ_{ij} é tanto maior quanto a semelhança entre os dois títulos. Consideramos $\rho_{ii} = 1$ por convenção e normalizamos estas quantidades de forma a que $\rho_{ij} \leq 1$.

O modelo que formularemos para determinar índices de fundos baseia-se em programação linear inteira. Sejam y_j , $j = 1, \dots, n$, n variáveis binárias ($y_j \in \{0, 1\}$) que descrevem os títulos a seleccionar para o índice (o título j figura no índice se $y_j = 1$). Sejam, também, x_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, n^2 variáveis binárias que indicam, para cada título i , se o título j é o mais semelhante a i no índice de fundos. Se for então $x_{ij} = 1$; caso contrário $x_{ij} = 0$.

Desta forma, pretende-se maximizar a semelhança entre os n títulos e os seus q representantes no índice,

$$\text{maximizar } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} x_{ij},$$

tal que sejam seleccionados exactamente q títulos, ou seja,

$$\sum_{j=1}^n y_j = q,$$

para cada título i exista um e um só representante no índice, ou seja,

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

para cada título j não pertencente ao índice não existem títulos mais semelhantes, ou seja,

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

e, finalmente, tal que $x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}$ para $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Exemplo

Vamos ilustrar a construção de um índice de fundos para o seguinte conjunto de 20 títulos do PSI 20: Altri, BCP, BES, BPI, Brisa, Cimpor, Cofina, EDP, Galp, Impresa, Jerónimo Martins, Mota Engil, Nova Base, Portucel, PT, PT Multimédia, Semapa, Sonae, SonaeCom e Sonae Indústria. A matriz dos índices de semelhança foi escolhida como sendo a matriz das covariâncias dos retornos calculada a partir do estimador da máxima verosimilhança. Tomaram-se os valores históricos de 13 meses, de Junho 2006 a Junho de 2007. Excluiu-se o título Galp por ter entrado apenas em Novembro de 2006. Desta forma, $n = 19$.

Tomando $q = 5$ a resolução do programa linear inteiro acima descrito identificou o índice definido por Altri e Cofina (sector dos media), BPI (sector financeiro), Jerónimo Martins (sector alimentar) e SonaeCom (sector das telecomunicações). Note-se que não houve nenhuma preocupação em diversificar por sector, uma vez que as semelhanças escolhidas traduziam unicamente retornos históricos. Seleccionando $q = 7$ e resolvendo um novo problema, entrariam no índice óptimo o BCP (finanças) e a Impresa (media). Os programa lineares inteiros foram resolvidos usando a função `bintprog` do MATLAB.

Ponderação por valor de mercado

Suponhamos que o programa linear inteiro, atrás definido, foi resolvido, tendo sido identificado um índice de fundos, e que se pretende, agora, determinar, para um determinado investimento, as proporções a investir em cada um dos títulos do índice. Seja, então, y_j^* e x_{ij}^* , com $i, j \in \{1, \dots, n\}$, uma solução óptima do problema.

Neste sentido, calcula-se, primeiro, o valor de mercado dos títulos no índice:

$$w_j = \sum_{i=1}^n V_i x_{ij}^*, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} : y_j^* = 1,$$

em que V_i representa o valor de mercado do título i . A proporção a investir em cada título j do índice é dada, assim, por

$$\frac{w_j}{\sum_{k:y_k^*=1} w_k}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} : y_j^* = 1.$$

Uma abordagem usando programação linear

Uma outra forma de construir um índice de fundos baseia-se na existência de uma carteira de referência x_j^0 , $j = 1, \dots, n$, que se pretende rebalancear a um custo mínimo e com base no conhecimento de um conjunto de características de mercado que se pretendem seguir.

Suponhamos que existem m características de mercado a seguir (com m inferior a n). Sejam f_i , $i = 1, \dots, m$, as fracções do índice que têm de obedecer a estas características.

Sejam, ainda, a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, parâmetros que indicam se o título j possui ou não a característica i ($a_{ij} = 1$ e $a_{ij} = 0$, respectivamente).

Deste modo, o problema a minimizar toma a forma de um programa linear,

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \sum_{j=1}^n [y_j + z_j] \\ &\text{sujeito a} && \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = f_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &&& x_j - x_j^0 \leq y_j, \quad x_j^0 - x_j \leq z_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ &&& y_j \geq 0, \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ &&& x \in X, \end{aligned}$$

em que x_j , $j = 1, \dots, n$, representa a carteira rebalanceada e X o já habitual conjunto das carteiras admissíveis.

As características podem ser, por exemplo, os sectores de actividade e as regiões geográficas, ou podem distinguir a capitalização dos títulos ou ainda o facto destes pagarem ou não dividendos.

Aula 27: Valor em Risco (VaR) e Valor em Risco Condicionado (CVaR) — Selecção de Carteiras

Existem outras formas de medir o risco associado a uma carteira para além da variância do seu retorno. Nesta aula, vamos conhecer duas outras medidas de risco: o valor em risco (VaR; *Value-at-Risk*) e o valor em risco condicional (CVaR; *Conditional Value-at-Risk*).

Todas as actividades financeiras envolvem um determinado nível de risco, que deve ser quantificado e levado seriamente em consideração. A modelação do risco é incontornável em Matemática Financeira, como vimos ao longo deste curso. Os conceitos de VaR e de CVaR constituem dois instrumentos para a expressão quantitativa do risco, de vasta utilização prática na indústria financeira.

Valor em Risco (VaR)

O valor em risco concentra-se sobre a perda associada a um investimento, em vez do seu retorno. Suponhamos que a variável aleatória L representa a perda associada a um investimento durante um determinado período de tempo. Valores positivos de L representam perdas, enquanto valores negativos significam ganhos ou retornos.

O VaR é expresso em níveis de probabilidade. Seja $\alpha \in (0, 1)$. Na prática, pensamos em valores de α perto de 1. Define-se $\text{VaR}_\alpha(L)$ como sendo

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \min \{ \gamma : P(L \leq \gamma) \geq \alpha \}.$$

Quando bem definida, a quantidade $\text{VaR}_\alpha(L)$ representa, assim, a *menor* perda possível com probabilidade superior, ou igual, a α .

Observa-se, empiricamente, que o risco associado a um investimento tem tendência a diminuir com a sua diversificação. Uma medida de risco f que pretenda reflectir esta observação deve obedecer à propriedade (dita de subaditividade)

$$f(L_1 + L_2) \leq f(L_1) + f(L_2).$$

Porém, esta relação não é satisfeita, de uma forma geral, quando $f = \text{VaR}_\alpha$, o que constitui um aspecto indesejável do VaR enquanto medida de risco.

Outras características do VaR que dificultam a sua utilização em modelos de optimização para a selecção de carteiras são a ausência de convexidade e de suavidade.

Valor em Risco Condicionado (CVaR)

Note-se que o valor em risco não fornece qualquer informação sobre a dimensão das perdas que ocorrem do valor de VaR_α em diante.

No âmbito dos problemas de selecção de carteiras, vamos considerar, novamente, um conjunto X de carteiras admissíveis. A cada carteira em X está associado uma perda aleatória. Suponhamos que a aleatoriedade é modelável, para todas as carteiras, pela mesma variável aleatória (contínua) Y , cuja função densidade é dada por p . Suponhamos

que a perda associada à carteira $x \in X$, na presença do evento aleatório Y , é dada pela variável aleatória $\ell(x, Y)$, em que ℓ é uma função conhecida¹¹. (No contexto do VaR temos que $\ell(x, Y) = L$.)

Consideremos, também, a função de distribuição associada à perda da carteira $x \in X$, definida por

$$\Psi(x, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} P(\ell(x, Y) \leq \gamma) = P(Y \in \ell(x, Y)^{-1}\{-\infty, \gamma\}) = \int_{\ell(x, y) \leq \gamma} p(y) dy.$$

Assim sendo, tem-se que

$$\text{VaR}_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{VaR}_\alpha(\ell(x, Y)) = \min \{ \gamma : \Psi(x, \gamma) \geq \alpha \}.$$

Define-se valor em risco condicional, para um determinado nível de probabilidade, como sendo a perda esperada a partir do valor em risco:

$$\text{CVaR}_\alpha(x) [= \text{CVaR}_\alpha(\ell(x, Y))] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\ell(x, y) \geq \text{VaR}_\alpha(x)} \ell(x, y) p(y) dy.$$

Como seria de esperar, o valor em risco condicional é superior ao valor em risco.

Proposição 1 *Os valores em risco e em risco condicional obedecem a*

$$\text{CVaR}_\alpha(x) \geq \text{VaR}_\alpha(x).$$

Demonstração. Em primeiro lugar, constata-se que

$$\text{CVaR}_\alpha(x) \geq \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\ell(x, y) \geq \text{VaR}_\alpha(x)} \text{VaR}_\alpha(x) p(y) dy = \frac{\text{VaR}_\alpha(x)}{1 - \alpha} \int_{\ell(x, y) \geq \text{VaR}_\alpha(x)} p(y) dy.$$

A demonstração é concluída observando que:

$$\int_{\ell(x, y) \geq \text{VaR}_\alpha(x)} p(y) dy = 1 - \int_{\ell(x, y) \leq \text{VaR}_\alpha(x)} p(y) dy = 1 - \alpha.$$

■

Uma carteira com valor em risco condicional reduzido tem, necessariamente, um valor em risco igualmente reduzido.

¹¹Para que $\ell(x, Y)$ seja uma variável aleatória basta que ℓ seja mensurável à Borel. Para que $\ell(x, Y)$ seja uma variável aleatória contínua, e como tal tenha uma função densidade, seria necessário impor condições adicionais sobre ℓ .

Ligação ao Problema de Optimização de Média-Variância

Quando a perda Y segue uma distribuição normal e $\alpha \geq 0.5$, os três problemas seguintes

$$\begin{aligned} & \text{minimizar}_x \quad \text{VaR}_\alpha(x) \\ & \text{sujeito a} \quad \mu^\top x \geq r, \\ & \quad \quad \quad x \in X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{minimizar}_x \quad \text{CVaR}_\alpha(x) \\ & \text{sujeito a} \quad \mu^\top x \geq r, \\ & \quad \quad \quad x \in X, \end{aligned}$$

e, o já conhecido OMV(r),

$$\begin{aligned} & \text{minimizar}_x \quad x^\top Qx \\ & \text{sujeito a} \quad \mu^\top x \geq r, \\ & \quad \quad \quad x \in X, \end{aligned}$$

têm as mesmas soluções óptimas (no sentido que se expõe a seguir). De facto, prova-se, sob estas hipóteses, que quando a restrição $\mu^\top x \geq r$ é activa nas soluções óptimas de dois quaisquer destes três problemas, as duas respectivas soluções óptimas coincidem. Neste contexto, estamos a supor que $\ell(x, Y) = -R(x, Y)$, $E(R(x, Y)) = \mu^\top x$ e $V(R(x, Y)) = x^\top Qx$. Desta forma, em vez de $R = \sum_{i=1}^n x_i R_i$ tem-se $R = \sum_{i=1}^n x_i r(i, Y)$ para uma dada função r .

Minimização do CVaR num Cenário Discreto

A expressão para o CVaR envolve o próprio VaR e apresenta-se complicada para efeitos de minimização em X . Para contornar este problema, Rockafellar e Uryasev introduziram uma função auxiliar, dependente de x e de uma variável auxiliar γ , dada por

$$F_\alpha(x, \gamma) = \gamma + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\ell(x, y) \geq \gamma} [\ell(x, y) - \gamma] p(y) dy.$$

São três as propriedades desta função que importa enumerar:

1. Para cada x , $F_\alpha(x, \gamma)$ é uma função convexa em γ .
2. Para cada x , $\text{VaR}_\alpha(x)$ é um minimizante de $F_\alpha(x, \gamma)$ em γ .
3. O valor de $F_\alpha(x, \gamma)$, quando $\gamma = \text{VaR}_\alpha(x)$, é, precisamente, $\text{CVaR}_\alpha(x)$.

Resulta destas propriedades que os problemas

$$\begin{aligned} & \text{minimizar}_x \quad \text{CVaR}_\alpha(x) \\ & \text{sujeito a} \quad x \in X \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \text{minimizar}_{x,\gamma} F_\alpha(x, \gamma) \\ & \text{sujeito a } x \in X \end{aligned}$$

são equivalentes (no sentido de terem o mesmo valor óptimo objectivo e o mesmo minimizante em X). Da resolução deste último problema, obtém-se a carteira que minimiza o CVaR em X .

Vejam os que acontece num cenário discreto, em que são conhecidas as realizações y_t , $t = 1, \dots, n_t$, do evento aleatório Y . (Estes valores podem ser obtidos através de dados históricos ou recorrendo a projecções futuras.)

Antes de prosseguirmos, veja-se que a função $F_\alpha(x, \gamma)$ pode ser escrita na forma

$$F_\alpha(x, \gamma) = \gamma + \frac{1}{1-\alpha} \int (\ell(x, y) - \gamma)^+ p(y) dy$$

recorrendo à função $(\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$. Assim, $F_\alpha(x, \gamma)$ pode ser aproximada por

$$G_\alpha(x, \gamma) = \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)n_t} \sum_{t=1}^{n_t} (\ell(x, y_t) - \gamma)^+$$

e a determinação da carteira que minimiza o CVaR em X pode ser feita, aproximadamente, através do problema P1:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar}_{x,\gamma} \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)n_t} \sum_{t=1}^{n_t} (\ell(x, y_t) - \gamma)^+ \\ & \text{sujeito a } x \in X. \end{aligned}$$

Este problema pode ser simplificado, removendo a dependência não linear e não suave da função $(\cdot)^+$, obtendo-se o problema P2:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar}_{x,\gamma} \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)n_t} \sum_{t=1}^{n_t} z_t \\ & \text{sujeito a } z_t \geq \ell(x, y_t) - \gamma, \quad t = 1, \dots, n_t, \\ & z_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, n_t, \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Suponhamos, agora, que $\ell(x, y_t)$ é uma função linear em x . Nesta situação, existem realizações ℓ_{it} , $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, n_t$, tais que

$$\ell(x, y_t) = \sum_{i=1}^n \ell_{it} x_i.$$

Quando X é um conjunto poliédrico, o problema P2 passa a constituir um programa linear.

Exercícios

1. Prove que os problemas P1 e P2 são equivalentes.

Aula 28: Modelos de Períodos Múltiplos (o caso da Gestão de Bens e Responsabilidades)

Os problemas de otimização de média-variância que vimos em aulas anteriores foram formulados de forma estática, uma vez que as decisões a tomar nestes modelos (as proporções do investimento total a investir em cada um dos títulos accionistas) são consideradas uma única vez. Desta forma, estas decisões reportam-se, forçosamente, a um único período temporal.

Os modelos com um único período temporal não dão, porém, uma resposta adequada a situações dinâmicas em que as decisões financeiras têm de ser tomadas ao longo do tempo. Para estas situações torna-se necessário considerar modelos de períodos múltiplos onde as decisões são tomadas em diversos momentos temporais. Estes modelos dão origem a problemas de otimização ou programação estocástica em que alguns parâmetros são variáveis aleatórias a seguir uma distribuição geralmente conhecida. As variáveis de um problema de programação estocástica dividem-se em antecipativas, correspondentes a decisões que não dependem da realização futura de quantidades aleatórias, e adaptativas, quando tal dependência ocorre.

A resolução de um problema de otimização estocástica faz-se, habitualmente, através da resolução de um correspondente problema de otimização determinístico. Este processo, para ser minimamente realístico e abranger um número considerável de cenários ou acontecimentos, leva à formulação de problemas determinísticos de grandes dimensões.

Gestão de Bens e Responsabilidades (ALM)

Um dos exemplos mais relevantes da programação estocástica com períodos múltiplos reside na modelação da gestão de bens e responsabilidades de uma empresa. Utilizaremos frequentemente a sigla ALM (*asset/liability management*) para nos referirmos a estes problemas, também designados por problemas de gestão activo-passivo. A natureza temporal do cumprimento das responsabilidades (e da própria gestão da carteira de investimentos) leva, naturalmente, a colocar o problema em vários estágios.

Consideremos, então, uma empresa que tem de cumprir várias responsabilidades L_t , $t = 1, \dots, T$, em T instantes temporais (dados, por exemplo, em anos). Para fazer face a estas responsabilidades, a empresa forma uma carteira de investimento que consiste em tomar posição num conjunto de n títulos accionistas (acções ou obrigações, por exemplo). Os retornos de cada título são dados por R_{it} , $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$. Quer as responsabilidades a cumprir quer os retornos dos títulos são variáveis aleatórias. As variáveis de decisão do problema medem, como seria de esperar, o investimento a fazer face às responsabilidades e são também elas modeladas estocasticamente. Considere-se, assim, x_{it} , $i = 1, \dots, n$, $t = 0, \dots, T$, os valores de mercado investidos nos títulos ao longo do tempo. Sejam, também, x_{it}^c e x_{it}^v , $i = 1, \dots, n$, $t = 0, \dots, T-1$, os montantes das compras e vendas de cada título em cada instante até ao penúltimo.

O primeiro conjunto típico de restrições de um problema ALM são as equações de

balanço financeiro, em que o que entra tem de igualar o que sai:

$$\sum_{i=1}^n (1 + R_{it}) x_{i,t-1} - \sum_{i=1}^n x_{it} = L_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

É também costume impor restrições a definir o inventariado dos títulos, em que o montante investido no início de num dado período é igual ao montante investido no final do período anterior ajustado com o correspondente retorno e as compras e vendas entretanto efectuadas:

$$x_{it} = (1 + R_{it})x_{i,t-1} - x_{it}^v + x_{it}^c, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T - 1.$$

No primeiro instante temporal pode-se estabelecer que

$$x_{i0} = x_{inicial,0} - x_{i0}^v + x_{i0}^c, \quad i = 1, \dots, n,$$

supondo-se conhecidos valores para a composição inicial da carteira $x_{inicial,0}$.

São impostas restrições de não negatividade nas variáveis

$$x_{it} \geq 0, i = 1, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T \quad x_{it}^c, x_{it}^v \geq 0, i = 1, \dots, n, \quad t = 0, \dots, T - 1.$$

O objectivo do problema da gestão de bens e responsabilidades passa, geralmente, por maximizar a riqueza final dos investimentos, medida, neste caso, por

$$E \left(\sum_{i=1}^n x_{iT} \right).$$

Pretende-se determinar a sequência de carteiras que, cumprindo todas as responsabilidades, conduz a uma carteira de maior valor esperado final.

Um Exemplo Determinístico

O problema ALM formulado em cima pertence à classe da optimização ou programação estocástica. Para o tornar resolúvel computacionalmente é necessário recorrer a realizações das variáveis aleatórias em causa ao longo dos diversos períodos ou estágios do problema e assim eliminar a sua natureza estocástica. Uma forma conveniente para levar a cabo esta tarefa consiste em formar árvores de cenários ou acontecimentos.

Para o problema ALM descrito em cima, consideremos uma árvore binomial, três instantes temporais ($T = 2$) e um único título ($n = 1$). Seja $x^{inicial,0}$ o montante investido no título no instante inicial e sejam:

- $x^0, x^{c,0}, x^{v,0}$, respectivamente, o montante investido, a comprar e a vender no cenário $t = 0$;
- $x^1, x^{c,1}, x^{v,1}$, respectivamente, o montante investido, a comprar e a vender no primeiro cenário considerado em $t = 1$;

- x^2 , $x^{c,2}$, $x^{v,2}$, respectivamente, o montante investido, a comprar e a vender no segundo cenário considerado em $t = 1$.

Sejam R^1 e R^2 e L^1 e L^2 os valores dos retornos e das responsabilidades nestes dois cenários. Sejam R^3, R^4, R^5, R^6 e L^3, L^4, L^5, L^6 os valores dos retornos e das responsabilidades correspondentes aos quatro cenários finais (para $t = T = 2$). Finalmente, sejam x^3, x^4, x^5, x^6 os montantes investidos nos quatro cenários finais (para $t = T = 2$).

As restrições deste problema ALM determinístico correspondentes aos balanços financeiros são, assim, dadas por

$$\begin{aligned}(1 + R^1)x^0 - x^1 &= L^1, \\(1 + R^2)x^0 - x^2 &= L^2, \\(1 + R^3)x^1 - x^3 &= L^3, \\(1 + R^4)x^1 - x^4 &= L^4, \\(1 + R^5)x^2 - x^5 &= L^5, \\(1 + R^6)x^2 - x^6 &= L^6.\end{aligned}$$

As restrições de inventariado dos títulos correspondem a

$$\begin{aligned}x^0 - x^{inicial,0} - x^{0,c} + x^{0,v} &= 0, \\x^1 - (1 + R^1)x^0 - x^{1,c} + x^{1,v} &= 0, \\x^2 - (1 + R^2)x^0 - x^{2,c} + x^{2,v} &= 0.\end{aligned}$$

Pretende-se maximizar o retorno final esperado (considerando os cenários finais equiprováveis):

$$\frac{1}{4} (x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

São impostas restrições de não-negatividade em todas as variáveis envolvidas.

Considerações Finais

Como se pode constatar facilmente através deste exemplo, a dimensão dos programas lineares determinísticos, crescendo exponencialmente, pode tornar-se computacionalmente intratável. É possível, felizmente, tirar partido da estrutura destes programas lineares, em particular pode recorrer-se a uma técnica chamada decomposição de Benders. Trata-se de um processo iterativo em que são resolvidos programas lineares auxiliares de menor dimensão em cada iteração, sendo possível resolver um determinado número em simultâneo, abrindo as portas à utilização da computação paralela.

Um problema de programação estocástica linear de dois períodos ou dois estágios, em que se considerem S cenários no segundo estágio com probabilidades de ocorrência

p_1, \dots, p_S , apresenta, na sua forma determinística, a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar}_{x, y_1, \dots, y_S} && a^\top x + p_1 c_1^\top y_1 + \dots + p_S c_S^\top y_S \\ & \text{sujeito a} && Ax && = b \\ & && B_1 x + C_1 y_1 && = d_1 \\ & && && \vdots \\ & && B_S x + C_S y_S && = d_S \\ & && x, y_1, \dots, y_S \geq 0. \end{aligned}$$

A versão estocástica original é dada por:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar}_{x, \omega \in \Omega} && a^\top x + E(c(\omega)^\top y(\omega)) \\ & \text{sujeito a} && Ax = b \\ & && B(\omega)x + C(\omega)y(\omega) = d(\omega), \forall \omega \in \Omega \\ & && x \geq 0, \quad y(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

em que as variáveis aleatórias B , C , c , d e y estão definidas num espaço de probabilidade (Ω, F, P) , com Ω um conjunto de acontecimentos, F uma σ -álgebra e P uma medida de probabilidade. No caso em cima tomámos $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_S\}$. As variáveis de primeiro estágio x são determinísticas e correspondem a decisões tomadas antes do acontecimento aleatório $\omega \in \Omega$ ser observado (variáveis antecipativas). As variáveis de segundo estágio $y(\omega)$ são aleatórias e correspondem a decisões a tomar depois do acontecimento aleatório $\omega \in \Omega$ ser observado (variáveis adaptativas). As restrições envolvendo apenas variáveis antecipativas ($Ax = b$) são determinísticas.

Para gerar valores para as variáveis aleatórias (como os retornos por exemplo) ao longo das árvores de cenários ou acontecimentos, utiliza-se frequentemente modelos autoregressivos em conjunto com técnicas e expedientes que procurem representar (discretamente), com precisão, as distribuições (contínuas) de forma mais económica possível. Entre estas técnicas encontram-se a geração de valores através de erros simétricos e o ajuste de momentos.

Exercícios

1. Escreva o problema ALM determinístico na forma matricial.
2. Formule, em formato determinístico, um problema de programação estocástica linear de três períodos ou estágios correspondente a uma árvore de acontecimentos trinomial.

Apêndice 1: Introdução aos Derivados Financeiros (Contratos Forward)

Os *derivados* são instrumentos financeiros, transaccionáveis, cujo preço depende de outras variáveis básicas (bens ou activos financeiros). São exemplos de bens ou activos financeiros, subjacentes a um derivado, as acções, os índices accionistas, as mercadorias, as divisas e as obrigações. Os exemplos mais básicos de derivados são

- os contratos forward,
- os contratos de futuros e
- os contratos de opções.

Contratos Forward

Um contrato *forward* é um acordo, entre duas partes, para comprar ou vender um determinado bem ou activo, numa determinada data futura e a um determinado preço (ambos fixados no momento do contrato).

Os contratos *forward* são transaccionados, geralmente, em mercados não organizados ou informais. Os mercados *forward* são *mercados a prazo*, em que se celebram contratos para uma entrega diferida. Esta característica dos mercados *forward*, comum a outros mercados de derivados, contrasta com a natureza dos *mercados à vista*, em que a contratação origina de imediato a correspondente liquidação.

Num contrato *forward*, uma das partes assume uma *posição longa* e concorda em comprar o activo numa data futura e a um dado preço. A contraparte toma uma *posição curta* e compromete-se a vender o activo nas condições acordadas.

Os mercados *forward* são conhecidos, também, por mercados ao balcão (*over-the-counter*), pelo facto do comprador e do vendedor negociarem entre si todos os parâmetros do contrato.

Vejamus um exemplo relacionado com divisas, que é muito frequente neste tipo de derivados. Consideremos uma empresa portuguesa que vai investir nos Estados Unidos da América e que necessita de comprar um milhão de dólares daqui a seis meses. Esta empresa pretende precaver-se, ou proteger-se, contra o risco de possíveis movimentações inesperadas nos mercados cambiais. Com este objectivo em vista, a empresa dirige-se a um banco que oferece as seguintes taxas de câmbio para efeitos de contratos *forward*:

data	venda
actual	0.7805
1 mês	0.7943
6 meses	0.8216

A empresa portuguesa toma uma posição longa e compromete-se a comprar ao banco um milhão de dólares daqui a seis meses, comprando-os ao câmbio $1 \text{ USD} = 0.8216 \text{ EUR}$.

O banco assume a posição curta correspondente e é obrigado a vender os dólares a este preço, uma vez expirados os seis meses.

Consideremos dois cenários para a taxa de câmbio na data de entrega. Se a taxa de câmbio evoluísse para 0.83 em seis meses a empresa ganharia

$$830000 \text{ EUR} - 821600 \text{ EUR} = 8400 \text{ EUR}.$$

O banco perderia 8400 EUR. Se a taxa de câmbio evoluísse para 0.81 em seis meses seria a empresa a perder

$$810000 \text{ EUR} - 821600 \text{ EUR} = -11600 \text{ EUR}.$$

e o banco a ganhar 11600 EUR.

De uma forma geral, o ganho de um contrato *forward* (em posição longa) é dado por

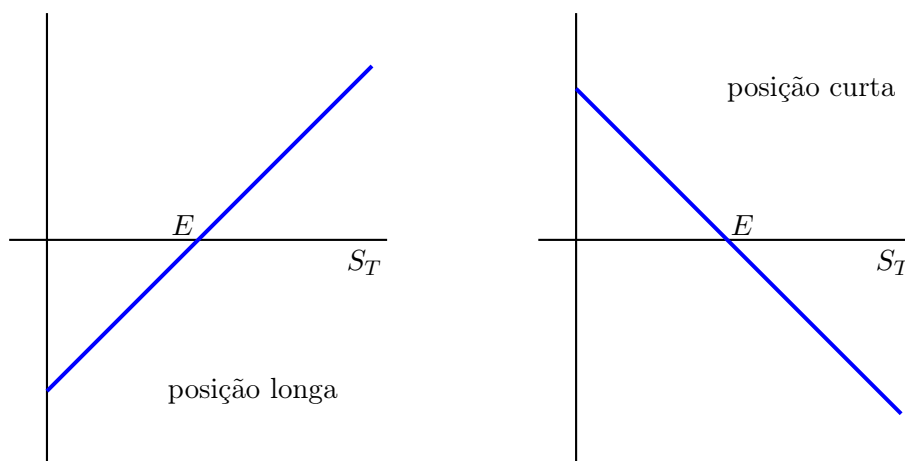
$$S_T - E$$

em que S_T é o preço do bem ou do activo na data de entrega T e E é o preço de entrega do activo nessa data. Noutros derivados, a data de entrega é conhecida por maturidade, data de exercício ou data de vencimento.

Em posição curta, o ganho é dado por

$$E - S_T.$$

A figura seguinte descreve o ganho (ou perda quando negativo) associado a um contrato *forward*, para as posições longa e curta. Este tipo de gráficos são conhecidos por perfis de ganhos e perdas.



É importante frisar que, embora o preço de entrega não sofra alterações após a celebração de um contrato *forward* e no âmbito do mesmo, o preço *forward* (como os da tabela anterior) pode variar ao longo do tempo para efeito de novos contratos.

Entre as vantagens dos contratos *forward* encontra-se a sua flexibilidade, o que permite uma adaptação personalizada às necessidades do comprador. Os contratos *forward* reduzem o risco inerente a alterações imprevistas no valor dos bens subjacentes.

Os mercados *forward* têm, porém, diversas desvantagens, entre as quais uma reduzida transparência (o que acarreta elevados custos de informação) e uma baixa liquidez. Além disso, o processo negocial é moroso e o sistema de preços ineficiente. A sua principal desvantagem reside no elevado risco de incumprimento. Por este motivo, os contratos *forward* são geralmente oferecidos por investidores que gozam de um elevado padrão de credibilidade (bancos, grandes corporações, firmas de corretagem). Como veremos mais adiante, uma das principais características dos contratos de futuros é a redução do risco de incumprimento dos contratos *forward*.

Arbitragem

A *arbitragem* é um conceito fundamental para o estabelecimento de preços justos para derivados financeiros, não só na prática como, também, através do desenvolvimento de modelos matemáticos. A arbitragem ocorre, por exemplo, quando existe uma discrepância entre preços de mercados diferentes. A prática de arbitragem consiste em tomar uma posição longa no mercado subavaliado e, simultaneamente, uma posição curta no mercado sobre-avaliado.

Uma forma simples (mas muito redutora) de ilustrar arbitragem em derivados financeiros é através de um contrato *forward*. Suponhamos que o preço actual de uma onça de ouro é de 200 EUR e que a taxa de juro anual efectiva e isenta de risco é de 4%. Qual seria um preço *forward* justo para uma data de exercício daqui a 12 meses?

Suponhamos, num primeiro cenário, que esse preço *forward* seria de 220 EUR por onça. Um investidor atento (neste caso um *arbitragista*) poderia fazer, imediatamente, o seguinte:

- Pedir emprestado 200 EUR a 4% ao ano.
- Comprar uma onça de ouro.
- Estabelecer um contrato *forward*, em posição curta, para vender o ouro a 220 EUR daqui a um ano.

O arbitragista faria, desta forma, um lucro de $220 - (200 + 8) = 12$ EUR por onça de ouro. Um preço *forward* superior a 208 EUR conduziria sempre a uma estratégia de arbitragem (com lucro e sem risco).

Num cenário oposto, consideremos que o preço *forward* era de 200 EUR por onça. A estratégia de arbitragem passaria a ser, para quem possuísse ouro na sua carteira, descrita por:

- Vender o ouro a 200 EUR.
- Investir o dinheiro a 4% ao ano.
- Entrar, em posição longa, num contrato *forward* para re-adquirir o ouro a 200 EUR.

Tal investidor faria, assim, um lucro de $(200 + 8) - 200 = 8$ EUR por onça de ouro.

Se o preço *forward* fosse superior a 208 EUR, apareceriam muitos investidores a tentarem tirar partido disso, aumentando a oferta de contratos *forward* em posição curta (como vendedores). Desta forma, o preço *forward* desceria.

Se o preço *forward* fosse inferior a 208 EUR, então muitos investidores tentariam entrar, em posição longa, em contratos *forward*, aumentando a procura destes. O preço *forward* subiria.

Assim sendo, e como existiriam sempre tentativas de tirar proveito de oportunidades de arbitragem, o preço *forward*, com o ouro como activo subjacente, tenderia a estabilizar-se em 208 EUR a onça. Este exemplo é bastante redutor, a vários níveis. Em primeiro lugar porque os contratos *forward* não se comercializam em mercados organizados, diminuindo a liquidez e dificultando a circulação de informação. O exemplo seria mais realista com contratos de futuros. Por outro lado, não foram tidos em conta factores como os custos de transacção, a diferença entre taxas de juro *activas* (para obtenção de empréstimo) e *passivas* (depósitos a prazo) e a incerteza das mesmas.

Exercícios

1. Um investidor tem a possibilidade de pedir emprestado 10000 EUR e conhecimento de que o preço *forward* para venda de ouro a 12 meses é de 500 EUR por onça. A taxa de juro efectiva anual *activa*, que tem à sua disposição, é de 5%. O que faria este arbitragista se o preço actual da onça de ouro estivesse nos 400 EUR? Qual seria o preço *forward* máximo para a venda de ouro a 12 meses que impediria qualquer possibilidade de arbitragem?
2. Considere um investidor que possui 100 onças de ouro a valerem, actualmente, 500 EUR cada. A taxa de juro efectiva anual *passiva* está em 10.25%. Em quantas onças de ouro poderia o investidor aumentar a sua carteira de ouro se o preço *forward* do ouro a 12 meses para compra fosse de 525 EUR?

Apêndice 2: Introdução aos Derivados Financeiros (Contratos de Futuros)

Contratos de Futuros

Os contratos de futuros são, essencialmente, contratos *forward*, modificados de forma a reduzir o risco de incumprimento e a potenciar a liquidez. Os futuros são transaccionados em *mercados organizados*, onde existem mecanismos centralizados para regulação e supervisão. As suas características contratuais são padronizadas. Nestes mercados existe uma câmara de compensação, responsável pela padronização dos contratos e pela assunção do risco de incumprimento. Na prática, os contratos de futuros não são exercidos entre as partes, mas entre estas e a câmara de compensação.

Os contratos de futuro pressupõem, como nos *forwards*, uma entrega diferida de um activo na data de vencimento. Porém, estima-se que apenas uma reduzida percentagem de futuros transaccionados são liquidados na data de vencimento dos contratos. Nos contratos *forward*, o objectivo final do contrato (a entrega do activo subjacente) é satisfeito na grande maioria dos casos. O que acontece nos futuros é que as partes têm como alternativa ao cumprimento do contrato a possibilidade de tomar posições simétricas num outro contrato de futuros com as mesmas características do inicial. Quando isto acontece diz-se que o contrato é fechado por reversão. Outra alternativa à liquidação na data de vencimento consiste em abrir uma nova posição com a mesma dimensão, mas num contrato com uma data de exercício posterior (*roll-over*).

Os mercados de futuros são caracterizados por elevados índices de negociabilidade, transparência e fungibilidade. Ao contrário dos *forwards*, a negociação é rápida e acarreta custos reduzidos. Os custos de informação são praticamente desprezáveis (os preços dos futuros e os volumes de transacção são anunciados publicamente e publicados na imprensa especializada).

A diferença mais importante entre *forwards* e futuros reside no facto destes últimos estarem sujeitos a mecanismos de ajustamento periódico das *margens dos investidores*. Todos os investidores são obrigados a criar uma conta de margem que, geralmente, corresponde a menos de 15% do preço do contrato. As margens exigidas pelos compensadores podem ser discricionárias em função, por exemplo, da carteira ou da natureza do investidor.

Este processo de ajustamento periódico é conhecido nos mercados de futuros por marcação-ao-mercado (*marking-to-market*) e está na base da redução do risco de incumprimento dos contratos de futuros. Através deste mecanismo, os ganhos e perdas de um futuro são pagos diariamente durante a duração do contrato. Suponhamos que um investidor tomou uma posição longa num contrato de futuros e que esta posição é mantida até à data de vencimento. Neste caso, os ganhos ou perdas totais são dados por

$$F_0^r - F_0 + \sum_{i=1}^T (F_i^r - F_{i-1}^r) = F_T^r - F_0,$$

em que T desina o número de dias do contrato, F_0 foi o preço do futuro a ser pago pelo investidor¹², e F_i^r representa o preço de referência do contrato no dia i . O preço de referência (*settlement price*) é calculado diariamente pela câmara de compensação e procura reflectir o preço médio desse futuro no final de cada sessão diária.

A marcação-ao-mercado permite actualizar diariamente o saldo da conta do comprador e impor mecanismos de ajuste das contas de margem no caso das perdas atingirem uma fatia significativa das margens. Em caso limite, a câmara de compensação pode fechar a posição do investidor limitando as perdas às já existentes. É desta forma que o risco de incumprimento é significativamente reduzido.

Na data de vencimento do contrato, o preço do futuro F_T deve coincidir com o preço do activo subjacente S_T , pois, caso contrário, existiriam oportunidades de arbitragem instantâneas. É a própria entidade reguladora do mercado que estipula o preço F_T de forma a evitar arbitragem, fazendo-o coincidir com o preço de referência F_T^r por si calculado (em função do preço médio do activo subjacente). Assim sendo, os ganhos e perdas de um contrato futuro em posição longa reduzem-se a

$$S_T - F_0,$$

coincidindo com os de uma idêntica posição num contrato *forward* com as mesmas características. A situação relativa à posição curta é deixada para exercício.

Banda de Não-Arbitragem

Consideremos, novamente, um contrato de futuros transaccionado ao preço F_0 no instante 0 e com maturidade T . Seja S_0 o valor do activo subjacente no instante inicial e r uma taxa de juro isenta de risco com capitalização contínua durante o período $[0, T]$ (ver exercício). A condição de não-arbitragem pode escrever-se na forma

$$F_0 = e^{rT} S_0.$$

Na prática, a condição de não arbitragem não se exprime através de uma igualdade mas recorrendo a uma ou mais desigualdades. Por exemplo, na presença de custos de transacção, a *banda de não-arbitragem* seria dada por

$$e^{rT} S_0 - CT \leq F_0 \leq e^{rT} S_0 + CT,$$

em que CT designa os custos de transacção da operação de arbitragem. Estes custos incluem, certamente, os envolvidos na transacção do derivado e do activo subjacente, mas podem também reflectir variações adversas provocadas pela própria operação de arbitragem.

Se levarmos em consideração taxas de juro activas e passivas, a banda de não-arbitragem passaria a ser

$$e^{r_p T} S_0 - CT \leq F_0 \leq e^{r_a T} S_0 + CT,$$

¹²O preço do futuro F_0 corresponde, na notação desta aula, ao preço forward E do apêndice anterior.

com r_a a taxa activa e $r_p < r_a$ a taxa passiva. Como quase sempre, as fórmulas aqui apresentadas são simplificações da realidade. Neste caso concreto, ignorámos o facto do activo subjacente poder pagar *dividendos*.

Intervenientes nos Mercados de Derivados

Há essencialmente três estratégias de transacção pré-definidas a actuar nos mercados organizados de derivados:

Nas *operações de cobertura (hedging)* utilizam-se derivados para reduzir o risco de potenciais movimentos de uma determinada variável do mercado à vista. Comprando ou vendendo derivados compensa-se as alterações nos preços dos activos subjacentes. Quem entra em posição curta num futuro, por exemplo, protege-se contra a descida do preço do activo subjacente. Os contratos *forward*, reduzem o risco, fixando o preço que o *hedger* pagará ou receberá pelo bem subjacente.

Os especuladores tiram partido dos derivados (*forwards*, futuros, opções, *etc.*) para apostar no comportamento de uma determinada variável do mercado ao longo de determinada direcção.

A especulação com recurso a derivados permite, ao agente especulativo, sem investimento inicial (ou com um investimento inicial moderado, no caso dos futuros e das opções), tomar uma atitude sobre o mercado, esperando tirar um lucro elevado se as suas projecções se verificarem.

No caso das opções, as perdas potenciais da especulação estão limitadas ao seu preço nas posições longas. Mas, no caso dos *forwards* e dos futuros, as perdas e ganhos potenciais podem ser relativamente grandes.

As operações de arbitragem permitem tirar vantagem da discrepância que possa existir entre preços de mercados diferentes, especialmente entre o mercado de derivados e o mercado à vista. O arbitragista toma, simultaneamente, uma posição longa no mercado subavaliado e uma posição curta no mercado sobreavaliado. O lucro de um negócio de arbitragem apresenta um risco relativamente reduzido. É a actuação destes agentes que torna a presença de arbitragem pouco provável.

Quanto à localização e função, os agentes ou operadores classificam-se em investidores fora de bolsa (clientes) e operadores directos. Entre os operadores directos distinguem-se os negociadores por conta doutrem (corretores ou *brokers*), os negociadores por contra própria (*locals*) e os membros da câmara de compensação (compensadores). Os negociadores agem a mando dos clientes. Uma vez fechados os contratos, os compensadores gerem as posições em aberto junto da câmara de compensação.

Alguns Registos sobre os Derivados

São muitos os registos de negociação para entrega diferida ao longo da história da humanidade, quase sempre relacionados com bens agrícolas ou minerais. No entanto, foi apenas a partir dos meados do Séc. XIX (mais precisamente em 1848), em Chicago, nos EUA, que foi fundado o primeiro mercado organizado de futuros, o Chicago Board of Trade (CBOT, www.cbot.com) e, mais tarde, o Chicago Mercantile Exchange (CME, www.cme.com), estabelecido em 1919.

Mais tarde, aparecem o Chicago Board of Options Exchange (CBOE, www.cboe.com), fundado em 1973, e o London International Financial Futures and Options Exchange (LIFFE, www.liffe.com e www.euronext.com), ambos para opções.

Portugal teve um mercado de derivados, localizado no Porto, que foi inaugurado em Junho de 1996 e que foi alvo da fusão na Bolsa de Valores de Lisboa e Porto (BVLP) em Dezembro de 1999. Inicialmente transaccionavam-se apenas futuros. O primeiro contrato de opções teve lugar em Março de 1999. Mas ainda agora a liquidez do mercado de derivados em Portugal (e sobretudo de opções) é muito escassa comparada com a dos grandes mercados de derivados internacionais. A BVLP foi integrada na Euronext em Dezembro de 2001. Outras informações históricas estão disponíveis em <http://www.euronext.pt/bvlp/historia.jsp>.

Exercícios

1. Descreva a fórmula dos ganhos e perdas totais para a posição curta num contrato de futuros. Na ausência de arbitragem, diga qual seria o ganho ou perda final desta posição.
2. Existem vários processos de deduzir a expressão $e^{rT}S_0$. Um dos processos é através de uma equação diferencial (veremos isso mais adiante). Outro é através das taxas de juro *nominais* anuais com capitalização contínua.

Seja r_m a taxa anual nominal com capitalização m por ano:

$$r_m = m \times (\text{taxa de juro para o período de capitalização}).$$

Note que r_1 coincide com a taxa de juro anual efectiva. Quando $m = 2$, o período de capitalização é semestral.

- (a) Prove que a taxa de juro anual efectiva é dada por:

$$\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m - 1.$$

Qual é a maior? A efectiva ou a nominal?

- (b) Considere agora um investimento de S_0 por um período composto de T anos à taxa nominal anual de r_m . Mostre que o investimento final é dado por

$$\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{mT} S_0.$$

- (c) Faça m tender para $+\infty$ e conclua que r pode ser vista como a taxa de juro nominal anual com capitalização contínua $\lim_{m \rightarrow +\infty} r_m$.

Apêndice 3: Introdução aos Derivados Financeiros (Contratos de Opções)

As opções são derivados geralmente transaccionados em mercados organizados com características semelhantes às dos mercados de futuros e que se distinguem dos *forwards* e dos futuros por possibilitarem uma escolha (uma opção). É, aliás, este elemento de escolha que faz com que a modelação do preço das opções seja consideravelmente mais complexa do que a dos outros derivativos mais básicos.

Há dois tipos de opções: opções de compra (opções *call*, ou simplesmente *calls*) e opções de venda (opções *put*, ou *puts*). Existem, também, diversos estilos de opções, sendo os mais conhecidos os estilos europeu e americano.

Uma opção *call* europeia é um contrato que dá ao detentor ou comprador o direito (mas não o dever) de comprar uma quantidade específica de um activo subjacente, por um determinado preço, no final de um determinado período de tempo.

O detentor do contrato pode exercer, ou não, o seu direito. A contraparte no contrato, o vendedor ou subscritor (*writer*), tem a obrigação de vender o activo se o detentor assim o desejar.

O valor ou preço mencionado no contrato da opção é o chamado preço de exercício (*strike price*). A data especificada numa opção para o exercício do direito de compra é conhecida por data de exercício (de vencimento ou de expiração), ou, simplesmente, por maturidade (*maturity*).

O preço a pagar pela opção, ou seja, aquilo que o comprador paga ao vendedor quando o contrato é celebrado, é conhecido por prémio da opção.

Nas opções *put* europeias, o detentor do contrato tem o direito (mas não o dever) de vender o activo subjacente, por um determinado preço, no final de um determinado período de tempo. Como no caso de uma opção *call*, o detentor do contrato pode exercer, ou não, o seu direito. A contraparte no contrato, o vendedor ou subscritor, tem a obrigação, no caso de uma opção *put*, de comprar o activo se o detentor assim o exigir.

As opções americanas distinguem-se das europeias pelo facto de poderem ser exercidas em qualquer momento até à sua maturidade. A designação europeia *vs* americana não está relacionada, ao contrário do que poderia parecer, com a localização da sua comercialização.

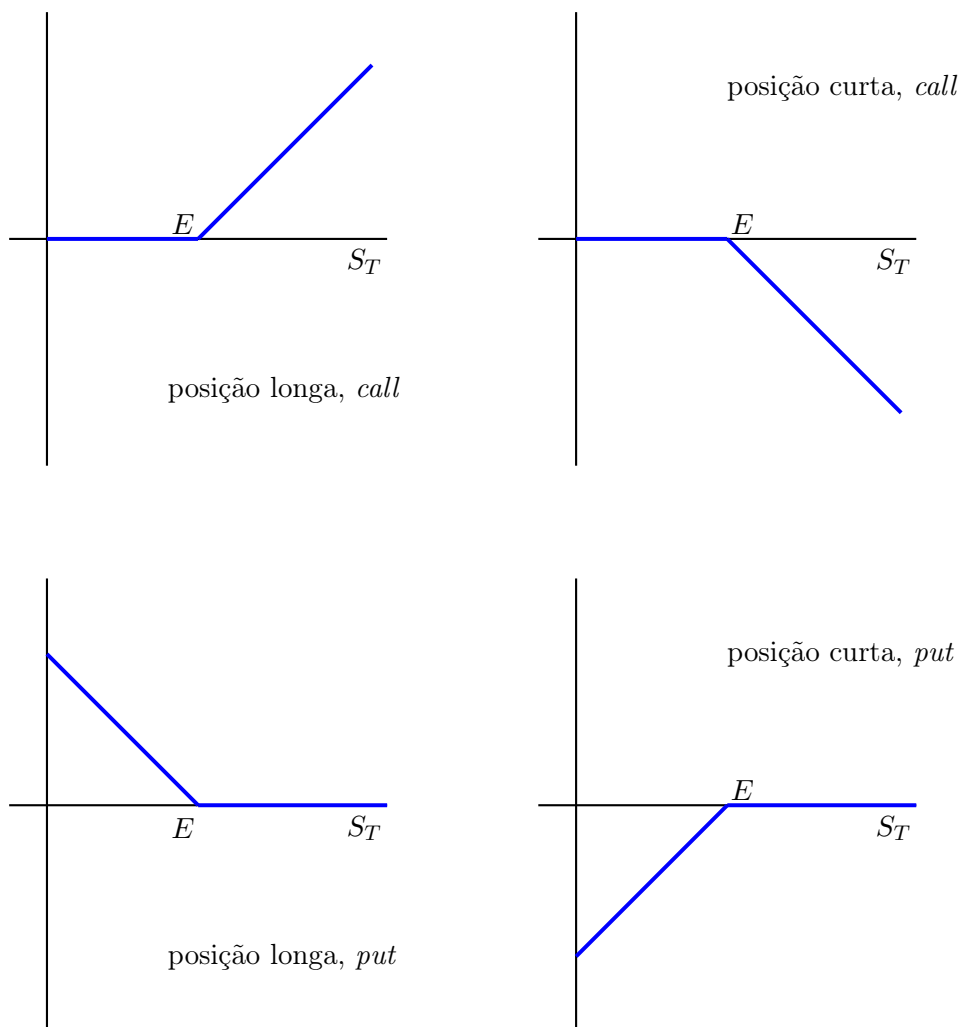
Quem compra ou detém uma opção assume uma posição longa. Quem vende ou subscreve uma opção toma uma posição curta.

Os ganhos e perdas em contratos de opções variam consoante se trate de *call* ou *put*, ou conforme a posição tomada seja curta ou longa. Como no caso dos contratos *forward*, sejam S_T o valor do activo subjacente na maturidade T e E o preço de exercício. Os

ganhos são dados por:

$$\begin{aligned} & \max \{S_T - E, 0\} \quad (\textit{call longa}), \\ - \max \{S_T - E, 0\} &= \min \{E - S_T, 0\} \quad (\textit{call curta}), \\ & \max \{E - S_T, 0\} \quad (\textit{put longa}), \\ - \max \{E - S_T, 0\} &= \min \{S_T - E, 0\} \quad (\textit{put curta}). \end{aligned}$$

Um ganho negativo é uma perda. Os perfis de ganhos e perdas destas quatro situações são retratados na figura seguinte.



O elemento de entrega diferida, a um determinado preço, num momento futuro, é uma característica comum entre os contratos de futuros e os contratos de opções. Porém, no caso das opções, os termos do contrato são assimétricos, uma vez que uma parte

fica sujeita à vontade da outra. O comprador (posição longa) vê sempre as suas perdas limitadas ao que efectivamente pagou pelo contrato. No entanto, as perdas potenciais do vendedor dependem da variação do activo subjacente durante o período do contrato e do exercício do direito do comprador.

São várias as questões que se colocam perante o conceito de uma opção. Por exemplo, qual é o preço justo a atribuir a uma opção? Em que situações é que ocorre arbitragem? A atribuição de preços a derivados, e muito particularmente a opções, é uma das componentes mais relevantes da Matemática Financeira.

Uma outra questão relaciona-se com a forma como o subscritor de uma opção reduz o risco associado ao seu dever. Vamos ver alguns exemplos relacionados com opções.

Exemplo (opção call). Um investidor compra 10 opções *call* de um banco com as seguintes características:

- uma maturidade de quatro meses;
- um preço de exercício de 1400 EUR;
- um prémio de 200 EUR por cada opção *call*.

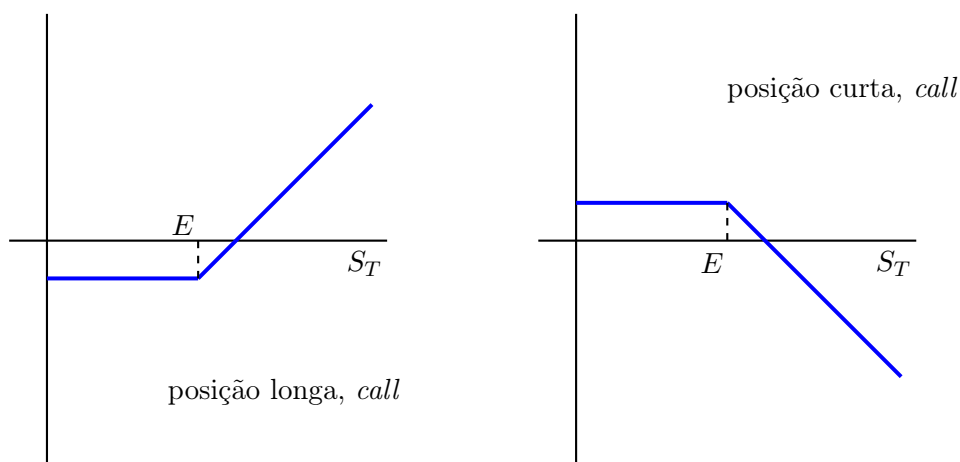
Cada opção costuma corresponder a 100 acções. O valor de cada acção do banco, no momento da compra das opções *call*, é de 12 EUR. O investimento amonta a 2000 EUR. Se o valor de cada acção for inferior (ou igual) a 14 EUR na maturidade, o investidor opta por não exercer o seu direito de compra. Nesse caso, perde os 2000 EUR. Se este valor for superior a 14 EUR, o investidor exerce o direito de compra. Suponhamos que cada acção vale 17 EUR na data de exercício. Num tal cenário, o lucro seria de

$$17 \times (10 \times 100) - 1400 \times 10 - 200 \times 10 = 1000 \text{ EUR.}$$

Mesmo que o valor fosse de 15 EUR, o investidor deveria exercer o seu direito de compra, apesar de ter um prejuízo de

$$15 \times (10 \times 100) - 1400 \times 10 - 200 \times 10 = -1000 \text{ EUR.}$$

O lucro desta opção *call* (que corresponde a prejuízo quando negativo) é representado graficamente de seguida, em posições longa e curta. Estes gráficos incorporam o prémio pago pelo contrato e, por este motivo, são diferentes dos perfis de ganhos e perdas.



Um investidor que compre opções *call* espera que o valor do activo subjacente cresça o mais possível até à maturidade do contrato.

Exemplo (opção put). Um investidor que compre opções *put* espera que o valor do activo subjacente desça o mais possível até à data de exercício. Suponhamos que um investidor compra 5 opções *put* de uma companhia, cuja cotação actual é de 20 EUR, com as seguintes características:

- uma maturidade de três meses;
- um preço de exercício de 2500 EUR;
- um prémio de 700 EUR por cada opção *put*.

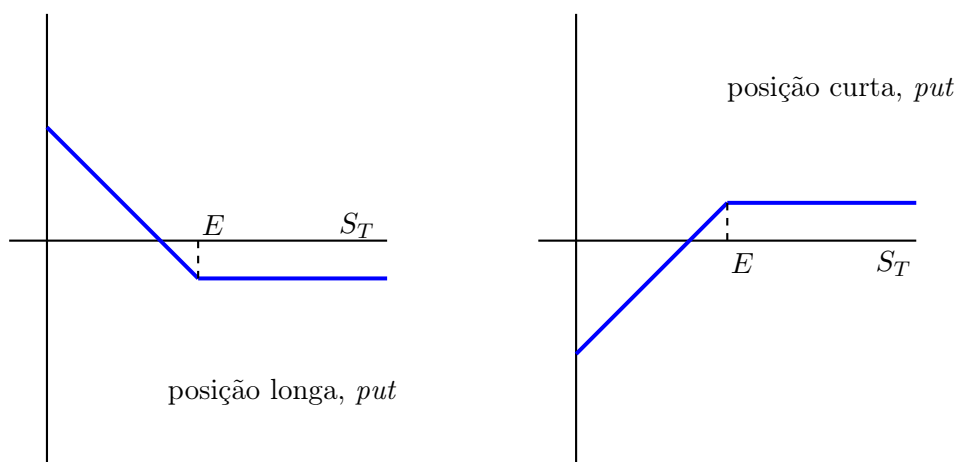
O investimento inicial é de 3500 EUR. Se o valor das acções da companhia for superior (ou igual) a 25 EUR daqui a três meses, o investidor não exerce o seu direito de venda. Se o valor for inferior a 25 EUR, este direito de venda é exercido. Consideremos um cenário em que cada acção vale 15 EUR na data de vencimento das opções *put*. Nesse caso, o lucro seria de:

$$2500 \times 5 - 15 \times (5 \times 100) - 700 \times 5 = 1500 \text{ EUR.}$$

Mesmo que o valor fosse 20 EUR, o investidor deveria exercer o seu direito de venda, apesar de ter um prejuízo de

$$2500 \times 5 - 20 \times (5 \times 100) - 700 \times 5 = -1000 \text{ EUR.}$$

O lucro (ou prejuízo) é descrito graficamente na figura seguinte, para as posições longa e curta associadas a esta opção *put*.



Para terminar, vamos ainda apresentar alguma terminologia em torno dos contratos de opções. Chama-se *valor intrínseco* de uma opção *call* — independentemente do estilo, europeu ou americano —, ao valor

$$VI = \max \{S_t - E, 0\},$$

em que S_t designa o valor corrente do activo subjacente. O valor intrínseco de uma opção *put* é dado por

$$VI = \max \{E - S_t, 0\},$$

O valor intrínseco de uma opção, num dado instante, é o resultado do seu exercício imediato. O valor de uma opção (*VO*) resulta da soma do seu valor intrínseco (*VI*) com o seu valor temporal (*VT*), que quase sempre é não negativo. O valor temporal de uma opção na data de exercício é nulo (caso contrário existiria uma oportunidade de arbitragem imediata). Nesse caso, o valor da opção coincide com o seu valor intrínseco. É o valor da opção (na prática, o seu valor temporal, uma vez que o intrínseco é sempre conhecido), ou seja o seu preço, que será objecto de modelação matemática. Os mercados de opções dão indicações sobre os preços das opções ao indicarem os valores das últimas transacções.

Diz-se que uma opção está *out-of-the-money* ou *at-the-money* quando o seu valor intrínseco é nulo ou pequeno. No caso *out-of-the-money*, tem-se $S_t \ll E$ para *calls* e $S_t \gg E$ para *puts*. O caso *at-the-money* corresponde a $S_t \simeq E$. A opção está *in-the-money* quando o seu valor intrínseco é relativamente elevado, o que acontece nas *calls* quando $S_t \gg E$ e nas *puts* quando $S_t \ll E$. É mais natural que as opções se encontrem *out-of-the-money* quando a data de exercício está ainda distante, sendo o valor temporal, neste caso, mais elevado.

Exercícios

- Um investidor compra 1000 acções de uma empresa e pretende proteger-se contra uma descida forte do valor das acções nos próximos três meses, adquirindo opções *put* europeias. Cada acção vale actualmente 60 EUR. As opções custam 500 EUR por unidade (e cada uma dá o direito de venda de 100 acções). O preço de exercício das opções é de 5000 EUR por opção e a sua maturidade é de três meses.

Para três cenários possíveis, correspondentes aos valores de 10, 20 e 30 EUR para o valor das acções na data de exercício das opções, compare o valor final da carteira ou portefólio do investidor se: (i) não tivesse comprado opções e tivesse vendido as acções na maturidade destas; (ii) tivesse feito uma operação de cobertura (*hedging*) comprando 10 opções *put* e exercendo o seu direito na data de exercício.

- Um especulador decide comprar 10 opções *call* europeias na expectativa de ver a acção subjacente subir. Suponhamos que cada acção está cotada, actualmente, a 30 EUR. O prémio de cada opção é de 400 EUR (dando cada uma o direito de compra de 100 acções). A maturidade é de dois meses e o preço de exercício de 3500 EUR por opção.

Calcule os ganhos ou perdas desta estratégia de especulação em cinco cenários possíveis, nos quais a acção subjacente atinge, findos os dois meses, os valores de 10, 20, 30, 40 e 50 EUR (e entrando em linha de conta com o prémio pago pelas opções). Compare estes ganhos ou perdas com os que ocorreriam se o especulador tivesse comprado logo de início, em vez das opções, 1000 acções.

(Verificará que, para subidas acentuadas das acções, os ganhos na compra das opções seriam inferiores aos na compra das acções. Porém, o investimento inicial em opções é muito inferior, o que comporta uma vantagem acrescida, e, para além disso, as perdas são mais ligeiras no caso de uma descida acentuada do valor das acções.)

- Considere a seguinte tabela relativa a opções sobre acções da firma AppleC, publicada no Wall Street Journal em 13 de Maio de 2005. Nesse dia, o valor das acções da AppleC era de 34.77 USD.

OPTION	STRIKE	EXP	Call		Put	
			VOL	LAST	VOL	LAST
AppleC	32.5	May	235	2	1,361	0.15
AppleC	35	May	7,562	.55	1,617	0.75
AppleC	35	Jun	504	1.60	1,551	1.80
AppleC	35	Jul	528	2.55	484	2.70
AppleC	37.50	May	542	.10	1,018	2.90
AppleC	40	Jun	725	.30	22	5.50
AppleC	40	Jul	4,046	.95	36	6.20
AppleC	42.50	Jul	3,745	.50	207	8.20
AppleC	45	Oct	3,645	1.25

Suponhamos que em 13 de Maio de 2005 um investidor compra duas opções *call* da AppleC, com preços de exercício de 32.50 e 37.50 e vencimento em Maio e uma opção *put* com preço de exercício de 35 e vencimento em Junho. Qual é o valor intrínseco das *calls* nesse dia? Qual é o valor intrínseco e temporal da *put* em 13 de Maio?

Lista das Aulas

1. Evolução Binária de um Activo Financeiro e o Preço Justo de uma Opção
2. Modelação (Estocástica) do Valor de um Activo Financeiro
3. Modelação (Diferencial Estocástica) do Valor de um Activo Financeiro
4. Alguma Motivação da Integração Estocástica
5. Hipóteses do Modelo de Black-Scholes: Ausência de Arbitragem e Venda a Descoberto
6. O Modelo de Black-Scholes
7. A Fórmula de Black-Scholes
8. Risco Neutral e Volatilidade Implícita
9. Paridade *Put-Call* e *Delta-Hedging*
10. O Método Binomial
11. Opções sobre Activos que Pagam Dividendos
12. Preços de Contratos *Forward* e de Contratos de Futuros e de Opções sobre Futuros
13. Opções Americanas
14. Exemplos de Opções Exóticas
15. Exemplos de Opções Dependentes da Trajectória do Activo
16. Obrigações e Modelos de Taxas de Juro
17. Opções sobre Obrigações e outros Produtos sobre Taxas de Juro
18. Atribuição de Preços a Activos Financeiros (Teorema Fundamental usando Programação Linear)
19. Detecção de Arbitragem (usando Programação Linear)
20. Selecção de Carteiras — Modelo Quadrático de Markowitz
21. Selecção de Carteiras — Fronteira de Eficiência
22. Selecção de Carteiras — Modelo Linear
23. Selecção de Carteiras — Modelo de Black-Litterman
24. Ajuste e Uso de Matrizes de Covariâncias

25. Selecção de Carteiras — Optimização Robusta
26. Construção de um Índice de Fundos
27. Valor em Risco (VaR) e Valor em Risco Condicionado (CVaR) — Selecção de Carteiras
28. Modelos de Períodos Múltiplos (o caso da Gestão de Bens e Responsabilidades)

Lista dos Apêndices

1. Introdução aos Derivados Financeiros (Contratos *Forward*)
2. Introdução aos Derivados Financeiros (Contratos de Futuros)
3. Introdução aos Derivados Financeiros (Contratos de Opções)

Bibliografia

1. L. D. Abreu, *Modelação de Preços de Derivados Financeiros*, Departamento de Matemática da FCTUC, 2011.
2. T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
3. G. Cornuejols e R. Tütüncü, *Optimization Methods in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
4. D. J. Higham, *An Introduction to Financial Option Valuation: Mathematics, Stochastics and Computation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
5. J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2003.
6. B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations — An Introduction with Applications*, quinta edição, Springer-Verlag, Berlim, 2000.
7. H. M. C. V. Sebastião, *Instrumentos Derivados Financeiros*, Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, Ano Lectivo de 2003/2004.
8. R. U. Seydel, *Tools for Computational Finance*, Springer-Verlag, Berlim, 2003.
9. P. Wilmott, S. Howison e J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.