MATEMÁTICA NUMÉRICA II – Exame – 12/01/05

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h15m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os apontamentos das aulas, bem como os enunciados e as respostas dos exercícios das aulas e dos trabalhos.

---

1. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável e com matriz Jacobiana não singular em $\mathbb{R}^n$.

   Considere o sistema de equações não lineares

   $$F(x) \; = \; 0$$

   e o problema de mínimos quadrados

   $$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; \frac{1}{2} \|F(x)\|^2.$$

   (a) Escreva a direcção de descida máxima para o problema de mínimos quadrados.

   (b) Qualquer ponto estacionário deste problema de optimização é solução do sistema. Porquê?

   (c) Prove que o passo de Newton para o sistema de equações não lineares é uma direcção de descida para o problema de mínimos quadrados (se $F(x) \neq 0$).

   (d) Mostre que o método de Newton para o sistema de equações não lineares coincide com o método de Gauss–Newton para o problema de mínimos quadrados.

2. Considere uma fórmula de quadratura interpolatória, para aproximação do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$, da forma

   $$I_1(f) \; = \; \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(\sqrt{3}/3).$$

   (a) Para que valores de α_0, α_1 e x_0 atinge esta fórmula o seu grau de exactidão máximo? (No caso de α_0 e α_1 só precisa de indicar as suas expressões.)

   (b) Considere $\alpha_1 = 0$. Para que valores de α_0 e x_0 atinge a fórmula $I_0(f) = \alpha_0 f(x_0)$ o seu grau de exactidão máximo?

   (c) Classifique as fórmulas que encontrou nas duas alíneas anteriores.

3. Dada uma função f, contínua em $[0, 1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira periódicas:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} -u''(x) \;=\; f(x) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) \;=\; u(1), & u'(0) \;=\; u'(1). \end{cases}$$

Considere o intervalo $[0,1]$ discretizado na forma

$$0 = x_0 \;<\; x_1 \;<\; \cdots \;<\; x_{n-2} \;<\; x_{n-1} = 1.$$

Seja u_k uma aproximação para $u(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Faça $h = 1/(n-1)$.

(a) Com k a variar de 0 até $n-1$, escreva uma aproximação para $u''(x_k)$ recorrendo à fórmula das diferenças centrais de segunda ordem. Tome o simétrico desta aproximação e faça-o igual a $f(x_k)$. Reúna todas estas igualdades num sistema de equações lineares e escreva-o na sua forma matricial, fazendo $u_{-1} = u_{n-1}$ e $u_n = u_0$. O resultado é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-3} \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(0) \\ f(h) \\ f(2h) \\ \vdots \\ f((n-3)h) \\ f((n-2)h) \\ f(1) \end{bmatrix}.$$

(b) Mostre que a matriz deste sistema é circulante. Escreva os seus valores próprios no caso $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Substitua os elementos diagonais da matriz da alínea anterior por 3. Quais seriam os novos valores próprios? Como resolveria este sistema de forma eficiente?

4. Considere o problema de valor inicial definido por

$$\begin{aligned} y' &= t^3 y^2, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Justifique o motivo pelo qual este problema tem uma e uma só solução no rectângulo $[-1,1] \times [-1,1]$.

(b) Enuncie os passos do método de Taylor de ordem 2 para este problema (como foi feito na aula para um outro problema e uma outra ordem).

(c) Escreva a fórmula de actualização do método na forma $u_{k+1} = u_k + h\Phi(t_k, u_k, f(t_k, u_k); h)$, identificando a sua função incremental.

(d) Prove que o erro de truncatura local deste método obedece a

$$\left| \frac{R_{k+1}(h)}{h} \right| \;\leq\; Ch^2,$$

em que C é uma constante positiva independente de h ou de n_h.