MATEMÁTICA NUMÉRICA II – Exame – 09/02/07

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h15m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os Apontamentos de Matemática Numérica II de 2006/2007 (com anotações feitas na aula).

---

1. Seja $\{x_k\}$ uma sucessão em $\mathbb{R}^2$ definida por

$$x_k = \begin{bmatrix} 3^{-k^2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ se } k \text{ for par} \quad \text{e} \quad x_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 3^{-k^2} \end{bmatrix} \text{ se } k \text{ for ímpar.}$$

   (a) Mostre que $\{x_k\}$ converge q-superlinearmente para $0 \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Mostre que $\{(x_k)_1\}$ não converge q-superlinearmente para $0 \in \mathbb{R}$.

   (c) O que pode dizer sobre a taxa de convergência da sucessão $\{(x_k)_1\}$ ou $\{(x_k)_2\}$?

   (d) Num contexto recíproco, se tiver duas sucessões reais $\{(y_k)_1\}$ e $\{(y_k)_2\}$ a convergir q-superlinearmente para 0, o que é que pode concluir sobre a taxa de convergência de $\{y_k\}$ para $0 \in \mathbb{R}^2$? Justifique.

2. Pretende-se aproximar $\|\nabla f(x)\|$ através de diferenças finitas, para uma dada função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Pode assumir que o gradiente de f existe e é contínuo à Lipschitz (com constante $\gamma > 0$). Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um vector definido por $v_i = (f(x + \epsilon e_i) - f(x))/\epsilon$, $i = 1, \ldots, n$, com $\epsilon > 0$.

   (a) Deduza a aproximação para $\|\nabla f(x)\|$ dada por:

$$\|\nabla f(x)\| \simeq \|v\|.$$

   (b) Mostre, exibindo um limite superior para a constante do erro, que

$$|\|\nabla f(x)\| - \|v\|| \leq C\epsilon.$$

3. Considere o cálculo aproximado do integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ através de uma aproximação para f em $[a,b]$ definida por $g(x) = f(y) + (x-y)f'(y)$, em que $y \in (a,b)$ e se considera que f tem derivada em y.

   (a) Deduza a fórmula para $I(g)$ dada por:

   $$I(g) \;=\; (b-a)f(y) + \frac{f'(y)}{2}(b-a)(a+b-2y).$$

   (b) Que fórmula obtém quando $y = (a+b)/2$?

   (c) Deduza, na forma de um integral, uma expressão para o erro $I(f-g)$, assumindo que $f \in C^2[a,b]$.

   (d) Mostre que o erro é da ordem de $(b-a)^3$ e apresente um limite superior para a respectiva constante.

4. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira:

   $$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -u''(x) & = & f(x) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) & = & u(1) \;=\; 0. & \end{array} \right. \tag{P}$$

   Considere $\{\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n\} \subset C^2[0,1]$, com $n \in \mathbb{N}$. Tome $\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \Psi_i(x)$ em que $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são coeficientes reais.

   (a) Substitua u por $\bar{u}$ na equação diferencial e diferencie.

   (b) Que condições devem as funções $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n$ e os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ satisfazer para que $\bar{u}$ verifique as condições de fronteira?

   (c) Considere, agora, $n-1$ pontos $x_1 < \cdots < x_{n-1}$ em $(0,1)$. Escreva um sistema de $n+1$ equações lineares (na forma matricial) que permita determinar $\bar{u}$ como aproximação da solução u.

   (d) Faça, $\Psi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Escreva a matriz do sistema da alínea anterior. Mostre que esta matriz é não singular quando $n = 3$.