Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2006/07

Trabalho 1

Data de recepção: **13/09/2006** Data de entrega: **27/09/2006**

1. Considere a função vectorial $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x_1, x_2) \;=\; \begin{bmatrix} e^{x_1} - 1 \\ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}.$$

Indique um valor para constante de Lipschitz da matriz Jacobiana de F no conjunto $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

2. Considere o sistema

$$F(x) \;=\; \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + 10^{-3}x_1 \end{bmatrix} \;=\; 0.$$

(a) Aproxime a solução usando o método de Newton, em Matlab, partindo do ponto $x_0 = [\,0.01 \;\; 0.01\,]^\top$.

(b) Explique o motivo pelo qual a convergência para a solução é *lenta*.

(c) Como poderia contornar o problema?

3. Uma sucessão $\{x_k\}$ de $\mathbb{R}^n$, convergente para x_*, apresenta uma taxa de convergência cúbica quando existe uma constante $M_c > 0$ tal que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \;\leq\; M_c \|x_k - x_*\|^3$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que se uma sucessão converge cubicamente (para x_*) então converge quadraticamente (para x_*).

(b) Dê um exemplo de uma sucessão que convirja cubicamente para 0 (no caso $n = 1$).

4. Considere a aplicação do método de Newton à resolução numérica da equação $x^3 = 0$.

   (a) Seja $x_0 \neq 0$. Prove que $x_{k+1} = (2/3)^{k+1} x_0$.

   (b) Estude a taxa de convergência da sucessão gerada.

   (c) Diga por que motivo é que a resposta da alínea anterior não entra em contradição com o teorema da convergência local do método de Newton.

5. Neste exercício pretende-se analisar a taxa quadrática de convergência local do método de Newton *inexacto*. Suponha que em vez de ser calculado o passo de Newton exacto é determinado um passo p_k tal que

$$J(x_k)p_k \; = \; -F(x_k) + e_k,$$

em que $e_k \in \mathbb{R}^n$ representa o erro residual. Prove, nas condições do Teorema 1, que a sucessão $\{x_k\}$ converge quadraticamente para x_* se existir uma constante positiva c tal que

$$\|e_k\| \; \leq \; c\|F(x_k)\|^2 \qquad \text{para todo o } \; k.$$