Problema de Fevereiro

Catarina Silva

José Gaspar

Pergunta 1: Seja $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função vectorial. Seja F continuamente diferencial em D e a matriz Jacobina à Holder em D, ou seja, verifica a seguinte condição

$$\| J(x) - J(y) \| \leq \gamma \| x - y \|^{\alpha}, \quad x, y \in D \quad (1)$$

para $\alpha \in [0,1]$. Prove que para todo o $x, x+p \in D$, com $[x, x+p] \subset D$ temos

$$\| F(x+p) - F(y) - J(x)p \| \leq \frac{\gamma}{1+\alpha} \| p \|^{1+\alpha}. \quad (2)$$

Resposta 1: Queremos provar para todo $x, x+p \in D$, com $[x, x+p] \subset D$ se tem (2). Para tal vamos ter de utilizar algumas definições dadas nas aulas, nomeadamente, o seguinte Lema :

Seja $J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$, e $D \subset \mathbb{R}^n$, com $x, x+p \in D$. Para qualquer norma em $\mathbb{R}^{n \times m}$, se J for integrável em $[x, x+p]$, temos

$$\left\| \int_0^1 J(x+tp)p dt \right\| \leq \int_0^1 \| J(x+tp)\, p \| \, dt \quad (3)$$

Estamos prontos então para iniciar a demonstração. Consideremos o teorema do valor médio

$$F(x+p) - F(x) = \int_0^1 J(x+tp)pdp\,.$$

Por outro lado

$$J(x)p = \int_0^1 J(x)pdt.$$

Assim

$$F(x+p) - F(x) - J(x) = \int_0^1 (J(x+tp) - J(x))pdp.$$

Logo

$$\| F(x+p) - F(y) - J(x)p \| \leq \int_0^1 \| J(x+tp) - J(x) \| \, \|p\| \, dt \quad \text{(por 3)}$$

$$\leq \int_0^1 \gamma \| (x+tp) - x \|^{\alpha} . \|p\| dt = \int_0^1 \gamma \| tp \|^{\alpha} . \|p\| dt = \gamma \, \|p\|^{\alpha+1} \int_0^1 t^{\alpha} dt =$$

$$\gamma \, \|p\|^{\alpha+1} . \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 = \gamma \, \|p\|^{\alpha+1} . \left[\frac{1^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] = \frac{\gamma}{\alpha+1} \, \|p\|^{\alpha+1}.$$