Eva Ferreira
Liliana Pinho

Problema 1 - Matemática Numérica II

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
2013

1 Exercício

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f}(z) = f(x)$, $\exists S : x = Sz + s$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}, e s \in \mathbb{R}^n$.

Sabemos então que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e que $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Suponhamos

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longrightarrow & Sz + s = \alpha(z) = x \end{array}$$

Logo, $\tilde{f}(z) = f(Sz + s) = f(\alpha(z)) = f(x)$. Pode-se então definir $\tilde{f}$ como sendo uma função composta $\tilde{f} = f \circ \alpha$.

Pelo teorema da derivada da função composta sabemos que

$$D\tilde{f}(z) = Df(\alpha(z)) \times D\alpha(z) = Df(x) \times D\alpha(z)$$

Note-se que $D\alpha(z) = D(Sz + s) = S$. Vem então que $D\tilde{f}(z) = Df(x) \times S$.

Relembremos que, $\forall g$ uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ temos:

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} \frac{\delta g_1}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta g_2}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta g_3}{\delta x_1}(x) & \cdots & \frac{\delta g_m}{\delta x_1}(x) \\ \frac{\delta g_1}{\delta x_2}(x) & \frac{\delta g_2}{\delta x_2}(x) & \frac{\delta g_3}{\delta x_2}(x) & \cdots & \frac{\delta g_m}{\delta x_2}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta g_1}{\delta x_n}(x) & \frac{\delta g_2}{\delta x_n}(x) & \frac{\delta g_3}{\delta x_n}(x) & \cdots & \frac{\delta g_m}{\delta x_n}(x) \end{bmatrix}$$

e que

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\delta g_1}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta g_1}{\delta x_2}(x) & \frac{\delta g_1}{\delta x_3}(x) & \cdots & \frac{\delta g_1}{\delta x_n}(x) \\ \frac{\delta g_2}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta g_2}{\delta x_2}(x) & \frac{\delta g_2}{\delta x_3}(x) & \cdots & \frac{\delta g_2}{\delta x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta g_m}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta g_m}{\delta x_2}(x) & \frac{\delta g_m}{\delta x_3}(x) & \cdots & \frac{\delta g_m}{\delta x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Apliquemos agora a transposta em $D\tilde{f}(z) = Df(x) \times S$. Obtemos então $\nabla \tilde{f}(z) = S^T \times \nabla f(x)$.

Consideremos agora

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longrightarrow & \nabla f(x) \end{array}$$

Por definição a $D\gamma(x) = \nabla^2 f(x)$. Se considerarmos agora

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\gamma} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ z & \longrightarrow & \nabla \tilde{f}(z) \end{array}$$

Temos que $D\tilde{\gamma}(z) = \nabla^2 \tilde{f}(z)$. Podemos concluir que $\tilde{\gamma} = S^T(\gamma \circ \alpha)$ se voltarmos a aplicar a derivada da função composta vem que:

$$\nabla^2 \tilde{f}(z) = D\tilde{\gamma}(z) = D(S^T(\gamma \circ \alpha(z))) = S^T D\gamma(\alpha(z)) \times D\alpha(z) = S^T D\gamma(x) S = S^T \nabla^2 f(x) S$$

.

2 Exercício

2.1

Dado o sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{186^2} - \frac{y^2}{300^2-186^2} & = & 1 \\ \frac{(y-500)^2}{279^2} - \frac{(x-300)^2}{500^2-279^2} & = & 1 \end{cases}$$

Pretendemos saber quantas soluções podemos obter. Resolvendo todas as equações em ordem a x, inserimos na linha de comando do MatLab:

$>> w = -1500 : 200 : 1500;$
$>> x1 = sqrt((300^2 - 186^2) * (((w.^2)/186^2) - 1));$
$>> x2 = -(sqrt((300^2 - 186^2) * (((w.^2)/186^2) - 1)));$
$>> x3 = 500 + 279 * sqrt(1 + ((w - 300).^2/(500^2 - 279^2)));$
$>> x4 = 500 - 279 * sqrt(1 + ((w - 300).^2/(500^2 - 279^2)));$
$>> plot(w, x1, w, x2, w, x3, w, x4)$

O resultado desta operação foi o gráfico seguinte:

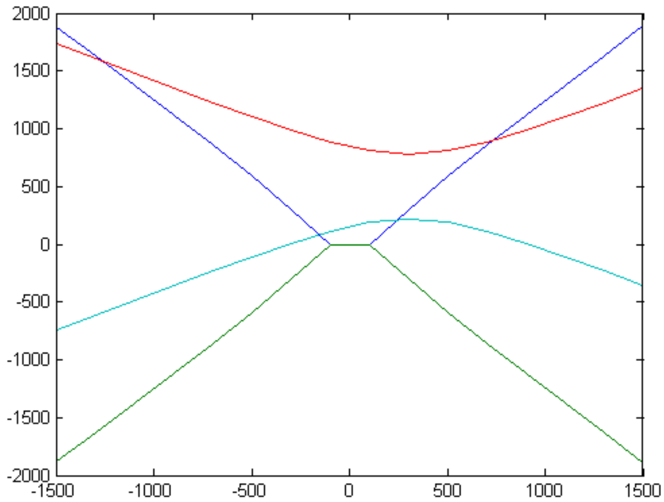

Figura 1: Gráfico 1 MatLab

Apesar do gráfico apresentado ser este há um detalhe incorrecto no mesmo. À frente apresentamos o gráfico correcto.

Podemos observar que existem quatro intersecções entre os gráficos, que seria as possibilidades de posição para o barco, logo, o sistema tem quatro soluções.

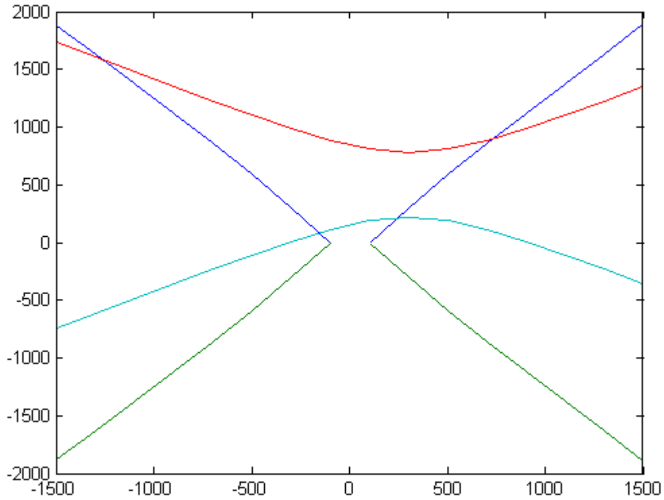

Figura 2: Gráfico 1 Corrigido

2.2

Para responder a esta alínea criamos três funções auxiliares, são elas as seguintes:

function F = F(u)
format long
F = $\frac{u(1)^2}{186^2} - \frac{u(2)^2}{300^2-186^2} - 1; \frac{(u(2)-500)^2}{279^2} - \frac{(u(1)-300)^2}{500^2-279^2} - 1;$
end

function J = J(u)
format long
J = $\frac{2*u(1)}{186^2} - \frac{2*u(2)}{300^2-186^2}; -\frac{2*(u(1)-300)}{500^2-279^2} \frac{2*(u(2)-500)}{279^2};$
end

function A = N(u)
format long
A = u;
while(norm(F(u), 2) $> 10^{(-10)}$)
$u = u + (\mathrm{J}(u) - \mathrm{F}(u)));$
A = [Au];
end

Para o valor inicial $[-1200, 1500]^T$ o programa efectuou 5 iterações, o resultado dado pelo MatLab foi:

$$\begin{bmatrix} -1200.00000000 & -1278.53675064 & -1273.36561589 & -1273.34280116 & -1273.34280071 \\ 1500.00000000 & 1600.84984328 & 1594.14437698 & 1594.11452123 & 1594.11452064 \end{bmatrix}$$

Sendo que a solução encontrada é $[-1273.34280071, 1594.11452064]^T$.

Já utilizando a solução inicial $[-200, 0]^T$ o programa efectuou 5 iterações, e o resultado dado pelo MatLab foi:

$$\begin{bmatrix} -200.00000000 & -186.490000000 & -193.407992135 & -193.294583201 & -193.294554044 \\ 0 & 65.230996874 & 66.529539175 & 66.564891622 & 66.564901359 \end{bmatrix}$$

Sendo a solução $[-193.294554044, 66.564901359]^T$.

Para o valor inicial $[300, 0]^T$ o programa efectuou 6 iterações, o resultado dado pelo MatLab foi:

$$\begin{bmatrix} 300.00000000 & 207.66000000 & 255.18100132 & 254.21632673 & 254.22112043 & 254.22112043 \\ 0 & 172.15900000 & 217.53394246 & 219.301820372 & 219.30699157 & 219.30699160 \end{bmatrix}$$

Sendo que a solução encontrada é $[254.221120438, 219.306991605]^T$.

Já utilizando a solução inicial $[750, 1000]^T$ o programa efectuou 5 iterações, e o resultado dado pelo MatLab foi:

$$\begin{bmatrix} 750.00000000 & 745.83564632 & 740.43536062 & 740.32885256 & 740.32882217 \\ 1000.00000000 & 917.70595501 & 907.00263840 & 906.82598688 & 906.82593996 \end{bmatrix}$$

Sendo a solução $[740.32882217, 906.82593996]^T$.

Todos os valores iniciais foram escolhido olhando para o gráfico e procurando pontos nos arredores das intersecções entre as hipérboles.

2.3

Começamos com o ponto inicial e na solução correspondente que obtivemos na pergunta anterior. De facto, temos um número finito de iterações, porém por serem tão poucas, não pudemos formar uma sucessão, mas pudemos analisar o comportamento de

$$\frac{||x_{k+1} - x_*||}{||x_k - x_*||}$$

Para analisar a convergência criámos uma função auxiliar:

function B $=$ conv(n, u, p)
format long
A $=$ N(u);
B $= zeros(n-2, 1)$;
$for\, i = 1 : n-2 \mathrm{B}(i,1) = norm((\mathrm{A}(:, i+1) - \mathrm{A}(:, n)), 2)/(norm((\mathrm{A}(:, i) - \mathrm{A}(:, n)), 2))^p$;
end

Escolhemos analizar o ponto inicial $[300, 0]^T$ apenas porque é o ponto que implica mais iterações. O resultado dado pelo MatLab:

$conv(6, [300; 0], 2)$

$ans =$

0.001320222781353
0.000459180646632
0.001734612643182
0.000595062700138

Pudemos concluir que a convergencia é em média quadrática. Se experimentassemos outros valores para p viamos que diverge.

2.4

Cada par de estações define uma hipérbole, mas como o tempo de recepção do sinal é contado, sabemos em qual dos braços da hipérbole se encontra o barco, com dois pares de estações temos quatro hipóteses de posição para o barco, mas conseguimos determinar através do tempo de recepção do sinal quais as duas curvas onde se encontra o barco. Essas duas curvas apenas se intersectam uma vez, e essa será a posição do barco.