DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Trabalho 3 – Matemática Numérica II

André dos Santos Ferreira

Liliana Carolina Vieira Pinho

Licenciatura em Matemática
Ano Letivo 2012/2013

Exercício 1 Considere o integral

$$I = \int_{-5}^{5} \frac{x^2}{1+x^2}$$

a) Determine aproximações do integral I usando as fórmulas de Newton-Cotes fechadas, I_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Comecemos por criar uma função no MatLab para calcular a função a integrar num determinado ponto, deste modo a função [funcao.m] em MatLab ficou do seguinte modo:

function $funcao = funcao(x)$
$funcao = (x^2)/(1 + x^2);$
end

De seguida pretendemos calcular os valores ω_i^n para que se possam calcular para um qualquer n, começamos por incrementar uma função [funcao2.m], tal que:

function $l = funcao2(n, i, k)$
$l = 1;$
for $j = 0 : 1 : n$
if $j \ \ = i$
$l = l * ((k - j)/(i - j));$
end
end
end

Deste modo e integrando esta função obteriamos os ω_i para um qualquer n. Para a integração criamos a função [coef.m] para determinar os coeficientes ω_i^n:

function $c = coef(n, i)$
syms k
$c = int(funcao2(n, i, k), 0, n);$
end

Deste modo e após o calculo de todas estes passos podemos então calcular concretamente I_n, para este calculo final criamos a função [In2.m] do seguinte modo:

function $In2 = In2(n, a, b)$
$In2 = 0;$
$h = (b - a)/n;$
for $i = 0 : 1 : n$
$In2 = In2 + (funcao(a + i * h) * coef(n, i));$
end
$In2 = double(h * In2);$
end

n	ans
1	9.6154
2	3.2051
3	7.9186
4	7.6260
5	7.6923
6	6.1296

A anterior tabela dá-nos os valores de $In2(n, -5, 5)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, representando as aproximações do integral I usando as fórmmulas de Newton-Cotes fechadas.

b) Faça comentários sobre o que acontece a I_n quando vamos aumentando o n.

Tendo em conta que o valor do integral é 7.2532, e olhando para os valores resultantes na alínea anterior podemos pensar que os valores vão aproximar-se do valor resultado, mas a verdade é que ao aumentarmos o n na função descrita anteriormente $In2$ os valores vão afastar-se do resultado pretendido. Poddemos concluir que com o aumento do n o erro das fórmulas de Newton-Cotes fechadas é maior. O n que apresenta melhor aproximação é o $n = 7$ que apresenta um valor de 7.1010.

c) Use a fórmula composta dos trapézio para obter, se possível, uma boa aproximação do integral I.

Para implementar a fórmula dos trapázios composta criamos a função [TR.m] definida do seguinte modo:

function $TR = TR(m, a, b)$
$TR = 1/2 * (funcao(a) + funcao(b));$
$h = (b - a)/m;$
for $i = 1 : 1 : m - 1$
$TR = TR + funcao(a + h * i);$
end
$TR = h * TR;$
end

Deste modo, quando chamamos no MatLab $TR(m, -5, 5)$ variando o m o valor de $i_{1,m}$ aproxima-se cada vez mais do valor do integral, de facto, a partir de $m = 70$ o valor que surge no ecrã quando fazemos $TR(70, -5, 5)$ é 7.2532 que surge como sendo o valor real do integral I. Podemos dizer que esta fórmula nos fornece uma muito boa aproximação para o integral.

Exercício 2 Considere os polinómios de Chebyshev que podem ser escritos na forma $T_N(x) = cos(Narcocos(x))$, $N \geq 0$, definidos em $[-1, 1]$, e considere os pontos

$$x_k = cos(\pi \frac{2k + 1}{2N + 2})$$

Determine:

a) $\sum_{k=0}^{N} T_i(x_k)T_j(x_k)$, quando $i \neq j$

$$\sum_{k=0}^{N} T_i(x_k)T_j(x_k) = \sum_{k=0}^{N}[cos(i.arccos(x_k)) * cos(j.arccos(x_k))] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}[cos(i.arccos(cos(\pi\frac{2k+1}{2N+2}))) * cos(j.arccos(cos(\pi\frac{2k+1}{2N+2})))] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}[cos(i.\pi\frac{2k+1}{2N+2}) * cos(j.\pi\frac{2k+1}{2N+2})] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2}[cos(i.\pi\frac{2k+1}{2N+2} - j.\pi\frac{2k+1}{2N+2}) + cos(i.\pi\frac{2k+1}{2N+2} + j.\pi\frac{2k+1}{2N+2})] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2}[cos(\pi\frac{2k+1}{2N+2}(i-j)) + cos(\pi\frac{2k+1}{2N+2}(i+j))]$$

Não concluimos a alínea pois não conseguimos chegar a conclusão do valor do somatório, porém sabemos que o resultado seria 0

b) $\sum_{k=0}^{N} T_i(x_k)T_j(x_k)$, quando $i = j \neq 0$

Sabe-se que $i = j$ o que resulta no prouduto de duas funções iguais ou seja $T_i^2(x_k)$. Vejamos:

$$\sum_{k=0}^{N} T_i(x_k)T_j(x_k) = \sum_{k=0}^{N}[cos(i.arccos(x_k)) * cos(j.arccos(x_k))] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}[cos(i.arccos(x_k)) * cos(i.arccos(x_k))] = \sum_{k=0}^{N}[cos^2(i.arccos(x_k))] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}[cos^2(i.arccos(cos(\pi\frac{2k+1}{2N+2})))] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}[cos^2(i.\pi\frac{2k+1}{2N+2})] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}[\frac{1}{2} + cos(\frac{2j\pi\frac{2k+1}{2N+2}}{2})] =$$

$$= \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} cos(j\pi\frac{2k+1}{2N+2}) =$$

$$= \frac{N+1}{2} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{N} e^{i(j\pi\frac{2k+1}{N+1})} + e^{-i(j\pi\frac{2k+1}{N+1})} =$$

$$= \frac{N+1}{2} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{N} e^{(\frac{ij\pi 2k + ij\pi}{N+1})} + e^{(\frac{-ij\pi 2k - ij\pi}{N+1})} =$$

$$= \frac{N+1}{2} + \frac{1}{4}[e^{\frac{ij\pi}{N+1}}\sum_{k=0}^{N}(e^{\frac{ij\pi 2}{N+1}})^k + e^{\frac{-ij\pi}{N+1}}\sum_{k=0}^{N}(e^{\frac{-ij\pi 2}{N+1}})^k] =$$

$$= \frac{N+1}{2} + \frac{1}{4}[e^{\frac{ij\pi}{N+1}}\frac{e^{(\frac{ij2\pi}{N+1})^{N+1}}-1}{e^{\frac{ij2\pi}{N+1}}-1} + e^{\frac{-ij\pi}{N+1}}\frac{e^{-ij2\pi}-1}{e^{\frac{-ij2\pi}{N+1}}-1}] =$$

$$= \frac{N+1}{2} + \frac{1}{4}[e^{\frac{ij\pi}{N+1}}\frac{0}{e^{\frac{ij2\pi}{N+1}}-1} + e^{\frac{-ij\pi}{N+1}}\frac{0}{e^{\frac{-ij2\pi}{N+1}}-1} =$$

$$= \frac{N+1}{2} + \frac{1}{4}[0+0] = \frac{N+1}{2}$$

c) $\sum_{k=0}^{N} T_i(x_k)T_j(x_k)$, quando $i = j = 0$

Temos agora que $i = j = 0$, substituindo i, j na equação inicial temos:

$\sum_{k=0}^{N} T_i(x_k)T_j(x_k) = \sum_{k=0}^{N}[cos(i.arccos(x_k)) * cos(j.arccos(x_k))] =$

$= \sum_{k=0}^{N}[cos(0.arccos(x_k)) * cos(0.arccos(x_k))] = \sum_{k=0}^{N}[cos(0) * cos(0)] =$

$= \sum_{k=0}^{N}[1 * 1] = \sum_{K=0}^{N} 1 = N + 1$

Exercício 3 Usando os resultados anteriores prove que:

Uma função $f(x)$ no intervalo $[-1, 1]$ pode ser aproximada por um polinómio interpolador $P_N(x)$ de grau inferior ou igual a N, que interpola os pontos x_k definidos acima, e é representado por

$$P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j T_j(x)$$

Onde os coeficientes c_j são dados por:

$c_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f(x_k)$
$c_j = \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f(x_k) cos(j\pi \frac{2k+1}{2N+2})$, $j = 1, 2, 3, , N$

Se $P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j T_j(x)$ então temos que $P_N(x_k) = \sum_{j=0}^{N} c_j T_j(x_k)$, partindo do principio de que é um polinómio interpolador então $f(x_k) = \sum_{j=0}^{N} c_j T_j(x_k)$, vamos então desenvolver esta equação.

$f(x_k) = \sum_{j=0}^{N} c_j T_j(x_k) \Leftrightarrow T_i(x_k) f(x_k) = T_i(x_k) \sum_{j=0}^{N} c_j T_j(x_k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N}[T_i(x_k) f(x_k)] = \sum_{k=0}^{N}[T_i(x_k) \sum_{j=0}^{N} c_j T_j(x_k)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N}[T_i(x_k) f(x_k)] = \sum_{j=0}^{N}[c_j \sum_{k=0}^{N} [T_i(x_k) T_j(x_k)]]$

Se $i \neq j$ então $\sum_{k=0}^{N}[T_i(x_k)T_j(x_k)] = 0$, já se $i = j = 0$ temos que $\sum_{k=0}^{N}[T_0(x_k)T_0(x_k)] = N + 1$, por último se $i = j \neq 0$ então $\sum_{k=0}^{N}[T_i(x_k)T_j(x_k)] = \frac{N+1}{2}$.

Resumidamente temos que:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N}[T_i(x_k) f(x_k)] & = & 0 & i \neq j \\ \sum_{k=0}^{N}[T_i(x_k) f(x_k)] & = & c_i(\frac{N+1}{2}) & i = j \neq 0 \\ \sum_{k=0}^{N}[T_i(x_k) f(x_k)] & = & c_0(N + 1) & i = j = 0 \end{cases}$$