Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Fundamentos e Ensino de Álgebra

PROGRAMAÇÃO LINEAR

Trabalho realizado por:

Cati Matos
Daniela Santos
Diana Salgado
Maria Alice Martins

Professora: Maria Celeste Gouveia

" A matemática não se reduz a ciência isolada platonicamente de tudo o resto. É também um instrumento ao serviço do homem nos mais variados ramos da ciência e da técnica. O professor deve sempre ter presente este facto e tentar estabelecer, sempre que possível as conexões da matemática com outros domínios do pensamento, atendendo a que muitos dos seus alunos irão ser físicos, químicos, biólogos, geólogos, engenheiros, economistas, agrónomos ou médicos."

Sebastião e Silva

Índice

Introdução

No dia-a-dia, o Homem debate-se com problemas, levando-o a decidir ou escolher entre as alternativas viáveis. Este, por vezes, de forma inconsciente, define o problema, formula o objectivo, tem em conta as limitações com que se defronta e avalia as alternativas possíveis; só então escolhe a "melhor" via.

Quando se trata de problemas simples, apela frequentemente à intuição e à experiência, que mostram ser suficientes para a tomada de decisões. No entanto, a complexidade crescente dos problemas leva à necessidade de uma abordagem segundo uma óptica científica, o que exige o recurso a métodos (primeiro manuais e numa segunda abordagem, computacionais) que permitam tirar o maior proveito das situações.

É neste contexto que "entra" a Programação Linear. Esta aparece no programa de Matemática A do 11º ano como conteúdo obrigatório, contrariamente ao que acontecia no programa anterior, onde aparecia como conteúdo facultativo.

Neste trabalho, vamos começar por uma breve introdução histórica para, de seguida, resolver analítica e geometricamente problemas de Programação Linear envolvendo duas variáveis, pois o seu tratamento é simples e preconizado no programa de Matemática A. Poderíamos também resolver geometricamente problemas com três variáveis, no entanto não o faremos. Aproveitamos sim, para os resolver utilizando o Método Simplex (que não é dado no Ensino Secundário pois é muito complexo e normalmente só é estudado em Matemática Aplicada ou Computacional) e deste modo, trabalharmos o cálculo algébrico e resolver problemas com muitas variáveis.

Nota Histórica

À semelhança de outros ramos científicos, a Programação Linear tem as suas raízes na Antiguidade Clássica ou talvez na Antiguidade Oriental, uma vez que a optimização é um tema que sempre preocupou o Homem. Euclides, (século III a. C.) no seu livro III, tentava encontrar a maior e a menor distância de um ponto a uma circunferência, e no seu livro IV descreveu uma forma de obter um paralelogramo de área máxima com um dado perímetro.

Euclides

Durante os séculos XVII e XVIII, desenvolveram-se métodos de cálculo que permitiram resolver os problemas de optimização, como por exemplo, problemas de extremos condicionados com restrições de igualdade, sendo notáveis os contributos dados por Newton, Fermat, Leibniz, Lagrange e Bernoulli.

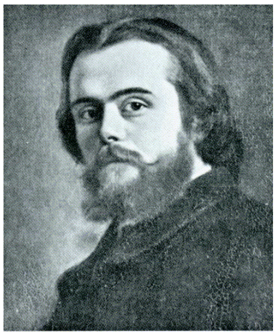
Cournot

Cournot é considerado um dos percursores da programação matemática uma vez que o seu estudo se baseou na igualdade entre receita marginal e custo marginal, logo implicitamente, na determinação do ponto de equilíbrio que origina o lucro máximo.

Quesnay, em 1759, publica o *Tableau Economique* que pode ser considerado a primeira grande tentativa de modelizar a economia. Surge assim, o primeiro marco no caminho dos modelos de programação ao macroeconómico.

Quesnay

O Sistema de Equilíbrio Geral, publicado em 1874 por Walras, representa, em termos teóricos, um considerável avanço na procura da melhor forma de interpretar a economia como um todo. Na sequência dos trabalhos realizados sob a égide do governo dos Estados Unidos da América, Leontief apresenta, em 1936, o modelo "input-output" para a economia americana. Este é considerado o segundo marco.



Walras

Em 1937, é publicado por Von Neumann, *A Model of General Economic Equilibrium* onde é formulado o modelo de Programação Linear dinâmica, em que admite métodos alternativos de produção simples ou conjunta.

Kantorovich, em 1939, formulou rigorosamente um problema de Programação Linear no trabalho *Métodos Matemáticos de Organização e Planeamento da Produção*, mas não apresentou um algoritmo de resolução. No entanto, este trabalho, não teve

Von Neumann

o reconhecimento que merecia, vindo a ser, só mais tarde, efectivamente apreciado.

O grande salto da Programação Linear é dado através das aplicações em problemas de transportes na década de 40 (em particular, pelas Forças Armadas durante a Segunda Guerra Mundial).

George Dantzig trabalhava como civil, no Pentágono, onde exercia funções de conselheiro matemático para a administração da Força Aérea Norte Americana, trabalhando no projecto SCOOP (Scientific Computation of Optimun Programs). Por inerência do respectivo serviço, Dantzig era frequentemente chamado para resolver problemas de planeamento que envolviam a distribuição de pessoal, dinheiros, aviões e outros recursos de custo efectivo. Foi no Pentágono que Dantzig recebeu, dos seus colegas D. Hitchcock e M. Wood, o desafio de tentar mecanizar o processo de planeamento. Como a maioria dos problemas diziam respeito a questões de Economia, de uma ou de outra forma, Dantzig procurou aconselhar-se com o economista Tjalling Koopmans para os resolver (admitindo que os economistas tivessem já desenvolvido técnicas de resolução). Porém, com grande surpresa sua, Koopmans confessou-lhe que os economistas também não tinham quaisquer procedimentos para encontrarem sistematicamente a solução de tais problemas.

George Dantzig

No Verão de 1947, Dantzig propôs o *Método Simplex* que tornou possível a solução de problemas de optimização de vários tipos: transportes, produção, locação de recursos e problemas de escalonamento. Um ano mais tarde, Dantzig e Koopmans encontraram-se na praia de Santa Mónica e Koopmans disse: «Why not shorten "Programming in a Linear Structure" to "Linear Programming"?» ao que Dantzig respondeu: «That's it! From now on that will be its name.». Nasceu assim a designação de *Programação Linear*.

Com a apresentação do *Método Simplex,* a Programação Matemática, e em particular a Programação Linear, teve um grande impulso. Foi a partir de então que as suas aplicações não cessaram, envolvendo valiosas contribuições de economistas e matemáticos. O desenvolvimento da Informática é outro dos factores que tem contribuído para a evolução acelerada desta ciência nas últimas décadas.

Quatro anos depois (1951), H. W. Kuhn e A. W. Tucker estendem os resultados de Lagrange aos sistemas de inequações, e apresentam o trabalho *Non Linear Programming* no *Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, que constituiu um marco fundamental da Programação Matemática.

Note-se que a Programação Linear beneficiou também das valiosas contribuições de vários matemáticos, sob o ponto de vista computacional.

Podemos assim afirmar que a Programação Linear faz parte de um vasto campo da Matemática cuja importância e aplicações não cessarão de crescer durante este século.

Definição e objectivos da Programação Linear

A Programação Linear pode ser considerada uma ciência voltada para a resolução de problemas reais, em que se procura trazer para o campo de tomada de decisões (Economia, Medicina, Agricultura, etc.) os métodos próprios de outras áreas científicas; refere-se a um conjunto de métodos cujo objectivo principal é tirar o maior proveito possível de sistemas económicos, industriais, militares, …, cuja estrutura possa ser definida matematicamente.

Um Programa Linear é pois, um problema de optimização em que a função que se pretende optimizar (função objectivo) é linear e está sujeita a restrições (geralmente inequações lineares) que redefinem o seu domínio, ou seja, num problema de Programação Linear pretende-se determinar o óptimo de uma função linear num conjunto convexo (um conjunto X diz-se convexo se dados dois quaisquer pontos de X o segmento de recta que os une está contido em X) que resulta da intersecção de inequações lineares.

Num Programa Linear, a optimização poderá ser maximização ou minimização da função objectivo, e as restrições podem ser do tipo $\leq$, =, $\geq$. As variáveis reais podem ser não negativas e/ou assumir qualquer valor real.

Onde se aplica?

Os domínios de aplicação da Programação Linear são vastíssimos, podendo citar-se fundamentalmente os seguintes:

_ Economia e especialmente Economia de Empresa, onde se situam as aplicações mais férteis e os estímulos mais fortes para os desenvolvimentos teóricos da Programação Linear;

_ Matemática, onde a Programação Linear tem impulsionado a obtenção de importantes resultados teóricos e o aperfeiçoamento das técnicas de análise numérica;

_ Militar, onde as aplicações são numerosas mas normalmente pouco divulgadas por razões de segurança.

Como exemplos destas áreas de aplicação podemos referir mais explicitamente:

■ Gestão de empresas (determinação das quantidades a produzir dos diferentes produtos da empresa de acordo com os recursos disponíveis, as condições tecnológicas existentes e a situação do mercado.);

■ Problemas de Transportes (conhecido o custo de transporte de uma unidade de produto de cada origem para cada destino, procede-se à determinação do plano de distribuição que torna mínimo o custo total de transporte.);

■ «Trim-Loss» (determinação do número de unidades a cortar com determinadas dimensões de modo a minimizar os desperdícios envolvidos face às dimensões da produção. Exemplos: indústria do papel e do cartão, siderúrgica, têxtil, confecções, vidreira, …);

■ Estrutura financeira dos bancos (o banco pretende estabelecer a estrutura do activo que maximiza o seu lucro global, sabendo que devem ser respeitados os condicionalismos legais e de gestão que asseguram o equilíbrio financeiro.);

■ Problemas de Mistura (pretende-se obter, com custo mínimo ou lucro máximo, um ou vários produtos, a satisfazer certos requisitos técnicos, através de vários ingredientes possuidores em grau diferente dessas características técnicas. Exemplo: rações para animais, adubos, produtos alimentares e farmacêuticos, ligas metálicas, tintas, gasolinas.);

■ Planeamento Agrícola (o problema consiste em afectar recursos escassos, tais como superfície arável, mão-de-obra, água, etc…, à produção de diversos bens de modo a maximizar o resultado de exploração.).

A quem se destina?

Destina-se, essencialmente, a administradores, engenheiros, técnicos, …, com o objectivo de, por exemplo, minimizar custos ou maximizar lucros.

Definições

► Função Objectivo_ é uma função linear, que vamos pretender optimizar, isto é, maximizar ou minimizar;

► Restrições_ consiste em relacionar cada actividade e recursos utilizados e respeitar a disponibilidade de recursos. Muitas das vezes, as restrições são escritas através de inequações ou equações lineares.

Usualmente são considerados dois tipos de restrições:

• Restrições de não negatividade_ muitas das vezes, as variáveis que entram na formulação do problema não podem assumir valores negativos. Por isso, em geral, a não negatividade das variáveis é considerada uma restrição natural, que acontece pelo facto de muitas das actividades só poderem ser executadas a níveis não negativos;

• Restrições do problema ou restrições propriamente ditas_ aquando da formulação de um problema deve elaborar-se uma lista de todos os itens que impliquem restrições às possíveis soluções;

► Variável slack (ou variável de folga)_ é a variável que utilizamos quando queremos transformar uma inequação numa equação. Por exemplo, temos a seguinte restrição:

$$17 - 5x - 3y \geq 0;$$

faça-se $z = 17 - 5x - 3y$

então vem $5x + 3y + z = 17$ com $z \geq 0$ onde z é a variável slack;

► Variáveis de decisão_ são os valores de um número n de decisões a serem tomadas e designam-se por $x_1, \ldots, x_n$ e que estão interrelacionadas pela Função Objectivo;

► Forma Canónica_ um modelo de Programação Linear escrito na forma canónica, tem as seguintes características:

• as variáveis são todas não negativas;

• as restrições são todas desigualdades lineares do tipo $ax + by \leq c$ ou $ax + by \geq c$ (a, b, c constantes), com excepção das que dizem respeito à não negatividade das variáveis;

• a optimização pretendida é a maximização da função objectivo;

► Forma Padrão (ou Standard)_ quando pretendemos escrever um modelo de Programação Linear em forma padrão, temos de obedecer às seguintes condições:

• as variáveis são todas não negativas;
• todas as restrições são equações lineares, com excepção das que dizem respeito à não negatividade;
• os termos independentes de cada uma das restrições propriamente ditas são constantes reais não negativas;
• considera-se indiferentemente a maximização ou a minimização da função objectivo;

► Solução possível ou admissível_ é toda a solução que satisfaz as restrições do problema e as restrições da não negatividade. Note-se que uma solução possível não precisa optimizar a função objectivo, e frequentemente há infinitas soluções possíveis;

► Solução ilimitada_ é aquela em que a função objectivo pode crescer (caso da maximização) ou decrescer (caso da minimização), indefinidamente, atendendo a todas as restrições do problema, e portanto, não existe um valor máximo ou mínimo finito para a função objectivo;

► Solução óptima_ havendo um domínio de soluções possíveis e não havendo solução ilimitada, solução óptima é a solução possível que optimiza a função objectivo. Nesse caso, poderá haver uma, várias ou infinitas soluções óptimas;

► Solução impossível_ é aquela em que não há qualquer ponto que obedeça ao conjunto de restrições;

► Programa Linear_ é um problema de Programação Linear onde se pretende determinar o óptimo de uma função linear num conjunto convexo definido pelas restrições.

Hipóteses do modelo de Programação Linear

Como qualquer modelo em geral, o modelo de Programação Linear não se aplica a todos os casos e situações. A sua aplicação está condicionada pela verificação de alguns postulados ou hipóteses que seguidamente se explicitam.

i) Proporcionalidade

Em cada actividade, as quantidades de bens que entram e saem são sempre proporcionais ao nível da mesma (o que elimina a possibilidade de substituição entre factores e produtos).

ii) Divisibilidade e não negatividade

O nível de uma actividade pode assumir qualquer valor positivo de dado intervalo, o que equivale a supor que os bens são perfeitamente divisíveis, isto é, susceptíveis de variar em quantidades infinitesimais. Se o interesse recair sobre soluções inteiras (por exemplo, elaboração de escalas de pessoal de transportes), tem de se recorrer à Programação Linear Inteira.

iii) Aditividade

Dadas N actividades, o resultado do emprego conjunto das mesmas é a sua adição, isto é, não existem economias ou deseconomias (externas) pelo facto de se substituir N actividades pela actividade soma das mesmas.

Conjugando esta hipótese com i), tem-se uma nova actividade resultante da combinação das actividades.

iv) Linearidade da função objectivo

Cada actividade contribui para o objectivo económico perseguido pelo sistema (por exemplo, cada actividade pode ter, e normalmente tem, associado um certo lucro ou um certo custo). Esta hipótese indica que essa contribuição para a função económica é proporcional ao nível da actividade. A contribuição total é a soma das contribuições de todas as actividades.

Embora a verificação destas hipóteses pareça reduzir consideravelmente o campo de aplicações da Programação Linear, a experiência tem revelado que inúmeras situações reais podem ser adequadamente descritas por modelos lineares. Mesmo que tal não seja verificado aproximadamente, existem técnicas que têm permitido "converter", com sucesso, essas situações noutras equivalentes e susceptíveis de tratamento linear.

Exemplo 1

A Direcção de Marketing do IKEA sugere o lançamento de um novo modelo de secretária e de estante em substituição dos modelos actuais. Aquela Direcção não vê dificuldade de colocação no mercado para as estantes enquanto que aconselha que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades.

Após estudos levados a cabo pela Direcção de Produção, conclui-se que:

_A disponibilidade mensal do Departamento de Estampagem é de 720 horas-máquina;

_ A disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de 880 horas-homem;

_ Cada secretária necessita de 2 horas-máquina de Estampagem e 4 horas-homem de Montagem e Acabamento;

_ Cada estante necessita de 4 horas-máquina de Estampagem e 4 horas-homem de Montagem e Acabamento.

Por outro lado, as margens brutas unitárias estimadas são de 60 euros para as secretárias e 30 euros para as estantes.

A empresa pretende determinar o plano de produção mensal para estes novos modelos que maximiza a margem bruta.

Formalização

Sejam x e y o número de secretárias e de estantes dos novos modelos, respectivamente, a produzir mensalmente e z a margem bruta total no mesmo período. Tem-se, evidentemente, x e y como variáveis de decisão e como objectivo determinar valores para estas variáveis que maximizem

$$z = 6x + 3y \text{ (em 10 euros),}$$

tendo em conta as restrições impostas pelas limitações da capacidade produtiva e do mercado.

Relativamente, ao Departamento de Estampagem, sabe-se que:

_ Cada secretária necessita de 2 horas-máquina, pelo que o número total de horas-máquina necessárias à produção de x secretárias é 2x;

_ Cada estante necessita de 4 horas-máquina, pelo que o número total de horas-máquina necessárias à produção de y estantes é 4y;

_ A disponibilidade mensal é de 720 horas-máquina.

Então a restrição relativa a este Departamento é:

Tempo total de máquina gasto na produção de secretárias	Mais	Tempo total de máquina gasto na produção de estantes	Não pode exceder	Disponibilidade em Horas-Máquina

que se traduz algebricamente na desigualdade linear

$$2x + 4y \leq 720.$$

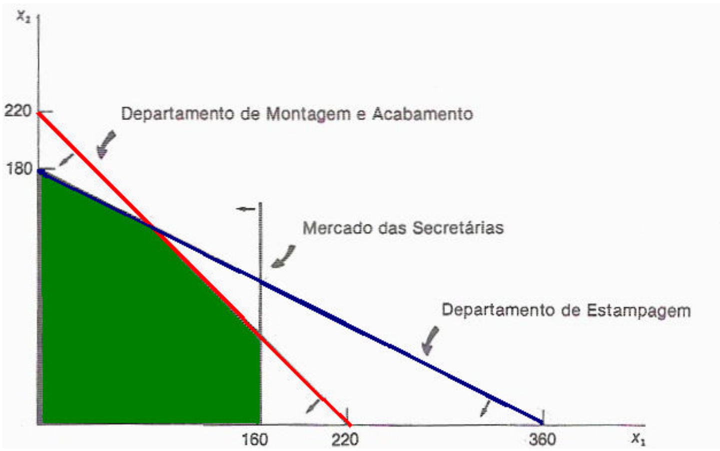


Figura 1.1: conjunto das soluções admissíveis do exemplo1.

Analogamente, tem-se para o Departamento de Montagem e Acabamento:

$$4x + 4y \leq 880.$$

No que diz respeito ao mercado, a restrição traduz-se por:

$$x \leq 160.$$

Para além destas restrições, tem-se ainda

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0,$$

pois não fazem sentido produções negativas.

Em síntese, o problema consiste em escolher x e y por forma a

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = 6x + 3y \\ \text{sujeito a} & 2x + 4y \leq 720 \\ & 4x + 4y \leq 880 \\ & x \leq 160 \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

Construa-se então um sistema de eixos cartesianos x_oy. O primeiro passo consiste em identificar os valores de x e y que satisfaçam todas as restrições.

No que diz respeito às condições de não negatividade, elas indicam que (x, y) se encontra no primeiro quadrante. A restrição $x \leq 160$ significa que (x, y) não se encontra à direita da recta $x = 160$.

As restrições $2x + 4y \leq 720$ e $4x + 4y \leq 880$ impõem que (x, y) se encontre abaixo ou sobre as rectas $2x + 4y = 720$ e $4x + 4y = 880$. O resultado final encontra-se na figura 1.1, onde a região a verde indica o conjunto dos pontos que satisfazem todas as restrições (conjunto das soluções admissíveis).

Por último, procure(m)-se o(s) ponto(s) situado(s) nesta região que maximiza(m) o valor de $z = 6x + 3y$. Nesta fase da exposição vai proceder-se por tentativas; mais adiante se enunciará uma regra prática que permite resolver esta questão duma forma quase automática. O processo baseia-se na representação gráfica da recta $6x + 3y = k$ (com k constante) para três valores de k.

Comece-se, por exemplo, por representar no gráfico as rectas $6x + 3y = 300$ e $6x + 3y = 600$; a intersecção de cada uma destas rectas com o conjunto das soluções admissíveis indica o conjunto dos planos de fabrico que possibilita a mesma margem bruta (dada por k). A segunda recta, para além de ser paralela à primeira, traduz o valor superior para z (600) e encontra-se mais afastada da origem; portanto, o procedimento consiste em traçar uma terceira recta paralela que contenha pelo menos um ponto da região admissível e esteja, neste caso, o mais distante da origem (por traduzir o maior valor para z).

Do exposto resulta então a seguinte regra prática: *Trace-se uma qualquer recta de nível e desloque-se paralelamente a si própria, no sentido do crescimento de z até ao(s) último(s) ponto(s) de contacto com a região admissível.*

Procedendo de acordo com esta regra, a recta escolhida $6x + 3y = 1140$, passa no ponto (160, 60), conforme figura 1.2, pelo que a solução pretendida $x^* = 160$ e $y^* = 60$, valores que dão, respectivamente, o número de secretárias e estantes a produzir por mês pelo IKEA. Deste programa de produção resulta para a empresa uma margem bruta mensal de 11400 euros.

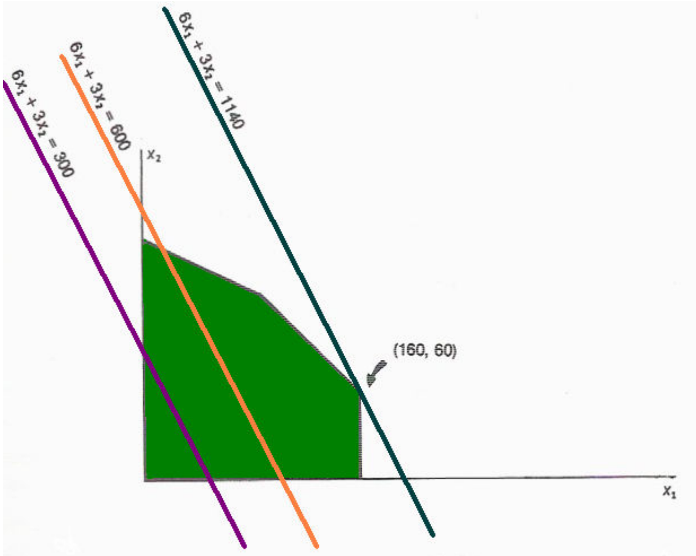


Figura 1.2: solução óptima do exemplo1.

Exemplo 2

Uma das tarefas propostas para a "Quinta das Celebridades" consiste em determinar as quantidades de cada tipo de ração que devem ser dadas diariamente a cada animal de forma a conseguir uma certa qualidade nutritiva a um custo mínimo.

Os dados relativos ao custo de cada tipo de ração, às quantidades mínimas diárias de ingredientes nutritivos básicos a fornecer a cada animal, bem como às quantidades destes existentes em cada tipo de ração (g/kg) constam no quadro seguinte:

Ração / Ing. Nutritivos	Granulado	Farinha	Quantidade mínima requerida
Hidratos de carbono	20	50	200
Vitaminas	50	10	150
Proteínas	30	30	210
Custo (cênts/kg)	10	5	

Tabela 1: Dados técnico-económicos.

Formalização

Designemos, respectivamente, por x e y, as quantidades em quilogramas de granulado e farinha a fornecer diariamente a cada animal.

O custo total (em euros) a suportar diariamente com a alimentação de cada animal é pois

$$z = 10x + 5y.$$

O objectivo dos concorrentes é minimizar o custo total, sabendo que as suas possibilidades de escolha estão limitadas pelas seguintes restrições relativas ao regime alimentar de cada animal:

$$20x + 50y \geq 200.$$

O primeiro membro desta desigualdade exprime a quantidade (g) de hidratos de carbono a fornecer diariamente. O segundo membro exprime, por sua vez, a quantidade quotidiana mínima necessária destes nutrientes.

Analogamente para as vitaminas,

$$50x + 10y \geq 150,$$

e para as proteínas,

$$30x + 30y \geq 210.$$

Sabendo que a quantidade de cada ração a fornecer diariamente é não negativa, isto é, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, tem-se, finalmente, o modelo de Programação Linear que permite estabelecer a "dieta" dos animais:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z = 10x + 5y \\ \text{sujeito a} & 20x + 50y \geq 200 \\ & 50x + 10y \geq 150 \\ & 30x + 30y \geq 210 \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

O conjunto das soluções admissíveis encontra-se representado na figura 1.3 e foi obtido por procedimento análogo ao utilizado para o exemplo anterior.

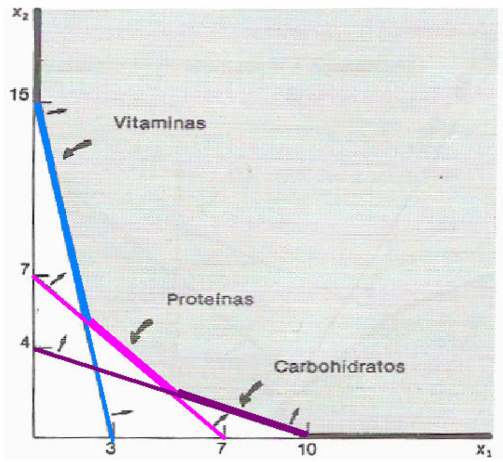


Figura 1.3: conjunto das soluções admissíveis do exemplo2.

O(s) ponto(s) que minimiza(m) o valor de $z = 10x + 5y$ obtém-se por aplicação da regra já enunciada para a resolução do problema anterior (exemplo1), devendo ter-se em atenção que o objectivo neste problema é minimizar o valor da Função Objectivo. Assim, traça-se uma qualquer recta de nível, por exemplo $10x + 5y = 80$, e desloque-se paralelamente a si própria, no sentido do decrescimento de z, até ao(s) último(s) ponto(s) de contacto com a região admissível.

Procedendo desta forma, é fácil concluir que a solução pretendida é $x^*= 2$ e $y^*= 5$ (figura 1.4), valores que dão, respectivamente, as quantidades (em quilogramas) de granulado e farinha a fornecer diariamente a cada animal. Desta "dieta" resulta para a quinta um custo de alimentação diário com cada animal de 45 cêntimos.

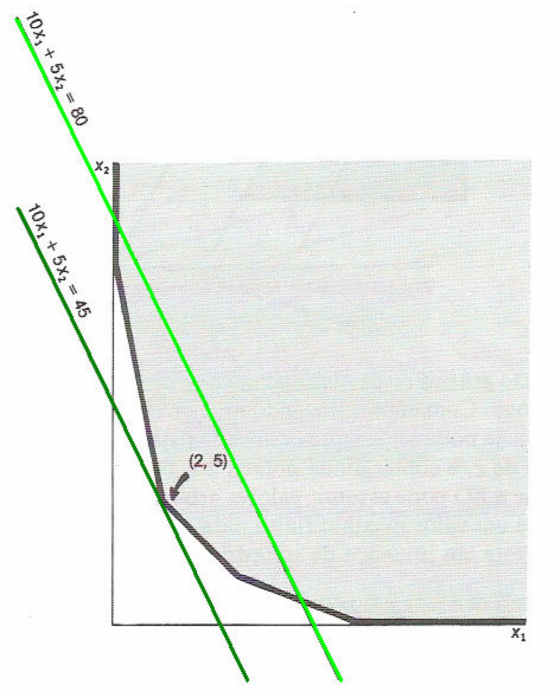


Figura 1.4: solução óptima do exemplo2.

Casos particulares

Nos exemplos 1 e 2, as soluções óptimas são únicas (ver figuras 1.2 e 1.4). Contudo, nem sempre assim acontece. Com efeito, considere-se o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = 2x + y \\ \text{sujeito a} & 3x + 4y \leq 12 \\ & 4x + 2y \leq 10 \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

A representação gráfica deste problema encontra-se na figura 1.5. Conclui-se, sem dificuldade, que z = 5 é o valor máximo da Função Objectivo. Igualmente se conclui que quer o ponto extremo A quer o ponto extremo B são soluções óptimas do problema; por outras palavras, neste caso, dois pontos extremos conduzem ao mesmo valor (máximo) para a Função Objectivo. Mais, qualquer ponto da aresta AB é também solução óptima, dado que a recta de nível z = 5 assenta sobre aquela aresta; existe pois uma infinidade de soluções óptimas.

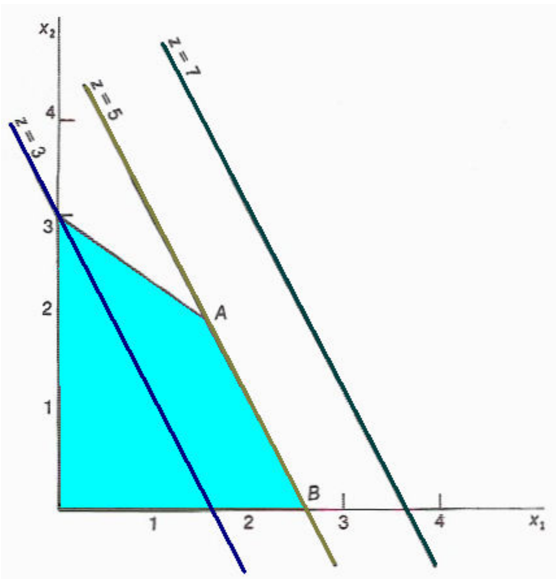


Figura 1.5: soluções óptimas alternativas.

Quando um problema de Programação Linear possui mais do que uma solução diz-se que se está em presença de soluções óptimas alternativas; isto significa que o lucro máximo pode ser obtido através de várias (infinitas) combinações dos recursos.

Em qualquer dos problemas anteriores pode afirmar-se que se está perante problemas de Programação Linear "bem comportados". Existe contudo a possibilidade de situações "anómalas" que devem ser consideradas quando, como é o caso, se pretende apresentar uma técnica capaz de resolver qualquer problema de Programação Linear.

Considere-se o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = 2x + 3y \\ \text{sujeito a} & 2x + 2y \geq 6 \\ & -x + y \leq 1 \\ & y \leq 3 \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

A representação gráfica respectiva encontra-se na figura 1.6. Está-se em presença de uma situação nova. Com efeito, traçando uma qualquer recta de nível do plano definido pela Função Objectivo, aquela pode ser sempre deslocada paralelamente a si própria, no sentido do crescimento de z, e conter ainda pontos do conjunto das soluções admissíveis. Conclui-se pois que a Função Objectivo pode assumir valores arbitrariamente grandes e, consequentemente, não existe um valor máximo finito para z. Sempre que se verifica esta situação, diz-se que se está em presença de solução não limitada.

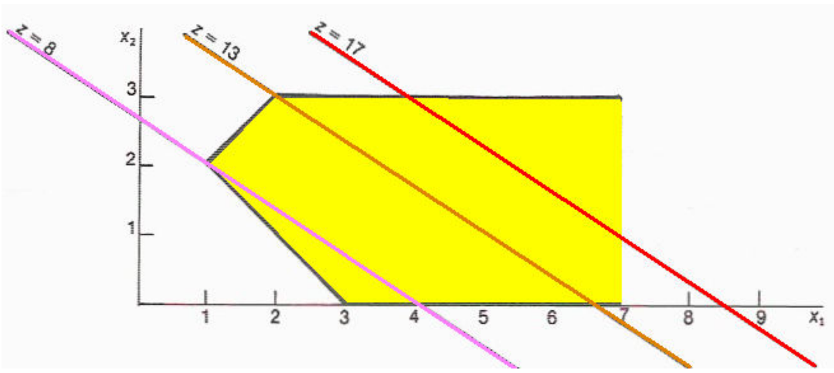


Figura 1.6: solução não limitada.

Deve contudo salientar-se que o facto do conjunto das soluções admissíveis ser não limitado não implica necessariamente que a solução seja não limitada (isto é, com variáveis a poderem assumir valores arbitrariamente grandes com $z \to \infty$). Está nesta situação o exemplo 2 (ver figura 1.4) e o seguinte problema:

maximizar $z = -x + 3y$
sujeito a $2x + 2y \geq 6$
$-x + y \leq 1$
$y \leq 3$
$x, y \geq 0.$

A representação gráfica respectiva encontra-se na figura 1.7.

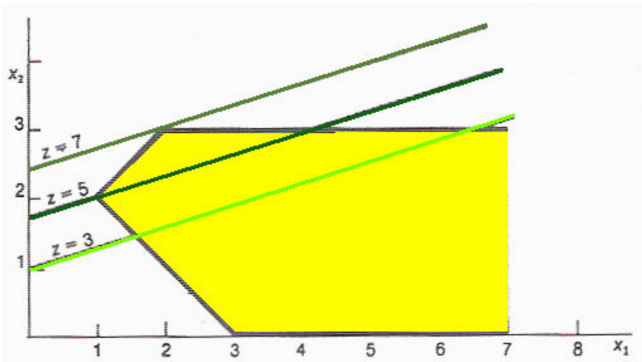


Figura 1.7: solução óptima com conjunto não limitado.

Pode ainda acontecer que o conjunto das soluções seja não limitado e o valor óptimo de z seja finito com variáveis a poderem assumir valores arbitrariamente grandes na solução óptima. Neste caso, existem soluções óptimas alternativas, como se ilustra através do seguinte problema:

maximizar $z = -2x + 4y$
sujeito a $-x + y \leq 1$
$x - 2y \geq -4$
$x, y \geq 0.$

A representação gráfica encontra-se na figura 1.8. O valor máximo da Função Objectivo é 8. Mais, qualquer ponto (x, y) da aresta do conjunto das soluções admissíveis que se "prolonga" até infinito conduz a z = 8 e é portanto solução óptima do problema. É evidente, como se pode ver pela figura 1.8, que embora a Função Objectivo não possa exceder o valor 8, as variáveis x e y podem assumir valores arbitrariamente grandes.

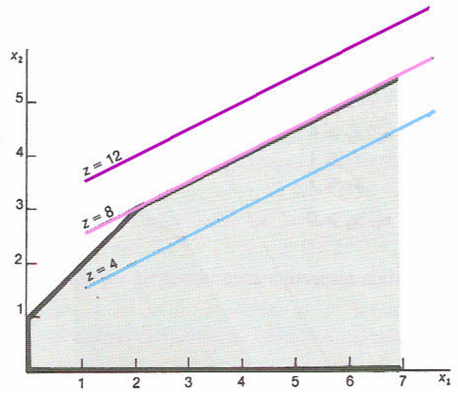


Figura 1.8: valor óptimo finito da Função Objectivo finito, com variáveis podendo assumir valores arbitrariamente grandes.

Outra situação "anómala" que pode surgir, normalmente derivada de erros de formalização, é a não existência de qualquer solução admissível. Isto pode acontecer por não existirem valores das variáveis a satisfazerem as restrições do problema ou as condições de não negatividade, ou ambas simultaneamente. Neste caso, o problema diz-se impossível. O exemplo seguinte ilustra esta situação:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = x + 2y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \geq 3 \\ & 2x + y \leq 2 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

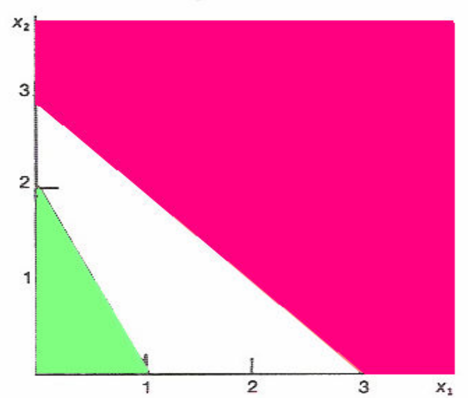


Figura 1.9: problema impossível.

Apesar de já termos apresentado anteriormente um problema de maximização, consideramos importante resolver, de seguida, um outro que visa ir ao encontro dos "problemas-tipo" que geralmente aparecem nos manuais de Matemática A do 11º ano.

EXEMPLO 3

Para angariarem fundos para o Carro da "Queima das Fitas", os alunos do 3ºano de Matemática optaram por vender 300 t-shirts e 600 esferográficas. Para tal, decidiram fazer dois tipos de lotes:

tipo A: uma t-shirt e uma esferográfica;
tipo B: duas t-shirts e cinco esferográficas.

Os lotes do tipo A foram vendidos a 8€ e os do tipo B a 18€.

Quantos lotes de cada tipo convém formar para obter o lucro máximo com a sua venda?

Resolução: Tal como já foi mencionado anteriormente, o método da Programação Linear consiste em procurar a solução óptima de um problema sendo satisfeitas várias condições.

As equações e inequações utilizadas são do 1ºgrau (daí a palavra "linear").

O problema que vamos resolver de seguida é um exemplo simplificado de outros problemas idênticos que, frequentemente, apresentam uma complexidade que exige a resolução por via computacional.

Há 300 t-shirts e 600 esferográficas.

Comecemos por identificar as incógnitas do problema que são:

x, número de lotes de tipo A
y, número de lotes de tipo B

Graficamente, x e y podem ser tomados, respectivamente, como coordenadas de um ponto.

_Organizemos os dados numa tabela para podermos relacioná-los mais facilmente:

	Número de lotes	Número de t-shirts	Número de esferográficas	Lucro
Tipo A	x	x	x	8x
Tipo B	y	2y	5y	18y
Total	x + y	x + 2y	x + 5y	8x + 18y

Tabela 2: Dados do problema.

_ O problema tem restrições. Vejamos quais:

1) O número de lotes de cada tipo é não negativo, ou seja, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, com x e y inteiros. Geometricamente, estas condições indicam que só nos interessam pontos do primeiro quadrante com coordenadas inteiras.

2) O número de t-shirts não pode ser superior a 300, isto é, $x + 2y \leq 300$. Geometricamente, isto significa que dos pontos escolhidos anteriormente, só nos interessam os pontos do primeiro quadrante situados sobre ou abaixo da recta de equação:

$$2y = 300 - x$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 150 - 1/2x$$

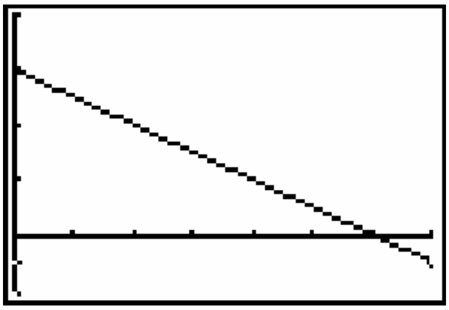


Figura 1.10: representação da recta y = 150 – 1/2x.

3) O número de esferográficas não pode ser superior a 600, isto é, $x + 5y \leq 600$ o que geometricamente significa que, dos pontos seleccionados, só nos interessam os situados sobre ou abaixo da recta de equação

$$5y = 600 - x$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 120 - 1/5x.$$

Passemos, então à representação desta recta:

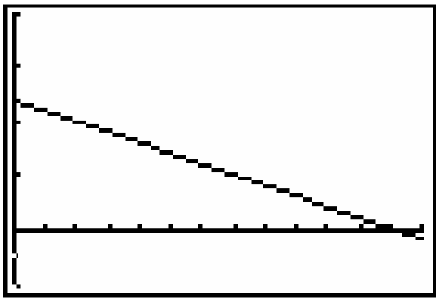


Figura 1.11: representação da recta y = 120 – 1/5x.

Os pontos que obedecem a todas as condições impostas chamam-se admissíveis (neste caso, são os pontos de coordenadas inteiras assinalados no interior do quadrilátero ou sobre os seus lados).

O conjunto dos pontos admissíveis é chamado região de validez. Só nesta região poderemos encontrar a solução óptima.

Desta região de validez fazem parte os vértices do polígono que a limita. Esses vértices devem ser determinados com cuidado sendo, por vezes, difícil identificar as suas coordenadas pelo processo gráfico. Devemos, então, determiná-los algebricamente.

$$\begin{cases} x + 2y = 300 \\ x + 5y = 600 \end{cases} \square \begin{cases} x = -2y + 300 \\ x + 5y = 600 \end{cases} \square \begin{cases} x = -2y + 300 \\ -2y + 300 + 5y = 600 \end{cases} \square$$

$$\begin{cases} x = -2y + 300 \\ 3y = 300 \end{cases} \square \begin{cases} x = 100 \\ y = 100 \end{cases}$$

Os vértices do polígono são então os pontos de coordenadas: (0, 120), (100, 100), (300, 0) e (0, 0).

Qual a função objectivo?

O lucro.

Como cada lote do tipo A custa 8€ e do tipo B custa 18€, a função linear (L) expressa-se por

$$L = 8x + 18y \qquad (1)$$

Pretende-se maximizar esta expressão, isto é, determinar os valores de x e de y que tornam máxima a função $L = 8x + 18y$, designada por Função Objectivo.

A igualdade (1) pode ainda ser expressa por:

$$y = - 8/ 18x + L/18$$

Estamos perante uma família de rectas paralelas, de declive -8/18 e ordenada na origem L/18.

Tracemos uma recta dessa família, por exemplo, fazendo L = 680 obtém-se então a recta de equação $y = - 8/18x + 40$.

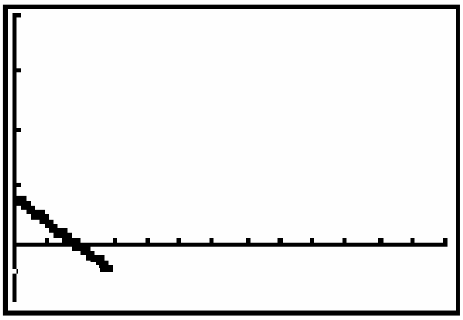


Figura 1.12: representação da recta $y = - 8/18x + 40$.

Todas as outras rectas da família são paralelas a esta e o valor de L cresce quando se desloca a recta paralelamente a si própria, da esquerda para a direita.

Achar a solução óptima equivale a determinar a recta com maior ordenada na origem que intersecta o polígono.

A solução (x, y) procurada é um dos vértices do polígono.

Como a solução (0,0) é eliminada desde o início, decide-se analiticamente qual dos outros é a solução procurada:

$8 \times 0 + 18 \times 120 = 2160$

$8 \times 100 + 18 \times 100 = 2600$

$8 \times 300 + 18 \times 0 = 2400$

Verificamos então que (100, 100) é a solução óptima.

Para resolvermos o problema graficamente, devemos deslocar a recta paralelamente a si própria, de modo a passar por cada um dos vértices do polígono_ região de validez_ verificando em qual deles a recta adquire maior ordenada na origem.

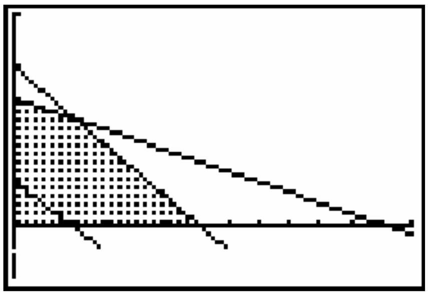


Figura 1.13: representação da região de validez.

Neste caso, isso acontece quando a recta passa em (100, 100). Os elementos do Carro concluíram, que devem ser feitos 100 lotes do tipo A e 100 lotes do tipo B, obtendo-se, assim, um lucro de 2600 euros.

Está encontrada a solução do problema.

2ª SITUAÇÃO:

E se os preços dos lotes fossem outros?

A Tesoureira argumentou que se poderiam mudar os preços dos lotes sendo o lote do tipo A vendido a 4€ e o lote do tipo B a 20€. Todas as restrições anteriores se mantêm, mudando apenas a Função Objectivo que passa a ser

$$L = 4x + 20y.$$

Qual será agora a solução óptima?

Ora, $y = -1/5x + L/20$.

Faça-se, por exemplo, $L = 2000$.

Obtém-se então, $y = - 1/5x + 100$.

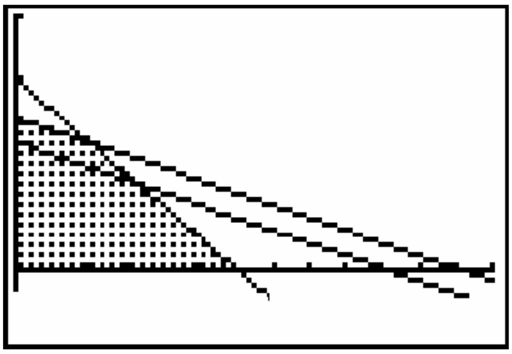


Figura 1.14: representação da região de validez e da recta y = – 1/5x + 100.

E façamo-la deslocar-se paralelamente a si própria de baixo para cima, procurando a paralela em que L é máximo.

Verifica-se que vai coincidir com a recta de equação x + 5y = 600 já traçada. Aí, a recta tem a maior ordenada na origem o que corresponde ao valor máximo de lucro.

Mas, neste caso, observando o gráfico, há mais pontos admissíveis em que L é máximo:

(5, 119), (10, 118), (15, 117), (20, 116), ..., (100, 100).

O conjunto destes pontos é a solução óptima. Isto é, ou se fazem 5 lotes de tipo A e 119 lotes do tipo B, ou 20 lotes do tipo A e 116 de tipo B, etc. Obtendo-se sempre 600 euros de lucro.

3ª SITUAÇÃO:

Atendendo ao notável decréscimo do lucro, o presidente do Carro apresentou uma nova proposta de preços:

E se cada lote A for vendido a 10€ e cada lote B a 20€?

A Função Objectivo é agora:

$$L = 10x + 20y.$$

Tracemos, por exemplo, a recta de equação 10x + 20y = 4000 que corresponde à recta y = 200 – 1/2x. Fazendo com que deslize até encontrar a região de validez, verificamos que isso acontece nos pontos (100, 100), (102, 99), ..., (300, 0).

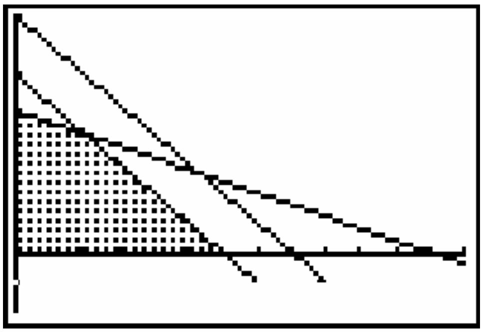


Figura 1.15: representação da região de validez e da recta y = 200 – 1/2x.

Deviam então fazer-se 100 lotes do tipo A e 100 lotes do tipo B, ou 102 lotes do tipo A e 99 do tipo B, …, ou 300 do tipo A e nenhum do tipo B e o lucro conseguido seria de 3000€.

Durante a reunião, foram analisadas as diferentes hipóteses que foram propostas e as soluções encontradas, ficando decidido em acta que a terceira situação é a que dará maior lucro, estando postas de parte a primeira e a segunda hipóteses.

SINTETIZANDO…

O fundamental da resolução do problema consiste em:

_ identificar as incógnitas x e y;

_ exprimir as várias restrições por equações ou inequações lineares em função de x e y, (graficamente, essas condições representam rectas ou semiplanos);

_ efectuar a sua conjunção, o que significa determinar graficamente a intersecção dos conjuntos por elas definidos e delimitar uma região de validez onde se situam os pontos admissíveis;

_ algebricamente, devemos utilizar as equações definidas pelas restrições para determinar as coordenadas dos pontos de intersecção das rectas duas a duas e, assim, obter os vértices do polígono (região de validez);

_ identificar a função objectivo, linear em x e y, e determinar um elemento da família de rectas que lhe corresponde, para a partir dela, encontrar a solução óptima.

Método Simplex

Para a resolução de problemas de Programação Linear, existe um método conhecido como Método Simplex (o nome "simplex" vem do facto do conjunto de restrições lineares representarem geometricamente uma figura chamada *simplexo,* que é o equivalente aos poliedros no espaço e aos polígonos no plano).

Exemplo

Vamos introduzir o Método Simplex, aplicando-o ao exemplo seguinte:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \qquad (2)$$

O primeiro passo neste método consiste na introdução das chamadas varáveis de folga.

Para melhor percebermos este conceito, consideremos a primeira das nossas restrições,

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5. \qquad (3)$$

Para qualquer solução admissível x_1, x_2, x_3, o primeiro membro, de (3), é no máximo igual ao segundo membro; existe, frequentemente, uma folga entre os valores do primeiro e do segundo membro. Denotemos a folga por x_4. Isto é, definimos $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$; com esta nova notação, a inequação (3) pode ser agora escrita como $x_4 \geq 0$.

Analogamente, as duas restrições seguintes fazem aparecer as variáveis x_5 e x_6. Finalmente, denotaremos a função objectivo $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ por z. Resumindo: para cada escolha de números x_1, x_2 e x_3 devemos definir números x_4, x_5, x_6 e z pelas fórmulas

$$\begin{array}{l} x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{array} \qquad (4)$$

Com esta notação, o nosso problema pode ser redefinido como

maximizar z
sujeito a $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$. (5)

As nossas variáveis x_4, x_5 e x_6 definidas em (4) são chamadas variáveis de folga; as variáveis iniciais x_1, x_2 e x_3 são, usualmente, designadas por variáveis de decisão. Note-se que as equações em (4) tornam evidente uma equivalência entre (2) e (5). Mais precisamente:

_ Qualquer solução admissível x_1, x_2, x_3 de (2) pode ser determinada por (4) e estendida de modo único, na solução admissível $x_1, x_2, \ldots, x_6$ de (5).

_ Qualquer solução admissível $x_1, x_2, \ldots, x_6$ de (5) pode ser restringida à solução admissível x_1, x_2, x_3 de (2), simplesmente apagando as variáveis de folga.

_ Esta correspondência entre soluções admissíveis de (2) e soluções admissíveis de (5) faz com que as soluções de (2) sejam soluções óptimas de (5) e vice-versa.

A estratégia do método simplex é a de procurar sucessivos melhoramentos: após encontrarmos uma solução admissível $x_1, x_2, \ldots, x_6$ de (5), tentamos encontrar uma outra solução admissível $x'_1, x'_2, \ldots, x'_6$ que seja melhor no seguinte sentido $5x'_1 + 4x'_2 + 3x'_3 > 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$. Repetindo este processo um número finito de vezes, devemos conseguir chegar a uma solução óptima.

Para começar com este plano necessitamos de uma solução admissível $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Encontrar uma no nosso exemplo não é difícil: considerando as variáveis de decisão x_1, x_2, e x_3 todas iguais a zero, obtemos os valores de folga x_4, x_5 e x_6 de (4). Assim a nossa solução inicial é

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 5,\ x_5 = 11,\ x_6 = 8 \qquad (6)$$

que inclui $z = 0$.

No espírito da estratégia acima esboçada, devemos agora procurar uma solução admissível que nos conduza a um maior valor de z. Encontrar uma tal solução não é difícil. Por exemplo, se tomarmos $x_2 = x_3 = 0$ e aumentarmos x_1, obtemos $z = 5x_1 > 0$. Assim, se considerarmos $x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = 1$, obtemos $z = 5$ (e $x_4 = 3$, $x_5 = 7$ e $x_6 = 5$). Melhor ainda, considerando $x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = 2$, virá $z = 10$ (e $x_4 = 1$, $x_5 = 3$ e $x_6 = 2$). Contudo, ao tomarmos $x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = 3$, obtemos $z = 15$ e $x_4 = x_5 = x_6 = -1$; o que não serve, já que a solução admissível requer $x_i \geq 0$, para todo o i. Assim não podemos aumentar x_1 demasiado. Coloca-se então a questão: **até onde é que podemos aumentar x_1 (considerando $x_2 = x_3 = 0$ ao mesmo tempo) e mantendo a admissibilidade ($x_4, x_5, x_6 \geq 0$)?**

A condição $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 0$ implica $x_1 \leq 5/2$; do mesmo modo $x_5 \geq 0$ implica $x_1 \leq 11/4$ e $x_6 \geq 0$ implica $x_1 \leq 8/3$. Com estas três restrições, a primeira é a mais restringente. Aumentando x_1 até ao seu maior valor possível obteremos a nossa próxima solução,

$$x_1 = 5/2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1/2 \qquad (7)$$

Note-se que esta solução inclui $z = 25/2$, o que constitui de facto uma melhoria em relação a $z = 0$.

De seguida, procuramos uma solução admissível ainda melhor do que (7). Contudo a tarefa afigura-se um pouco mais difícil. O que torna a primeira iteração tão fácil? Temos ao nosso dispor não só a solução admissível (6), mas também o sistema de equações lineares (4), que nos guiam na procura de uma solução admissível melhorada. Se quisermos continuar por um caminho idêntico, devemos encontrar um novo sistema de equações lineares relacionadas com (7) tanto como o sistema (4) se relaciona com (6).

Que propriedades deve ter o novo sistema? Note-se que em (4) são expressas variáveis que assumem valores positivos em (6) em função das variáveis que, em (6), assumem o valor zero. Do mesmo modo, o novo sistema deve expressar as variáveis que assumem valores positivos em (7) em função das variáveis que, em (7), assumam o valor zero: isto é, o novo sistema deve expressar x_4, x_5, e x_6 (bem como z) em função de x_2, x_3, e x_4. Em particular, a variável x_1, que acabou de mudar o seu valor de zero para positivo deve passar do segundo membro para o primeiro membro do sistema de equações. De modo semelhante, a variável x_4, que acabou de mudar o seu valor de positivo para zero deve passar do primeiro membro para o segundo membro.

Para construir o novo sistema, devemos começar pelos recém-chegados ao primeiro membro, nomeadamente a variável x_1. Obtemos x_1 em termos de x_2, x_3 e x_4 a partir da primeira equação de (4):

$$x_1 = 5/2 - 3/2x_2 - 1/2x_3 - 1/2x_4\,. \qquad (8)$$

Seguidamente, para expressar x_5, x_6 e z em função de x_2, x_3 e x_4 vamos simplesmente substituir o x_1 obtido em (8) nas correspondentes equações de (4).

$$x_5 = 11 - 4(5/2 - 3/2x_2 - 1/2x_3 - 1/2x_4) - x_2 - 2x_3 + 1 + 5x_2 + 2x_4$$

$$x_6 = 8 - 3(5/2 - 3/2x_2 - 1/2x_3 - 1/2x_4) - 4x_2 - 2x_3 + 1/2 + 1/2x_2 - 1/2x_3 + 3/2x_4$$

$$z = 5(5/2 - 3/2x_2 - 1/2x_3 - 1/2x_4) + 4x_2 + 3x_3$$

$= 25/2 - 7/2x_2 + 1/2x_3 - 5/2x_4$

Então o nosso novo sistema fica

$x_1 = 5/2 - 3/2x_2 - 1/2x_3 - 1/2x_4$

$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$

$x_6 = 1/2 - 1/2x_2 - 1/2x_3 + 3/2x_4$ (9)

$z = 25/2 - 7/2x_2 + 1/2x_3 - 5/2x_4.$

Tal como fizemos na primeira iteração, devemos agora tentar aumentar o valor de z escolhendo o valor de uma variável apropriada do segundo membro enquanto ao mesmo tempo mantemos as restantes variáveis do segundo membro fixas em zero. Observe-se que o aumento dos valores de x_2 ou de x_4 levam a uma diminuição do valor de z, o que vai contra as nossas pretensões. Portanto, não temos alternativa: a variável do segundo membro cujo valor tem de aumentar é necessariamente x_3. Quanto pode aumentar? A resposta pode ser obtida directamente do sistema (9): com $x_2 = x_4 = 0$, a condição $x_1 \geq 0$ implica $x_3 \leq 5$; a condição $x_5 \geq 0$ não impõe nenhuma restrição, e a condição $x_6 \geq 0$ implica $x_3 \leq 1$. Logo, $x_3 = 1$ é o melhor que podemos fazer; a nossa nova solução é

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0. \qquad (10)$$

(Observe-se que o valor de z só aumentou de 12.5 para 13.)

Averiguemos se esta solução melhorada é, ou não, suficientemente satisfatória para o nosso objectivo; procuremos, então, um sistema de equações lineares que acompanhe (10). Nesse sistema, as variáveis com valor positivo x_1, x_3, e x_5 aparecem no primeiro membro, enquanto que as variáveis com valores nulos x_2, x_4 e x_6 aparecerão no segundo membro. Para construir o sistema começamos novamente pela variável recém-chegada ao primeiro membro, nomeadamente, a variável x_3. A partir da terceira equação de (9) temos $x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$; substituindo x_3 nas restantes equações de (9) obtemos

$x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$
$x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6$
$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$ (11)
$z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6.$

Agora é tempo de partir para a terceira iteração. Antes de tudo, no segundo membro de (11) temos que escolher a variável cujo aumento proporcione um aumento da função objectivo. No entanto, tal variável não existe: de facto, se aumentarmos qualquer uma das variáveis do segundo membro x_2, x_4 e x_6 provocaremos um decrescimento no valor de z. Logo, isto significa que chegámos a um impasse. De facto, só a presença deste impasse indica que acabámos; resolvemos o nosso problema; a solução descrita em (11). Porquê? A resposta está na última linha de (11):

$$z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6. \qquad (12)$$

A nossa última solução (10) preconizava $z = 13$; provar que esta solução é óptima é provar que qualquer solução admissível satisfaz a desigualdade $z \leq 13$. Como cada uma das soluções admissíveis $x_1, x_2, \ldots, x_6$ satisfaz entre outras, as desigualdades $x_2 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ e $x_6 \geq 0$, a desigualdade desejada $z \leq 13$ obtém-se directamente de (12).

Notemos que este método é geral e pode ser aplicado a qualquer problema de Programação Linear.

Deve-se observar que há procedimentos bem determinados:

O método simplex em passos

(1) Introduza as variáveis de folga.
(2) Encontre uma solução inicial e construa o sistema associado a ele.
(3) Escolha uma variável nula para ser aumentada. Se não houver variável a ser aumentada, a solução actual é óptima.
(4) Verifique o quanto esta variável pode ser aumentada usando o sistema.
(5) Escreva as variáveis não nulas em função das nulas e volte ao passo (2).

Truques úteis no método simplex

Resolvemos anteriormente um problema de maximizar quantidades com inequações do tipo $\leq$ e variáveis não negativas. Mais especificamente, um problema do tipo maximizar $\sum_{1 \le j \le n} c_j x_j$

sujeito a $\sum_{1 \le j \le n} a_{ij} x_j \le b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$
$x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

Podemos reduzir todos os problemas de Programação Linear a um problema semelhante ao anterior.

Mudando a função $\sum_{1 \le j \le n} c_j x_j$

Suponhamos que queiramos minimizar uma função z. O valor mínimo de z é igual ao oposto do valor máximo de –z. Assim, podemos maximizar –z.

Mudando variáveis

Caso uma variável x_k seja não positiva, tomamos $x'_k = -x_k$, que é não negativa. Caso uma variável x_l seja real, fazemos $x_l = x^+_l - x^-_l$,fazendo x^+_l e x^-_l não negativas:

se $x_l \le 0$ temos $x^+_l = 0$ e $x^-_l \ge 0$
se $x_l \ge 0$ temos $x^+_l \ge 0$ e $x^-_l = 0$

Mudando restrições

Podemos transformar uma restrição ≥ numa restrição ≤ multiplicando os dois membros por -1. Uma restrição $f(x) = 0$ pode ser transformada em duas restrições: uma do tipo $f(x) \ge 0$ (que é equivalente a $-f(x) \le 0$) e outra do tipo $f(x) \le 0$.

Assim, podemos resolver qualquer tipo de problema de Programação Linear utilizando o método descritivo. Na verdade, podemos programar um computador para resolver estes problemas. Existem vários softwares que resolvem problemas de Programação Linear.

Problemas que podem ocorrer no método simplex:

i) Inicializando o método simplex

Considere o problema em que se deve

maximizar $\sum_{1 \le j \le n} c_j x_j$

sujeito a $\Sigma_{1 \leq j \leq n}\, a_{ij}x_j \leq b_i$

$x_j \geq 0$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n)$.

Adicionadas as variáveis de folga $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, uma solução inicial poderia ser $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ e teríamos assim $x_{n+k} = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Mas se existir um b_i negativo, esta solução não é viável.

Cabem então duas perguntas: se isto ocorrer, como encontrar uma solução inicial? Podemos saber se não existe uma solução inicial?

A resposta para ambas as perguntas é sim. A solução é adoptar um problema auxiliar, introduzindo a variável x_0:

minimizar x_0

sujeito a $\Sigma_{1 \leq j \leq n}\, a_{ij}x_j - x_0 \leq b_i$,

$x_j \geq 0$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 0, 1, 2, \ldots, n)$

Observemos que uma solução inicial para este problema é $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ e x_0 suficientemente grande. É fácil de se verificar que o problema original admite solução se, e somente se, o problema auxiliar admite uma solução óptima com $x_0 = 0$ (observemos que x_0 não "devia estar" no problema, - $x_0 > 0$ indica que as restrições do problema original não podem ser satisfeitas). Assim, este problema auxiliar tem duas finalidades: determinar se o problema original tem solução e, em caso positivo, encontrar uma solução inicial.

Vamos mostrar um exemplo:
vamos encontrar uma solução inicial para o problema de

maximizar $x_1 - x_2 + x_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq -1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

O problema auxiliar é

maximizar $-x_0$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_0 &\leq -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_0 &\leq -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_0 &\geq 0 \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis de folga x_4, x_5 e x_6, temos o sistema:

$$\begin{aligned} x_4 &= 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\ x_5 &= -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_0 \\ x_6 &= -1 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_0 \\ \hline w &= -x_0 \end{aligned}$$

É claro que não podemos adoptar $x_4 = 4$, $x_5 = -5$ e $x_6 = -1$. A ideia é tomarmos a variável de valor mais negativo (no caso, x_5) e trocar por x_0. Assim, temos o sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= 5 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 \\ x_4 &= 9 \qquad - 2x_2 - x_3 + x_5 \\ x_6 &= 4 + 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 \\ \hline w &= -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 \end{aligned}$$

Aumentando x_2 para 1, temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 3/4x_1 + 3/4\,x_3 + 1/4x_5 - 1/4x_6 \\ x_0 &= 2 - 1/4x_1 - 5/4\,x_3 + 1/4x_5 + 3/4x_6 \\ x_4 &= 7 - 3/2x_1 - 5/2\,x_3 + 1/2x_5 + 1/2x_6 \\ \hline w &= -2 + 1/4x_1 + 5/4\,x_3 - 1/4x_5 - 3/4x_6 \end{aligned}$$

Agora aumentamos x_3 e temos:

$$\begin{aligned} x_3 &= 8/5 - 1/5x_1 + 1/5\,x_5 + 3/5x_6 - 4/5x_0 \\ x_2 &= 11/5 + 3/5x_1 + 2/5\,x_5 + 1/5x_6 - 3/5x_0 \\ x_4 &= 3 - x_1 - x_6 + 2x_0 \\ \hline w &= \qquad\qquad\qquad\qquad -x_0 \end{aligned}$$

que é a solução óptima. Assim, temos uma solução para o problema original. Podemos agora voltar ao problema original. Ainda falta escrever $z = x_1 - x_2 + x_3$ em função das variáveis nulas. Basta substituir x_2 e x_3, obtendo $z = -3/5 + 1/5x_1 - 1/5\,x_5 + 2/5x_6$. Além disso, podemos omitir x_0 e escrever o sistema inicial

$$x_3 = 8/5 - 1/5x_1 + 1/5\,x_5 + 3/5x_6$$
$$x_2 = 11/5 + 3/5x_1 + 2/5\,x_5 + 1/5x_6$$
$$x_4 = 3 - x_1 - x_6$$

$$z = -3/5 + 1/5x_1 - 1/5\,x_5 + 2/5x_6$$

e assim proceder com o método de simplex normalmente.

ii) Iterando o método simplex

Fazer uma iteração no método simplex é encontrar uma solução melhor que a anterior e construir o sistema associado a essa solução. Para encontrar uma melhor solução, precisamos aumentar uma das variáveis nulas e verificar o maior valor possível que podemos tomar para esta variável. Caso haja mais de uma variável que possa ser aumentada, podemos escolher qualquer delas. Em geral, escolhemos aquela cujo coeficiente em z é mais positivo (ou se for o caso, mais negativo). Pode ser que não consigamos achar um valor máximo para esta variável. Por exemplo, no sistema

$$x_2 = 5 + 2x_3 - x_4 - 3x_1$$
$$x_5 = 7 - 3x_4 - 4x_1$$

$$z = 5 + x_3 - x_4 - x_1$$

a única variável a ser aumentada é x_3. Observe que $x_2 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$ não impõem nenhuma restrição sobre x_3. Assim, podemos aumentar x_3 o quanto quisermos. Neste caso, o problema é ilimitado, ou seja, não existe máximo para z (z pode ser o quão grande quisermos). No exemplo, fazendo $x_3 = t$ e $x_4 = x_1 = 0$, temos $x_2 = 5 + 2t$, $x_5 = 7$ e $z = 5 + t$. Para qualquer valor de t, todas as variáveis são não negativas e satisfazem o sistema. Assim, temos uma solução viável para qualquer t.

Quando a variável a ser aumentada é restringida por mais de uma equação, podemos escolher qualquer uma destas equações para isolar a variável.

Como escrever o sistema é só fazer uma conta, vemos que sempre conseguimos iterar o método simplex, excepto quando o problema é ilimitado.

iii) Terminando o método simplex

Pode ser que o método simplex entre em ciclo, sem nunca encontrar uma solução óptima. Isto depende dos critérios utilizados para escolher a variável a ser aumentada e a equação onde esta variável deve ser isolada no sistema. Por exemplo, se os critérios forem, escolher a variável cujo coeficiente em z é mais positivo e escolher, no caso de empate, a equação cujo primeiro termo tem a variável de menor índice (que são os critérios mais utilizados), o problema cujo sistema é

$$
\begin{aligned}
x_5 &= -1/2x_1 + 11/2\, x_2 + 5/2x_3 - 9x_4 \\
x_6 &= -1/2x_1 + 3/2\, x_2 + 1/2x_3 - x_4 \\
x_7 &= 1 - x_1 \\
\hline
z &= 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4
\end{aligned}
$$

irá entrar em ciclos de 6 iterações (isto é, a cada 6 iterações obtemos o mesmo sistema).

Na verdade, problemas deste tipo são raros. Todavia, existem critérios que nunca deixam os sistemas entrarem em ciclo. Os seguintes critérios evitam ciclos:

Critérios que evitam ciclos

Escolher a variável cujo coeficiente em z é positivo e cujo índice é mínimo e escolher, no caso de empate, a equação cujo primeiro membro tem a variável de menor índice.

Conclusão

Com a elaboração deste trabalho, foi nosso objectivo estudar um recente ramo da Matemática, a Programação Linear aplicada ao Ensino Secundário.

Evidenciámos que o seu surgimento veio de necessidades concretas da " Sociedade Militar " e que o seu desenvolvimento actual e permanente é fruto de problemas colocados pelas mais diversas áreas (Economia, Indústria, …).

Foi nossa preocupação abordar a Programação Linear no âmbito do ensino da Matemática, fazendo referência à multiplicidade de aplicações que esta tem e utilizá-las para estudar conceitos matemáticos. Para além disso, tem como finalidade, desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real. Salientamos a dificuldade que muitas vezes há na própria formalização dos problemas que advém da complexidade dos enunciados e suas interpretações.

Após a realização deste trabalho, ainda mais convencidas estamos das potencialidades que a Programação Linear traz ao programa de Matemática A. Repare-se que com uma aplicação concreta (de Economia ou de outra qualquer área) podemos usar a modelação matemática para resolver problemas com **actividades investigativas** não prescindindo da **lógica** e **raciocínio matemático**, usando a **tecnologia** para comunicar matematicamente as conclusões obtidas devidamente enquadradas de um ponto de vista histórico.

Aproveitamos este espaço para justificar alguns aspectos do nosso trabalho.

É do nosso conhecimento a existência de vários programas para desenhar gráficos: Mathematica, Graphmatica, Excel, … No entanto, optámos por utilizar a Calculadora Gráfica e imagens digitalizadas pelo facto de não conseguirmos pôr em prática as potencialidades dos referidos programas. Por conseguinte, não abordámos, geometricamente, situações que envolvessem três variáveis, apesar de termos consciência de que, casos destes constituiriam generalização dos estudados (rectas e polígonos no espaço bidimensional corresponderiam, respectivamente, a planos e poliedros no espaço a três dimensões). E como forma de colmatar esta falha, apresentámos um estudo do Método Simplex.

Tendo em conta que uma das grandes preocupações da Matemática se traduz na procura dos eventuais casos "patológicos", achámos por bem atribuir destaque aos casos particulares da Programação Linear. Para além disso, a inclusão do exemplo 3 no trabalho reflecte a necessidade de evidenciar os aspectos peculiares da exposição da Programação Linear leccionada no 11º ano (maior simplicidade em termos linguísticos e maior clareza na justificação dos diferentes passos).

Em suma, atendendo a todos os aspectos aqui mencionados, tomamos a liberdade de considerar este trabalho uma preciosa ferramenta como possível consulta para futuros professores de Matemática A do 11º ano.

Bibliografia

- ❖ Antunes, Carlos Henggeler e Tavares, Luís Valadares; *Casos de Aplicação da investigação operacional*; McGraw-Hill;

- ❖ Ferreira, Manuel A.M; Amaral, Isabel; *Programação Matemática*; Lisboa; Edições Silado; 1995;

- ❖ Jorge, Ana Maria Brito; Alves Conceição Barroso; Fonseca Graziela; Barbedo Judite; *Infinito 11, volume 1*; Areal Editores;

- ❖ Lima Yolanda; Gomes Francelino; *Xeq Mat_11ºano;* Editorial O livro;

- ❖ Ramalhete Manuel; Guerreiro Jorge; Magalhães Alípio; *Programação Linear, volume 1;* McGraw-Hill;

- ❖ Tavares, L.Valadares; Oliveira, R.Carvalho; Themido, I. Hall; Correia, F. Nunes; *Investigação Operacional*; Alfragide; McGraw-Hill; 1997;

- ❖ Wolfram Stephen; *The Mathematica Book*; Wolfram Media;

- ❖ Anexos (que constam no final deste trabalho);

Sites Consultados:

www.google.pt
www.sapo.pt