

TOPOLOGIA E ANÁLISE LINEAR

Maria Manuel Clementino, 2013/14

1 ESPAÇOS MÉTRICOS

ESPAÇO MÉTRICO

Um par (X, d) diz-se um **espaço métrico** se X for um conjunto e $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ for uma aplicação que verifica as seguintes condições, quaisquer que sejam $x, y, z \in X$:

- (1) $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

[A função d chama-se métrica e aos elementos de X pontos do espaço métrico; a condição (3) designa-se por desigualdade triangular.]

Note que, ao verificar (3), basta-nos considerar três pontos distintos $x, y, z \in X$, uma vez que, se dois deles coincidirem, o resultado é trivial ou segue imediatamente de (1).

BOLA ABERTA E BOLA FECHADA

Dados um (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e $r > 0$, os conjuntos

$$B_r(a) := \{x \in X ; d(x, a) < r\} \quad \text{e} \quad B_r[a] := \{x \in X ; d(x, a) \leq r\}$$

designam-se, respectivamente, por **bola aberta** e **bola fechada** de centro a e raio r .

EXEMPLOS.

- (1) Se X é um conjunto, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{caso contrário,} \end{cases}$ é uma métrica. [métrica discreta]

- (2) Em \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) podemos definir diversas métricas:

$$(a) \quad d_1(a, b) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|,$$

$$(b) \quad d_2(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}, \quad \text{[métrica euclidiana]}$$

$$(c) \quad d_\infty(a, b) = \max\{|a_i - b_i| ; i = 1, \dots, n\},$$

onde $a = (a_i)_{i=1, \dots, n}$, $b = (b_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n$.

- (3) Se (X, d) e (Y, d') são espaços métricos, podemos definir em $X \times Y$ as métricas

$$(a) \quad d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2),$$

$$(b) \quad d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (d(x_1, x_2)^2 + d'(y_1, y_2)^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(c) \quad d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\},$$

onde $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$.

- (4) Se A é um subconjunto de X e d é uma métrica em X , a restrição d_A de d a $A \times A$ é uma métrica em A .

[Diz-se então que (A, d_A) é um subespaço métrico de (X, d) .]

- (5) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. No conjunto das funções limitadas de $[a, b]$ em \mathbb{R} podemos considerar a métrica ρ definida por

$$\rho(f, g) := \sup \{|f(x) - g(x)|; x \in [a, b]\},$$

onde $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções limitadas.

[Esta métrica chama-se habitualmente métrica do supremo, e o espaço métrico designa-se por $\mathcal{L}([a, b], \mathbb{R})$.]

- (6) Como toda a função contínua de $[a, b]$ em \mathbb{R} é limitada, podemos considerar ainda o subespaço métrico de $\mathcal{L}([a, b], \mathbb{R})$ das funções contínuas de $[a, b]$ em \mathbb{R} , que se costuma denotar por $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, ou simplesmente por $\mathcal{C}[a, b]$.

- (7) No conjunto das funções contínuas de $[a, b]$ em \mathbb{R} podemos ainda considerar a métrica

$$\sigma(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

[métrica do integral]

CONJUNTO LIMITADO/FUNÇÃO LIMITADA

Um subconjunto A de um espaço métrico (Y, d) diz-se limitado se existirem $a \in Y$ e $r > 0$ tais que $d(y, a) < r$ qualquer que seja $y \in A$. Uma função $f : X \rightarrow (Y, d)$ diz-se limitada se $f(X)$ for um subconjunto limitado de (Y, d) .

EXEMPLO.

- (8) Se X é um conjunto e (Y, d) um espaço métrico, podemos considerar o espaço métrico $\mathcal{L}(X, (Y, d))$ das funções limitadas de X em (Y, d) munido da métrica do supremo

$$\rho(f, g) := \sup \{d(f(x), g(x)); x \in X\}.$$

FUNÇÃO CONTÍNUA

Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Diz-se que $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é uma função contínua em $a \in X$ se

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) : (\forall x \in X) d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

$f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ diz-se uma função contínua se for contínua em todo o ponto x de X .

Na definição de função contínua em $a \in X$ as bolas abertas são essenciais. De facto:

[Uma função $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é contínua em $a \in X$ se e só se

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) : f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)).]$$

As bolas abertas têm uma propriedade interessante:

Se $x \in B_r(a)$ então existe $s > 0$ tal que $B_s(x) \subseteq B_r(a)$.

ABERTO

Se (X, d) é um espaço métrico e $A \subseteq X$, A diz-se um subconjunto aberto de (X, d) se

$$(\forall x \in A) (\exists s > 0) : B_s(x) \subseteq A.$$

Já sabemos que toda a bola aberta é um aberto. Há no entanto abertos que não são bolas abertas. Por exemplo, $]0, +\infty[$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R} (com a métrica euclidiana) embora não seja uma bola aberta.

É fácil verificar que os abertos de um espaço métrico (X, d) têm as seguintes propriedades:

- (1) \emptyset e X são subconjuntos abertos de (X, d) ;
- (2) se A e B são subconjuntos abertos de (X, d) , então também $A \cap B$ o é;
- (3) se I é um conjunto e $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de (X, d) , então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é ainda um aberto de (X, d) .

Note-se que, uma vez que a intersecção de dois abertos é um aberto (Propriedade 2), também qualquer intersecção *finita* de abertos é um aberto. Não podemos no entanto generalizar esta propriedade ao caso de uma família qualquer de abertos: há famílias (infinitas) de abertos cuja intersecção não é aberta. Por exemplo, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$ não é um aberto em \mathbb{R} .

Proposição. *Um subconjunto de um espaço métrico é aberto se e só se é reunião de bolas abertas.*

Demonstração. Como cada bola aberta é um aberto e estes são estáveis para a reunião, conclui-se imediatamente que a reunião de bolas abertas é aberta.

Reciprocamente, se $A \subseteq X$ é aberto, então, para cada $a \in A$, existe $\delta_a > 0$ tal que $B_{\delta_a}(a) \subseteq A$. Logo $A \subseteq \bigcup_{a \in A} B_{\delta_a}(a) \subseteq A$, e obtemos a igualdade pretendida. ■

O estudo dos subconjuntos abertos de um espaço métrico é justificado pelo seguinte resultado.

Proposição. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.*

- (1) *$f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é contínua em $a \in X$ se e só se, para cada subconjunto aberto V de (Y, d') ao qual $f(a)$ pertença, existir um aberto U de (X, d) tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq V$.*
- (2) *A função $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é contínua se e só se todo o subconjunto aberto de (Y, d') tiver como imagem inversa por f um subconjunto aberto de (X, d) .*

Demonstração. (1) (\Rightarrow) Seja V um aberto de Y ao qual $f(a)$ pertence. Por definição de aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. Da continuidade de f em a conclui-se então que existe $\delta > 0$

tal que $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Logo, considerando $U = B_\delta(a)$, obtemos $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$, como pretendido.

(\Leftarrow) Seja $\varepsilon > 0$. A bola aberta $B_\varepsilon(f(a))$ é em particular um aberto ao qual $f(a)$ pertence. Logo, por hipótese, existe um aberto U de X tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Por definição de aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq U$. Finalmente temos $f(B_\delta(a)) \subseteq f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$.

(2) (\Rightarrow) Sejam V um subconjunto aberto de Y e $a \in f^{-1}(V)$. Como V é aberto e $f(a) \in V$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$ e podemos então concluir que $f^{-1}(V)$ é um aberto de X .

(\Leftarrow) Sejam $a \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como $B_\varepsilon(f(a))$ é um aberto de Y , da hipótese segue que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ é um aberto de X . Como $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, pela definição de aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, o que é equivalente a $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Logo, f é contínua em a . ■

2 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

TOPOLOGIA

Dado um conjunto X , um subconjunto \mathcal{T} de partes de X diz-se uma **topologia** em X se

- (1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;
- (2) se $A, B \in \mathcal{T}$ então $A \cap B \in \mathcal{T}$;
- (3) se $(A_i)_{i \in I}$ for uma família de elementos de \mathcal{T} , então $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

[Ao par (X, \mathcal{T}) chama-se espaço topológico. Os elementos de \mathcal{T} dizem-se os abertos do espaço topológico (X, \mathcal{T}) .]

FUNÇÃO CONTÍNUA

Se (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') são espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ é uma *função*, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$

- (1) diz-se **contínua em** $a \in X$ se: $(\forall V \in \mathcal{T}') f(a) \in V \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{T}) : a \in U \text{ e } f(U) \subseteq V$;
- (2) diz-se **contínua** se: $(\forall V \in \mathcal{T}') f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Proposição. Se (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{T}') e (Z, \mathcal{T}'') são espaços topológicos e $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ e $g : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$ são funções contínuas, então a sua composição $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$ é ainda uma função contínua.

EXEMPLOS.

- (1) Se (X, d) é um espaço métrico e \mathcal{T} é o conjunto dos abertos definidos pela métrica d , então (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico. Por exemplo, a métrica euclidiana em \mathbb{R}^n define uma topologia em \mathbb{R}^n , a que se chama topologia euclidiana.

(2) Em qualquer conjunto X podemos definir:

(a) a topologia discreta $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$, em que todo o subconjunto de X é aberto (induzida pela métrica discreta);

(b) a topologia indiscreta (ou topologia grosseira) $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$.

(3) Se X é um conjunto qualquer, $\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ ou } X \setminus A \text{ é um conjunto finito}\}$ é uma topologia em X , a que se dá o nome de topologia cofinita.

(4) Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico. Dado um subconjunto Y de X , $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$ é uma topologia em Y . A esta topologia chama-se topologia relativa – ou topologia de subespaço – em Y induzida por \mathcal{T} .

ESPAÇO TOPOLÓGICO METRIZÁVEL

Um espaço topológico cuja topologia seja exactamente o conjunto dos abertos definidos por uma métrica diz-se um espaço topológico metrizável.

[Note-se que duas métricas diferentes num conjunto X podem definir a mesma topologia: dizem-se então métricas topologicamente equivalentes.]

Proposição. Se d e d' são métricas num conjunto X , d e d' são topologicamente equivalentes se e só se as funções

$$\begin{array}{ccc} (X, d) & \longrightarrow & (X, d') \\ x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} (X, d') & \longrightarrow & (X, d) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{são contínuas.}$$

Lema. Se (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico e \mathcal{T}_Y é a topologia de subespaço em $Y \subseteq X$, então a função inclusão

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}_Y) & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}) \\ y & \longmapsto & y \end{array} \quad \text{é contínua.}$$

Proposição. Sejam (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

(1) Se \mathcal{T} é a topologia discreta, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ é contínua.

(2) Se \mathcal{T}' é a topologia indiscreta, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ é contínua.

TOPOLOGIAS COMPARÁVEIS

No conjunto das topologias de um conjunto X podemos definir uma relação de ordem do seguinte modo: se \mathcal{T} e \mathcal{T}' são topologias em X , $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Nesse caso diz-se que \mathcal{T} é uma topologia menos fina do que \mathcal{T}' e que \mathcal{T}' é uma topologia mais fina do que \mathcal{T} .

OBSERVAÇÕES.

(1) Se \mathcal{T} e \mathcal{T}' são topologias em X , dizer que \mathcal{T} é mais fina do que \mathcal{T}' é equivalente a dizer que a função identidade $(X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ é contínua.

(2) A topologia discreta é mais fina do que qualquer outra topologia que se possa definir no conjunto X , enquanto que a topologia indiscreta é menos fina do que qualquer outra.

HOMEOMORFISMO/ESPAÇOS HOMEOMORFOS

Sejam (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') espaços topológicos.

- (1) Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ diz-se um homeomorfismo se for uma função contínua, bijetiva, com função inversa $g : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ contínua.
- (2) Se existir um homeomorfismo $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ diz-se que os espaços topológicos (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') são homeomorfos.

EXEMPLOS. Como subespaços de \mathbb{R} , são homeomorfos: $[0, 1]$ e $[a, b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$); $]0, 1]$ e $[1, +\infty[$; \mathbb{R} e $]0, +\infty[$.

3 Bases e sub-bases

BASE

Um subconjunto \mathcal{B} de uma topologia \mathcal{T} num conjunto X diz-se uma base da topologia \mathcal{T} se todo o elemento de \mathcal{T} for uma reunião de elementos de \mathcal{B} ; isto é

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid (B_i)_{i \in I} \text{ é uma família de elementos de } \mathcal{B} \right\}.$$

Lema. Se (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico, então $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ é uma base de \mathcal{T} se e só se, para todo o aberto A , se verificar

$$(\forall x \in A) (\exists B \in \mathcal{B}) : x \in B \subseteq A.$$

EXEMPLOS.

- (1) Se (X, d) é um espaço métrico e \mathcal{T} é a topologia definida pela métrica d , então o conjunto $\mathcal{B} = \{B_r(x) \mid r > 0, x \in X\}$ é uma base para a topologia \mathcal{T} .

[Em particular, os intervalos abertos limitados formam uma base para a topologia euclidiana em \mathbb{R} .]

- (2) Um conjunto \mathcal{B} de partes de X é uma base para a topologia discreta em X se e só se, para todo o ponto x de X , $\{x\} \in \mathcal{B}$.

Proposição. Dados um conjunto X e um subconjunto \mathcal{S} de $\mathcal{P}(X)$, o conjunto \mathcal{T} constituído pelas reuniões quaisquer de intersecções finitas de elementos de \mathcal{S} é uma topologia em X .

SUB-BASE

Se \mathcal{S} e \mathcal{T} estão nas condições da proposição anterior, diz-se que \mathcal{S} é uma sub-base de \mathcal{T} , e que \mathcal{T} é a topologia gerada por \mathcal{S} .

[A topologia gerada por \mathcal{S} é portanto a topologia menos fina que contém \mathcal{S} .]

EXEMPLOS.

- (1) Toda a base de uma topologia é em particular uma sub-base.
- (2) $\{]a, a + 1[\mid a \in \mathbb{R}\}$ é uma sub-base da topologia euclidiana em \mathbb{R} [mas não é uma base].
- (3) A topologia euclidiana em \mathbb{R} é gerada por $\mathcal{S} = \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, b[; b \in \mathbb{R}\}$.
- (4) Qualquer que seja X , $\{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ é uma sub-base da topologia cofinita em X .

Proposição. *Se (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') são espaços topológicos e \mathcal{S} é uma sub-base de \mathcal{T}' , então uma função $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ é contínua se e só se toda a imagem inversa, por f , de um elemento de \mathcal{S} for um aberto em (X, \mathcal{T}) .*

Proposição. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) \mathcal{S} é uma base para uma topologia em X .
- (ii) (B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$;
(B2) $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{S}) (\forall x \in B_1 \cap B_2) (\exists B_3 \in \mathcal{S}) : x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Proposição. *Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e \mathcal{T}_Y a topologia relativa em $Y \subseteq X$.*

- (1) *Se \mathcal{B} é base da topologia \mathcal{T} , então $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y; B \in \mathcal{B}\}$ é uma base da topologia \mathcal{T}_Y .*
- (2) *Se \mathcal{S} é sub-base de \mathcal{T} , então $\mathcal{S}_Y := \{S \cap Y; S \in \mathcal{S}\}$ é uma sub-base da topologia \mathcal{T}_Y .*

4 Vizinhanças

VIZINHANÇA

Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e a um ponto de X . Diz-se que um subconjunto V de X é uma vizinhança de a se existir um aberto A tal que $a \in A \subseteq V$.

Designaremos o conjunto das vizinhanças de x em (X, \mathcal{T}) por \mathcal{V}_x .

EXEMPLOS. Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico.

- (1) Qualquer que seja $x \in X$, $X \in \mathcal{V}_x$.
- (2) Se A é aberto e $x \in A$, então $A \in \mathcal{V}_x$.
- (3) Se \mathcal{T} é a topologia discreta, então, quaisquer que sejam $Y \subseteq X$ e $x \in Y$, $Y \in \mathcal{V}_y$.

Proposição. *Um conjunto $A \subseteq X$ é aberto se e só se é vizinhança de todos os seus pontos.*

Proposição. *Se (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico e $x \in X$, então:*

- (1) $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$ e $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in V$;
 (2) $V \in \mathcal{V}_x$ e $W \supseteq V \Rightarrow W \in \mathcal{V}_x$;
 (3) $V, W \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{V}_x$;

Proposição. *Seja $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ uma função.*

- (1) *f é contínua em $a \in X$ se e só se a imagem inversa por f de qualquer vizinhança de $f(a)$ é uma vizinhança de a .*
 (2) *f é contínua se e só se, para todo o $x \in X$, a imagem inversa por f de qualquer vizinhança de $f(x)$ é uma vizinhança de x .*

SISTEMA FUNDAMENTAL DE VIZINHANÇAS

Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e $x \in X$. Um subconjunto \mathcal{U}_x de \mathcal{V}_x diz-se uma base de vizinhanças de x ou sistema fundamental de vizinhanças de x se, para cada $V \in \mathcal{V}_x$, existir $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \subseteq V$.

EXEMPLOS.

- (1) Se \mathcal{T} for uma topologia em X definida por uma métrica d , então o conjunto das bolas abertas centradas em $x \in X$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x .
 (2) Se \mathcal{T} for a topologia discreta em X , então o conjunto singular $\mathcal{U}_x = \{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $x \in X$.

Proposição. *Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e \mathcal{T}_Y a topologia relativa em $Y \subseteq X$.*

- (1) *Se $x \in Y$ e \mathcal{V}_x é o conjunto das vizinhanças de x no espaço topológico (X, \mathcal{T}) , então $\mathcal{V}'_x := \{V \cap Y; V \in \mathcal{V}_x\}$ é o conjunto das vizinhanças de x em (Y, \mathcal{T}_Y) .*
 (2) *Se $x \in Y$ e \mathcal{U}_x é um sistema fundamental de vizinhanças de x no espaço topológico (X, \mathcal{T}) , então $\mathcal{U}'_x := \{U \cap Y; U \in \mathcal{U}_x\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x em (Y, \mathcal{T}_Y) .*

5 Subconjuntos fechados de um espaço topológico

FECHADO

Um subconjunto A de um espaço (X, \mathcal{T}) chama-se fechado se o seu complementar for aberto.

Proposição. *Um subconjunto \mathcal{F} de $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto dos subconjuntos fechados de um espaço topológico (X, \mathcal{T}) se e só se verifica as seguintes condições:*

- (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$;

(2) se $U, V \in \mathcal{F}$ então $U \cup V \in \mathcal{F}$;

(3) se $(U_i)_{i \in I}$ for uma família de elementos de \mathcal{F} , então $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{F}$.

Proposição. Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ é contínua se e só se, qualquer que seja o subconjunto fechado F de (Y, \mathcal{T}') , $f^{-1}(F)$ é fechado em (X, \mathcal{T}) .

Lema. Se \mathcal{F} é o conjunto dos subconjuntos fechados de (X, \mathcal{T}) e Y é um subconjunto de X , então $\mathcal{F}_Y = \{F \cap Y \mid F \in \mathcal{F}\}$ é o conjunto dos fechados do subespaço (Y, \mathcal{T}_Y) .

FUNÇÃO ABERTA/FUNÇÃO FECHADA

Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ diz-se aberta (resp. fechada) se, sempre que A for um subconjunto aberto (fechado) de X , $f(A)$ for um subconjunto aberto (fechado) de Y .

Proposição. Se \mathcal{T}_Y é a topologia de subespaço em Y definida por (X, \mathcal{T}) , então a inclusão $(Y, \mathcal{T}_Y) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ é aberta (fechada) se e só se Y é um subconjunto aberto (fechado) de (X, \mathcal{T}) .

Lema. Toda a função bijectiva, contínua e aberta é um homeomorfismo.

6 Operações de interior e de aderência

PONTO INTERIOR

Se (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico e Y é um subconjunto de X , um ponto x de X diz-se um ponto interior de Y se existir um aberto A de X tal que $x \in A$ e $A \subseteq Y$.

[O conjunto dos pontos interiores de Y chama-se interior de Y e denota-se por $\overset{\circ}{Y}$, $\text{int}(Y)$ ou simplesmente $\text{int}Y$.]

Lema. Se Y é um subconjunto de um espaço topológico (X, \mathcal{T}) , então:

(1) $\text{int}(Y) \subseteq Y$; $\text{int}(Y) = Y \Leftrightarrow Y \in \mathcal{T}$;

(2) $\text{int}(Y)$ é um aberto: é o maior aberto contido em Y ; logo, $\text{int}(Y) = \bigcup \{A \in \mathcal{T} ; A \subseteq Y\}$.

EXEMPLOS.

(1) Se \mathcal{T} é a topologia discreta em X , qualquer que seja $Y \subseteq X$, $\text{int}(Y) = Y$.

(2) Se \mathcal{T} é a topologia indiscreta em X , então $\text{int}(X) = X$ e $\text{int}(Y) = \emptyset$ desde que $Y \neq X$.

(3) Em \mathbb{R} , com a topologia euclidiana, $\text{int}([a, b]) =]a, b[$, $\text{int}(\{x\}) = \emptyset$, $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

(4) Em \mathbb{R} , com a topologia cofinita, se $Y \subseteq \mathbb{R}$, então $\text{int}(Y) = \begin{cases} Y & \text{se } \mathbb{R} \setminus Y \text{ finito} \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$

PONTO ADERENTE

Se (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico e $Y \subseteq X$, um ponto x de X diz-se um ponto aderente de Y se, qualquer que seja o aberto A de X , se $x \in A$ então $A \cap Y \neq \emptyset$:

[O conjunto dos pontos aderentes de Y chama-se aderência de Y ou fecho de Y , e representa-se por \bar{Y} .]

Lema. *Se Y é um subconjunto de um espaço topológico (X, \mathcal{T}) , então:*

- (1) $Y \subseteq \bar{Y}$; $Y = \bar{Y} \Leftrightarrow Y$ é fechado;
- (2) \bar{Y} é fechado: é o menor fechado que contém Y ; logo $\bar{Y} = \bigcap \{F; F \text{ é fechado e } Y \subseteq F\}$.

EXEMPLOS.

- (1) Se \mathcal{T} é a topologia discreta em X , qualquer que seja $Y \subseteq X$, $\bar{Y} = Y$.
 - (2) Se \mathcal{T} é a topologia indiscreta em X , então $\bar{\emptyset} = \emptyset$ e $\bar{Y} = X$ desde que $Y \neq \emptyset$.
 - (3) Em \mathbb{R} , com a topologia euclidiana, $\overline{]a, b[} = [a, b]$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
 - (4) Em \mathbb{R} , com a topologia cofinita, se $Y \subseteq \mathbb{R}$, então $\bar{Y} = \begin{cases} Y & \text{se } Y \text{ finito} \\ \mathbb{R} & \text{caso contrário.} \end{cases}$
-

SUBCONJUNTO DENSO/FRONTEIRA/EXTERIOR/DERIVADO

Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e Y um subconjunto de X .

- (1) Y diz-se denso se $\bar{Y} = X$.
- (2) Um ponto x de X diz-se ponto fronteira de Y se

$$(\forall U \in \mathcal{V}_x) \quad U \cap Y \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus Y).$$

O conjunto dos pontos fronteira de Y chama-se fronteira de Y e designa-se por $\text{fr}Y$.

- (3) Um ponto x de X diz-se ponto exterior de Y se tiver uma vizinhança que não intersecta Y ; isto é, se for um ponto interior do complementar de Y .

O conjunto dos pontos exteriores de Y chama-se exterior de Y e denota-se por $\text{ext}Y$.

- (4) Um ponto x de X diz-se ponto de acumulação de Y se

$$(\forall V \in \mathcal{V}_x) \quad V \cap (Y \setminus \{x\}) \neq \emptyset;$$

isto é, se $x \in \overline{Y \setminus \{x\}}$.

O conjunto dos pontos de acumulação de Y chama-se derivado de Y e denota-se Y' .

Um ponto $x \in Y$ diz-se ponto isolado de Y se não for ponto de acumulação.

EXEMPLOS.

- (1) Se \mathcal{T} é a topologia discreta em X , qualquer que seja $Y \subseteq X$, $\text{fr}Y = \emptyset$, $\text{ext}Y = X \setminus Y$ e $Y' = \emptyset$; logo, todos os pontos de Y são isolados.
- (2) Se \mathcal{T} é a topologia indiscreta em X , então, se Y é um subconjunto próprio não vazio de X , Y é denso e $\text{fr}Y = X$. Quanto ao conjunto derivado, se Y for um conjunto singular, então $Y' = X \setminus Y$, enquanto que $Y' = X$ desde que Y tenha pelo menos dois pontos.
- (3) Em \mathbb{R} , com a topologia euclidiana,
 - (a) $\text{fr}(]a, b[) = \text{fr}([a, b]) = \{a, b\}$, $\text{fr}(\{x\}) = \{x\}$, $\text{fr}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$;
 - (b) $\text{ext}(]a, b[) =] - \infty, a[\cup]b, +\infty[$, $\text{ext}(\{x\}) = \mathbb{R} \setminus \{x\}$, $\text{ext}\mathbb{Q} = \emptyset$;
 - (c) $([a, b])' = [a, b]$, $\{x\}' = \emptyset$, $\mathbb{N}' = \emptyset$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

7 Topologia produto

TOPOLOGIA PRODUTO

Sejam (X, \mathcal{T}_X) e (Y, \mathcal{T}_Y) espaços topológicos. A topologia \mathcal{T} em $X \times Y$ gerada pela base

$$\mathcal{B} = \{U \times V; U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

chama-se **topologia produto** de \mathcal{T}_X e \mathcal{T}_Y .

[Ao espaço topológico $(X \times Y, \mathcal{T})$ chama-se **espaço produto**.]

Proposição. *Se \mathcal{T} é a topologia produto de \mathcal{T}_X e \mathcal{T}_Y , então:*

- (1) *As projecções $p_X : (X \times Y, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ e $p_Y : (X \times Y, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ são contínuas (e abertas).*
- (2) *Uma função $f : (Z, \mathcal{T}_Z) \rightarrow (X \times Y, \mathcal{T})$ é contínua se e só se as funções compostas $p_X \circ f : (Z, \mathcal{T}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ e $p_Y \circ f : (Z, \mathcal{T}_Z) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ são contínuas.*

Demonstração. 1. Para verificar que $p_X : X \times Y \rightarrow X$ é contínua, basta notar que, se $U \in \mathcal{T}_X$, então $p_X^{-1}(U) = \{(x, y) \in X \times Y; x \in U\} = U \times Y$, que é aberto em $X \times Y$.

Para provar que p_X é aberta, consideremos $A \in \mathcal{T}$; isto é, $A = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$, com cada $U_i \in \mathcal{T}_X$ e cada

$V_i \in \mathcal{T}_Y$. Se $A = \emptyset$, então $p_X(A) = \emptyset$ é aberto. Se $A \neq \emptyset$, podemos supor que, para todo o $i \in I$, $V_i \neq \emptyset$. Nesse caso $p_X(A) = p_X(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.

A demonstração de que a função p_Y é contínua e aberta é análoga.

2. Se f é contínua, então $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ são contínuas, porque são composições de funções contínuas. Para provar o recíproco, suponhamos que $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ são contínuas. Seja $U \times V$ um elemento da base \mathcal{B} da topologia produto. Então

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z; f(z) \in U \times V\} \\ &= \{z \in Z; p_X(f(z)) \in U \wedge p_Y(f(z)) \in V\} \\ &= (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_Y \circ f)^{-1}(V), \end{aligned}$$

que é aberto porque $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ são contínuas. ■

Corolário. Se $f : Z \rightarrow X$ e $g : Z \rightarrow Y$ são funções entre espaços topológicos, e se considerarmos o conjunto $X \times Y$ munido da topologia produto, a função

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle : Z &\longrightarrow X \times Y \\ x &\longmapsto (f(x), g(x)) \end{aligned} \quad \text{é contínua se e só se } f \text{ e } g \text{ o são.}$$

Demonstração. Pela proposição anterior sabemos que $\langle f, g \rangle : Z \rightarrow X \times Y$ é contínua se e só se $p_X \circ \langle f, g \rangle$ e $p_Y \circ \langle f, g \rangle$ o são. Para concluir o resultado basta notar que $p_X(\langle f, g \rangle(z)) = p_X(f(z), g(z)) = f(z)$ e que $p_Y(\langle f, g \rangle(z)) = g(z)$, isto é $p_X \circ \langle f, g \rangle = f$ e $p_Y \circ \langle f, g \rangle = g$. ■

[A definição e os resultados anteriores são facilmente generalizáveis ao produto finito de espaços topológicos.]

EXEMPLOS.

- (1) A topologia euclidiana em \mathbb{R}^n é a topologia produto das topologias euclidianas em cada um dos factores \mathbb{R} .
- (2) Sejam $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1 \leq i \leq n}$ espaços topológicos.
 - (a) Se, para todo o i , \mathcal{T}_i é a topologia indiscreta em X_i , então a topologia produto da família $(\mathcal{T}_i)_{1 \leq i \leq n}$ é a topologia indiscreta em $\prod_{1 \leq i \leq n} X_i$.
 - (b) Se, para todo o i , \mathcal{T}_i é a topologia discreta em X_i , então a topologia produto da família $(\mathcal{T}_i)_{1 \leq i \leq n}$ é a topologia discreta em $\prod_{1 \leq i \leq n} X_i$.

8 Sucessões convergentes

SUCESSÃO CONVERGENTE

Se (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico, uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X converge para $x \in X$ se

$$(\forall V \in \mathcal{V}_x) (\exists p \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) n \geq p \Rightarrow x_n \in V.$$

Diz-se então que x é um limite da sucessão (x_n) .

Uma sucessão em (X, \mathcal{T}) que convirja para algum $x \in X$ diz-se uma **sucessão convergente**.

Um ponto $y \in X$ é ponto aderente de (x_n) se

$$(\forall V \in \mathcal{V}_y)(\forall p \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) : n \geq p \text{ e } x_n \in V.$$

Lema. Um ponto y de (X, \mathcal{T}) é um ponto aderente de uma sucessão (x_n) em X se e só se

$$y \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n; n \geq p\}}.$$

OBSERVAÇÕES.

- (1) Uma sucessão pode convergir para mais do que um ponto.
- (2) Se x é um limite de (x_n) , então é ponto aderente de (x_n) . O recíproco não se verifica.
- (3) Toda a sucessão constante – ou constante a partir de alguma ordem – igual a x é convergente, e converge para x .

EXEMPLOS.

- (1) Num espaço discreto uma sucessão é convergente se e só se é constante a partir de alguma ordem.
- (2) Num espaço indiscreto toda a sucessão é convergente, e converge para todo o ponto do espaço.

Proposição. *Se $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ é uma função contínua e (x_n) é uma sucessão que converge para x em X , então $f(x_n)$ converge para $f(x)$ em Y .*

Demonstração. Seja $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Por definição de função contínua, existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $f(U) \subseteq V$. Como $x_n \rightarrow x$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, então $x_n \in U$. Logo, se $n \geq p$, $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$. ■

Proposição. *Se A é um subconjunto de (X, \mathcal{T}) e (x_n) é uma sucessão em A que converge para x em X , então $x \in \bar{A}$.*

Demonstração. Se $V \in \mathcal{V}_x$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, $x_n \in V$. Como todos os termos da sucessão pertencem a A , concluímos que, para $n \geq p$, $x_n \in V \cap A$, logo $V \cap A \neq \emptyset$ e então $x \in \bar{A}$. ■

9 Espaços topológicos separados

ESPAÇO SEPARADO

Um espaço topológico diz-se um **espaço de Hausdorff**, ou **espaço separado**, ou **espaço T_2** , se

$$(\forall x, y \in X) \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad (\exists U \in \mathcal{V}_x) \quad (\exists V \in \mathcal{V}_y) \quad : \quad U \cap V = \emptyset.$$

Proposição. *Se (X, \mathcal{T}) é um espaço separado e se x e y são limites de uma sucessão (x_n) em X , então $x = y$.*

Demonstração. Suponhamos que (x_n) converge para x e para y . Se $U \in \mathcal{V}_x$ e $V \in \mathcal{V}_y$, então existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que, se $n \geq p$, $x_n \in U$ e, se $n \geq q$, $x_n \in V$. Logo, se $n \geq p$ e $n \geq q$, temos que $x_n \in U \cap V$, e então $U \cap V \neq \emptyset$. Num espaço separado isto significa que $x = y$. ■

EXEMPLOS.

- (1) Todo o espaço topológico metrizável é separado; em particular, \mathbb{R}^n , assim como todo o espaço discreto, é separado.

(2) Se $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$, então $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é separado.

(3) Se \mathcal{T} é a topologia indiscreta num conjunto X com mais do que um ponto, então (X, \mathcal{T}) não é separado.

Teorema. *As seguintes condições são equivalentes, para um espaço topológico (X, \mathcal{T}) :*

(i) o espaço X é separado;

(ii) $(\forall x, y \in X) x \neq y \Rightarrow (\exists A, B \in \mathcal{T}) : x \in A, y \in B, e A \cap B = \emptyset$;

(iii) o conjunto $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$ é um subconjunto fechado no espaço produto $X \times X$.

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii): Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Por (i) existem $U \in \mathcal{V}_x$ e $V \in \mathcal{V}_y$ tais que $U \cap V = \emptyset$. Por definição de vizinhança, existem $A \in \mathcal{T}$ e $B \in \mathcal{T}$ tais que $x \in A \subseteq U$ e $y \in B \subseteq V$. De $U \cap V = \emptyset$ conclui-se que $A \cap B = \emptyset$.

(ii) \Rightarrow (iii): Provar que Δ é fechado é provar que, qualquer que seja $(x, y) \in X \times X$ com $x \neq y$, $(x, y) \notin \overline{\Delta}$. Isto segue imediatamente de (ii), pois se $A, B \in \mathcal{T}$ são tais que $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$ então $(A \times B) \cap \Delta = \emptyset$.

(iii) \Rightarrow (i): Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Então $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$, que é aberto por (iii). Logo, por definição de topologia produto, existem abertos U, V de X tais que $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$. Daqui se conclui que $U \in \mathcal{V}_x, V \in \mathcal{V}_y$ e $U \cap V = \emptyset$, como queríamos provar. ■

Proposição. *Sejam Y um espaço de Hausdorff e $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Então:*

(1) O conjunto $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ é fechado em X .

(2) Se f coincide com g num subconjunto denso de X , então $f = g$.

Demonstração. (1) Se $f, g : X \rightarrow Y$ são contínuas, então $\langle f, g \rangle : X \rightarrow Y \times Y$ é contínua. Logo, $\langle f, g \rangle^{-1}(\Delta)$ é um subconjunto fechado de X , porque Δ é fechado em $Y \times Y$. De

$$\langle f, g \rangle^{-1}(\Delta) = \{x \in X; ((f(x), g(x)) \in \Delta)\} = \{x \in X; f(x) = g(x)\},$$

segue agora o resultado.

(2) é agora óbvio, uma vez que, por (1), se tem $\{x \in X; f(x) = g(x)\} = \overline{\{x \in X; f(x) = g(x)\}}$, que por sua vez é denso, ou seja

$$\{x \in X; f(x) = g(x)\} = \overline{\{x \in X; f(x) = g(x)\}} = X. \quad \blacksquare$$

Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos, com Y separado. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua, então o gráfico de f , $\Gamma_f := \{(x, f(x)); x \in X\}$, é fechado em $X \times Y$.*

Demonstração. Consideremos os espaços produto $Y \times Y$, com projecções $p_1 : Y \times Y \rightarrow Y$, $p_2 : Y \times Y \rightarrow Y$, e $X \times Y$, com projecções $p_X : X \times Y \rightarrow X$, $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$. A função $F : X \times Y \rightarrow Y \times Y$, definida por $F(x, y) = (f(x), y)$ é contínua, pois ao compô-la com as projecções p_1 e p_2 obtemos funções contínuas:

$$p_1 \circ F = f \circ p_X \quad e \quad p_2 \circ F = \text{id}_Y \circ p_Y.$$

Agora é fácil observar que $F^{-1}(\Delta) = \Gamma_f$, logo Γ_f é fechado porque é a imagem inversa de um fechado por uma função contínua. ■

10 Espaços topológicos conexos

ESPAÇO CONEXO

Um espaço topológico (X, \mathcal{T}) diz-se **conexo** se não for reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos não vazios.

[Um espaço diz-se desconexo se não for conexo.]

Proposição. *Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) (X, \mathcal{T}) é um espaço conexo.
- (iii) X não é reunião de dois subconjuntos fechados disjuntos não vazios.
- (iii) Se U é um subconjunto aberto e fechado de (X, \mathcal{T}) , então $U = X$ ou $U = \emptyset$.
- (iv) Qualquer aplicação contínua $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{T}_d)$, onde \mathcal{T}_d é a topologia discreta, é constante.

SUBCONJUNTO CONEXO

Um subconjunto A de (X, \mathcal{T}) diz-se **conexo** se o subespaço (A, \mathcal{T}_A) for conexo.

EXEMPLOS.

- (1) Se $\text{card}X \leq 1$, X é um espaço conexo.
- (2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e \mathbb{Q} são subconjuntos desconexos de \mathbb{R} .
- (3) Se X é um espaço discreto, então X é conexo se e só se tem quando muito um ponto.
- (4) Se X é um espaço indiscreto, então X é conexo.
- (5) Se X é um conjunto infinito munido da topologia cofinita, então X é conexo.

Proposição. *Se A é um subconjunto de (X, \mathcal{T}) denso e conexo, então (X, \mathcal{T}) é conexo.*

Demonstração. Se B for um subconjunto aberto e fechado de X , $B \cap A$ é um subconjunto aberto e fechado de A . Como A é conexo, $B \cap A = \emptyset$ ou $B \cap A = A$. Se se verificar a primeira igualdade, A é um subconjunto de $X \setminus B$, que é fechado em X . Logo $X = \overline{A} \subseteq X \setminus B$ e então $B = \emptyset$. Se $B \cap A = A$, então $A \subseteq B$, logo, porque B é fechado, $X = \overline{A} \subseteq B$ e então $B = X$. ■

Corolário. *Se A é um subconjunto conexo de (X, \mathcal{T}) e B é um subconjunto de X tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B é conexo.*

Demonstração. Se considerarmos B com a topologia de subespaço, A é um subconjunto denso de B . Como A é conexo, concluímos que B é conexo, pela proposição anterior. ■

Proposição. *Sejam A e B subconjuntos de (X, \mathcal{T}) , com A conexo. Se*

$$A \cap \text{int}(B) \neq \emptyset \neq A \cap \text{int}(X \setminus B),$$

então $A \cap \text{fr}B \neq \emptyset$.

Demonstração. Como $X = \text{int}(B) \cup \text{fr}B \cup \text{int}(X \setminus B)$, e então

$$A = (A \cap \text{int}(B)) \cup (A \cap \text{fr}B) \cup (A \cap \text{int}(X \setminus B)),$$

se $A \cap \text{fr}B = \emptyset$, concluímos que A se pode escrever como reunião de dois abertos disjuntos: $A = (A \cap \text{int}(B)) \cup (A \cap \text{int}(X \setminus B))$. Logo um destes tem que ser vazio, o que contraria a hipótese. ■

Proposição. *Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos conexos de (X, \mathcal{T}) . Se $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, então*

$\bigcup_{i \in I} A_i$ é um subconjunto conexo de (X, \mathcal{T}) .

Demonstração. Seja B um subconjunto aberto e fechado de $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Se B for não vazio, existe $j \in I$ tal que $B \cap A_j \neq \emptyset$. Logo, como A_j é, por hipótese, conexo e $B \cap A_j$ é aberto e fechado em A_j , conclui-se que $B \cap A_j = A_j$. Como, para todo o $i \in I$, $A_j \cap A_i \neq \emptyset$, $B \cap A_i \neq \emptyset$ e então concluímos que $B = A_i$. Portanto $B = A$ e então A é conexo. ■

Corolário.

(1) *Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos conexos de (X, \mathcal{T}) que se intersectam dois a dois (isto é, para todo o par i, j em I , $A_i \cap A_j \neq \emptyset$), então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é um subconjunto conexo de (X, \mathcal{T}) .*

(2) *Se (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico tal que, para cada par de pontos x e y de X , existe um subconjunto conexo que os contém, então (X, \mathcal{T}) é conexo.*

Teorema. *Um subconjunto de \mathbb{R} é conexo se e só se é um intervalo.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $S \subseteq \mathbb{R}$ não for um intervalo, existem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x < y < z$, $x, z \in S$ e $y \notin S$. Então S é reunião de dois subconjuntos abertos, não vazios, disjuntos:

$$S = (S \cap] - \infty, y[) \cup (S \cap]y, +\infty[).$$

(\Leftarrow) Suponhamos agora que I é um intervalo. Suponhamos, por redução ao absurdo, que existem subconjuntos A e B abertos e fechados em I , disjuntos, não vazios, cuja reunião é I . Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Suponhamos que $a < b$. O intervalo $[a, b]$ está contido em I , porque I é um intervalo e $a, b \in I$. Sejam $A' = A \cap [a, b]$ e $B' = B \cap [a, b]$, e seja $b' = \inf B'$. Como A' e B' são fechados em $[a, b]$, também são fechados em \mathbb{R} . Logo $b' \in B'$ e então $a < b'$. Sejam $A'' = A' \cap [a, b']$ e $a'' = \sup A''$. Então $a'' \in A''$, porque A'' é fechado, logo $a'' < b'$. Podemos então concluir que o intervalo aberto $]a'', b'[$ não intersecta A' nem B' , donde não intersecta I , o que é absurdo. ■

Proposição. *Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e sobrejectiva e X é conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. Se $B \subseteq Y$ é aberto e fechado em Y , também $f^{-1}(B)$ é aberto e fechado em X . Logo, porque X é conexo, $f^{-1}(B) = \emptyset$, caso em que necessariamente $B = \emptyset$, ou $f^{-1}(B) = X$, caso em que $B = f(f^{-1}(B)) = f(X) = Y$. ■

Corolário.

- (1) Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e A é um subconjunto conexo de X , então $f(A)$ é um subconjunto conexo de Y .
- (2) Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então X é conexo se e só se Y o é.
- (3) Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e X é conexo, então $f(X)$ é um intervalo.
- (4) Em \mathbb{R}^2 , com a métrica euclidiana, qualquer bola aberta é conexa.

Teorema. Se (X, \mathcal{T}_X) e (Y, \mathcal{T}_Y) são espaços não vazios e \mathcal{T} é a topologia produto de \mathcal{T}_X e \mathcal{T}_Y , então $(X \times Y, \mathcal{T})$ é conexo se e só se (X, \mathcal{T}_X) e (Y, \mathcal{T}_Y) o são.

Demonstração. Se $X \times Y$ for conexo, então, porque as projecções são funções contínuas e sobrejectivas, X e Y são conexos.

Suponhamos agora que X e Y são conexos. Seja $(a, b) \in X \times Y$. Os subconjuntos $\{a\} \times Y$ e $X \times \{b\}$ de $X \times Y$ são conexos, porque são imagens, por funções contínuas, de Y e X , respectivamente. Além disso, a sua intersecção é não vazia (é igual a $\{(a, b)\}$), logo o subconjunto $S_{(a,b)} = (\{a\} \times Y) \cup (X \times \{b\})$ é conexo, porque é a reunião de dois conexos que se intersectam. Para concluir que $X \times Y$ é conexo, basta agora reparar que $X \times Y = \bigcup_{(a,b) \in X \times Y} S_{(a,b)}$ e que, para cada par de pontos $(a, b), (a', b') \in X \times Y$, $S_{(a,b)} \cap S_{(a',b')} \neq \emptyset$. ■

EXEMPLOS. \mathbb{R}^2 é conexo; o complementar de um ponto em \mathbb{R}^2 é ainda conexo, mas o complementar de uma recta é desconexo.

COMPONENTE CONEXA

Se X é um espaço topológico e $x \in X$, chama-se **componente conexa de x** ao maior conexo que contém x (e será designada por C_x).

[Nota: Como a família de todos os subconjuntos conexos de X que contém x é uma família de conexos com intersecção não vazia, a sua reunião é necessariamente o maior conexo que contém x .]

Proposição.

- (1) Se $x, y \in X$, então $C_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \emptyset$.
- (2) Toda a componente conexa é fechada (mas pode não ser aberta).

EXEMPLOS.

- (1) Se X é um espaço discreto, então $C_x = \{x\}$.
- (2) Se X é um espaço indiscreto, então $C_x = X$, qualquer que seja $x \in X$.
- (3) Se considerarmos \mathbb{Q} com a topologia euclidiana e $x \in \mathbb{Q}$, então $C_x = \{x\}$.

Corolário.

- (1) Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua, então a imagem por f de uma componente conexa está contida numa componente conexa (mas pode não coincidir com ela).

- (2) Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo e C_x é a componente conexa de x em X , então $f(C_x)$ é a componente conexa de $f(x)$ em Y .
- (3) Dois espaços homeomorfos têm o mesmo número de componentes conexas.
- (4) Sejam (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') espaços homeomorfos. Se $x \in X$ e $X \setminus \{x\}$ tem n componentes conexas, então existe $y \in Y$ tal que $Y \setminus \{y\}$ tem n componentes conexas.

ESPAÇO CONEXO POR ARCOS

- (1) Dado um espaço topológico X , um caminho em X é uma aplicação contínua $f : [0, 1] \rightarrow X$. Diz-se que um caminho f vai de a a b se $f(0) = a$ e $f(1) = b$.
- (2) Um espaço topológico X diz-se conexo por arcos se dados quaisquer pontos a e b de X existir um caminho em X de a a b .

[Todo o espaço conexo por arcos é conexo, mas nem todo o espaço conexo é conexo por arcos. Por exemplo, o subconjunto de \mathbb{R}^2

$$X := \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right); x > 0 \right\} \cup \left\{ (0, y); y \in [-1, 1] \right\}$$

é conexo mas não é conexo por arcos.]

EXEMPLOS. Um subconjunto de \mathbb{R} é conexo se e só se é um intervalo e se e só se é conexo por arcos. Toda a bola aberta em \mathbb{R}^2 é conexa por arcos.

Proposição. *Todo o subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^2 é conexo por arcos.*

Demonstração. Sejam A um aberto conexo de \mathbb{R}^2 e $a \in A$. Consideremos o conjunto $U = \{x \in A; \text{existe um caminho de } a \text{ a } x \text{ em } A\}$. Então U e $A \setminus U$ são abertos, logo $U = A$. ■

11 Espaços topológicos compactos

COBERTURA ABERTA

Seja X um conjunto.

- (1) Uma família $(U_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X diz-se uma **cobertura de X** se $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.
- (2) Se $(U_i)_{i \in I}$ é uma cobertura de X e J é um subconjunto de I tal que $X = \bigcup_{j \in J} U_j$, então $(U_j)_{j \in J}$ diz-se uma **subcobertura de $(U_i)_{i \in I}$** ; diz-se **finita** se J for um conjunto finito.
- (3) Uma cobertura $(U_i)_{i \in I}$ de um espaço topológico X diz-se uma **cobertura aberta de X** se todo o conjunto U_i for aberto em X .

ESPAÇO COMPACTO

Um espaço topológico diz-se **compacto** se toda a sua cobertura aberta tiver uma subcobertura finita.

Proposição. *Um espaço X é compacto se e só se, sempre que $(F_i)_{i \in I}$ for uma família de subconjuntos fechados de X tal que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, existe $J \subseteq I$, finito, tal que $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$.* ■

Proposição. *Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico, Y um subconjunto de X e \mathcal{T}_Y a topologia de subespaço em Y . As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *O espaço (Y, \mathcal{T}_Y) é compacto.*

(ii) *Sempre que $(U_i)_{i \in I}$ for uma família de elementos de \mathcal{T} tal que $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, existe um subconjunto finito J de I tal que $Y \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$.* ■

Teorema de Heine-Borel. *Dado um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ de \mathbb{R} , de toda a cobertura aberta de $[a, b]$ é possível extrair uma subcobertura finita.*

Demonstração. Seja $(U_i)_{i \in I}$ uma família de abertos de \mathbb{R} tais que $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Sejam

$$Y = \{x \in [a, b]; [a, x] \text{ está contido numa reunião finita de elementos de } (U_i)_{i \in I}\}$$

e $y = \sup Y$. Existe $j \in I$ tal que $y \in U_j$, e então $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subseteq U_j$ para algum $\varepsilon > 0$. Como $y \in \bar{Y}$, existe $x \in Y \cap]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$. Como $x \in Y$, $[a, x] \subseteq \bigcup_{k=1, \dots, n} U_{i_k}$, logo $[a, y] \subseteq \bigcup_{k=1, \dots, n} U_{i_k} \cup U_j$ e então $y \in Y$. Se $y = b$, temos o resultado provado. Se $y < b$, chegamos a uma contradição, pois qualquer ponto de $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ entre y e b ainda pertence a Y , o que contraria o facto de y ser o supremo do conjunto. ■

EXEMPLOS.

- (1) Todo o espaço finito é compacto.
- (2) Se X é um espaço discreto, então X é compacto se e só se é finito.
- (3) Todo o espaço indiscreto é compacto.
- (4) \mathbb{R} não é compacto. O espaço $]0, 1]$, com a topologia euclidiana, não é compacto.

Proposição.

- (1) *Todo o subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*
- (2) *Todo o subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração. (1) Sejam X um espaço de Hausdorff, K um subespaço compacto de X e $x \in X \setminus K$. Queremos provar que $x \notin \overline{K}$. Para cada $y \in K$ existem abertos U_y e V_y tais que $x \in U_y$, $y \in V_y$ e $U_y \cap V_y = \emptyset$. A família $(V_y)_{y \in K}$ constitui uma cobertura aberta de K , que, por K ser compacto, tem uma subcobertura finita $(V_y)_{y \in F}$. Obtemos então considerar o conjunto aberto $\bigcap_{y \in F} U_y$, ao qual x pertence e que não intersecta $\bigcup_{y \in F} V_y \supseteq K$. Logo $x \notin \overline{K}$, como queríamos demonstrar.

(2) Suponhamos que X é compacto e que F é um subespaço fechado de X . Qualquer que seja a família $(U_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abertos de X que cubra F , a família $(U_i)_{i \in I \cup \{0\}}$ obtida juntando à primeira o conjunto aberto $U_0 = X \setminus F$ é uma cobertura aberta de X . Logo, porque X é compacto, tem uma subcobertura finita, o que prova em particular que F é coberto por uma parte finita da família (U_i) . ■

Corolário. *Se o espaço X é compacto e de Hausdorff e Y é um subespaço de X , então Y é compacto se e só se é fechado em X .* ■

Proposição. *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e A é um subespaço compacto de X , então $f(A)$ é um subespaço compacto de Y .*

Demonstração. Se $(U_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de Y que cobre $f(A)$, então $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ é uma família de abertos de X que cobre A . Como A é compacto, existe um subconjunto finito J de I tal que $A \subseteq \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$. Logo, $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(U_i)) \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$, o que prova que $f(A)$ é compacto. ■

Corolário.

- (1) *Se X é um espaço compacto e Y um espaço separado, então toda a aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é fechada.*
- (2) *Se X é compacto e Y é separado, então toda a aplicação bijectiva e contínua $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo.* ■

Teorema de Tychonoff. *Sejam X e Y espaços topológicos não vazios. O espaço produto $X \times Y$ é compacto se e só se X e Y são compactos.*

Demonstração. Se X e Y são não vazios, as projecções p_X e p_Y são aplicações sobrejectivas. Logo, se $X \times Y$ é compacto, $p_X(X \times Y) = X$ e $p_Y(X \times Y) = Y$ são compactos.

Reciprocamente, sejam X e Y compactos e \mathcal{U} uma cobertura aberta de $X \times Y$. Seja $x \in X$. Para cada $y \in Y$ existe $U_{(x,y)} \in \mathcal{U}$ tal que $(x, y) \in U_{(x,y)}$. Por construção da topologia produto, existem abertos $A_{(x,y)}$ e $B_{(x,y)}$ de X e Y respectivamente tais que $(x, y) \in A_{(x,y)} \times B_{(x,y)} \subseteq U_{(x,y)}$. Obtemos assim uma cobertura aberta $(B_{(x,y)})_{y \in Y}$ de Y , a qual, como Y é compacto, tem uma subcobertura finita $(B_{(x,y)})_{y \in Y_x}$. O conjunto $A_x = \bigcap_{y \in Y_x} A_{(x,y)}$ é um aberto de X (porque intersecção finita de abertos) ao qual x pertence. Fazamos agora esta construção para todo o $x \in X$. Obtemos uma cobertura aberta $(A_x)_{x \in X}$, que, por X ser compacto, tem uma subcobertura finita $(A_x)_{x \in X_0}$. É fácil ver agora que a família finita $(U_{(x,y)})_{x \in X_0, y \in Y_x}$ é uma cobertura aberta de $X \times Y$, pois, para cada $(a, b) \in X \times Y$, existem $x \in X_0$ e $y \in Y_x$ tais que $a \in A_x$ e $b \in B_{(x,y)}$; logo, $(a, b) \in A_x \times B_{(x,y)} \subseteq A_{(x,y)} \times B_{(x,y)} \subseteq U_{(x,y)}$. ■

Teorema de Kuratowski-Mrowka. *Um espaço topológico X é compacto se e só se, para cada espaço Y , a projecção $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$ é fechada.* ■

Proposição. *Todo o espaço métrico compacto é limitado.*

Demonstração. Sejam X um espaço métrico compacto e $a \in X$. A cobertura aberta $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(a)$ tem uma subcobertura finita, isto é, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X = B_m(a)$. Logo, X é limitado. ■

Teorema. *Um subespaço de \mathbb{R}^n é compacto se e só se é fechado e limitado.*

Demonstração. Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ for fechado e limitado, então é subconjunto fechado de um cubo $[a, b]^n$, que é compacto porque é produto de compactos. Logo, é compacto.

Suponhamos agora que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto. Então é fechado em \mathbb{R}^n , porque \mathbb{R}^n é separado, e é limitado, como já vimos. ■

12 Sucessões convergentes e de Cauchy em espaços métricos

Lema. *Num espaço métrico uma sucessão não pode convergir para dois pontos distintos.* ■

Teorema. *Se X é um espaço métrico e A é um subconjunto de X , então um ponto x de X pertence a \overline{A} se e só se existe uma sucessão em A que converge para x em X .*

Demonstração. Já vimos que, em qualquer espaço topológico, se x é limite de uma sucessão que toma valores em $A \subseteq X$, então $x \in \overline{A}$. Falta-nos então ver que, se X é um espaço métrico, o recíproco também se verifica. Sejam X um espaço métrico, $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, a bola aberta $B_{\frac{1}{n}}(x)$ intersecta A . Seja $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Verifica-se agora facilmente que a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que toma valores em A , converge para x . ■

Corolário. *Um subconjunto A de um espaço métrico X é fechado se e só se toda a sucessão convergente com valores em A tem o seu limite em A .* ■

Teorema. *Se X e Y são espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ é uma função, então f é contínua se e só se, sempre que (x_n) é uma sucessão em X que converge para x , a sucessão $(f(x_n))$ converge para $f(x)$.*

Demonstração. Para toda a função contínua f entre espaços topológicos, se (x_n) converge para x , então $(f(x_n))$ converge para $f(x)$, como provámos atrás. Resta-nos provar que esta condição caracteriza as funções contínuas entre espaços métricos. Suponhamos que X e Y são espaços métricos e que $f : X \rightarrow Y$ é tal que, se (x_n) converge para x em X , então $(f(x_n))$ converge para $f(x)$ em Y . Seja B um fechado de Y . Queremos provar que a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de B por f é fechada em X . Seja $x \in \overline{f^{-1}(B)}$. Pelo teorema anterior, existe uma sucessão (x_n) em $f^{-1}(B)$ que converge para x . Logo, por hipótese, $f(x_n)$ converge para $f(x)$. Como $(f(x_n))$ é uma sucessão que toma valores em B e B é por hipótese fechado, podemos concluir que o seu limite, $f(x)$, ainda pertence a B . Logo $x \in f^{-1}(B)$ e então este conjunto é fechado, como queríamos provar. ■

Proposição. *Num espaço métrico todo o ponto aderente a uma sucessão é limite de uma sub-sucessão da sucessão dada.*

Demonstração. Seja a um ponto aderente da sucessão (x_n) no espaço métrico X . Vamos usar recorrência para construir uma sub-sucessão de (x_n) que convirja para a . Para $n = 1$, existe $p(1) \in \mathbb{N}$ tal que $x_{p(1)} \in B_1(a)$, por definição de ponto aderente e uma vez que $B_1(a)$ é uma vizinhança de a . Para $n = 2$, existe $p(2) \in \mathbb{N}$ tal que $p(2) > p(1)$ e $x_{p(2)} \in B_{\frac{1}{2}}(a)$, por definição de ponto aderente. Definido $p(k)$, para $k \in \mathbb{N}$, escolhamos $p(k+1) \in \mathbb{N}$ de forma que $p(k+1) > p(k)$ e $x_{p(k+1)} \in B_{\frac{1}{k+1}}(a)$. A sucessão assim definida é, por construção, uma sub-sucessão de (x_n) que converge para a . ■

SUCESSÃO DE CAUCHY

Uma sucessão (x_n) num espaço métrico (X, d) diz-se uma **sucessão de Cauchy** se verificar a seguinte condição: $(\forall \varepsilon > 0) (\exists p \in \mathbb{N}) : (\forall n, m \in \mathbb{N}) n \geq p, m \geq p \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Nem toda a sucessão de Cauchy é convergente: por exemplo, a sucessão $(\frac{\sqrt{2}}{n})$ é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (com a métrica euclidiana) mas não converge neste espaço métrico.

Proposição.

(1) *Toda a sucessão convergente num espaço métrico é de Cauchy.*

(2) *Toda a sucessão de Cauchy é limitada.*

Demonstração. (1) Seja (x_n) uma sucessão que converge para x no espaço métrico (X, d) , e seja $\varepsilon > 0$. Por definição de sucessão convergente, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, então $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, se $n \geq p$ e $m \geq p$, obtemos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) Seja (x_n) uma sucessão de Cauchy no espaço métrico (X, d) .

Para $\varepsilon = 1$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq p$, então $d(x_n, x_m) < 1$. Então a bola aberta $B_1(x_p)$ contém todos os termos da sucessão de ordem igual ou superior a p . Resta-nos agora limitar os restantes termos x_1, \dots, x_{p-1} , que são em número finito. Podemos então considerar $r = \max\{d(x_i, x_p); i \leq p\} + 1$. É óbvio que todos os termos da sucessão se encontram na bola aberta $B_r(x_p)$ e então a sucessão é limitada. ■

Proposição. *Toda a sucessão de Cauchy com uma subsucessão convergente é convergente.*

Demonstração. Seja x o limite de uma subsucessão $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ da sucessão de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Queremos provar que (x_n) também converge para x . Seja $\varepsilon > 0$. Porque $(x_{\varphi(n)})$ converge para x , existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, $d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por outro lado, porque (x_n) é de Cauchy, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq q$, então $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Consideremos agora $r = \max\{\varphi(p), q\}$. Para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq r$, obtemos

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varphi(r)}) + d(x_{\varphi(r)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pois de $n \geq r \geq q$ e $\varphi(r) \geq r \geq q$ segue que $d(x_n, x_{\varphi(r)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ e de $r \geq p$ segue que $d(x_{\varphi(r)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo (x_n) converge para x . ■

Corolário. *Se (x_n) é uma sucessão num espaço métrico, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (x_n) é convergente;

(ii) (x_n) é de Cauchy e tem um ponto aderente;

(iii) (x_n) é de Cauchy e tem uma subsucessão convergente. ■

13 Espaços métricos completos

ESPAÇO MÉTRICO COMPLETO

Um espaço métrico (X, d) diz-se **completo** se toda a sucessão de Cauchy em X for convergente.

EXEMPLOS.

- (1) \mathbb{R} é um espaço métrico completo.
- (2) \mathbb{Q} e $]0, 1]$, com a métrica euclidiana, não são espaços completos.

Proposição.

- (1) Se Y é um subespaço completo de um espaço métrico X , então Y é fechado em X .
- (2) Se X é um espaço métrico completo e Y é um subconjunto de X , então Y é um subespaço métrico completo se e só se é fechado em X .

Demonstração. (1) Se $x \in \overline{Y}$, existe uma sucessão (y_n) em Y que converge para x . A sucessão (y_n) é então de Cauchy, logo converge em Y para um ponto $y \in Y$. Nesse caso também converge em X para y e então podemos concluir que $x = y \in Y$, pela unicidade do limite.

(2) Temos apenas que provar que um subconjunto fechado Y de um espaço completo X é um espaço completo. Seja (y_n) uma sucessão de Cauchy em Y . Então (y_n) é uma sucessão de Cauchy em X , logo converge para $x \in X$, visto que X é completo. Como Y é fechado, concluímos que $x \in Y$ e então (y_n) é convergente em Y . ■

Proposição. *Todo o espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração. Sejam X um espaço métrico compacto e (x_n) uma sucessão de Cauchy em X . Se (x_n) não for convergente, então não tem nenhum ponto aderente. Logo, para cada $a \in X$, existe $U_a \in \mathcal{T}$ tal que $a \in U_a$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq n$, então $x_m \notin U_a$. A cobertura aberta assim obtida $(U_a)_{a \in X}$ tem uma subcobertura finita: $X = \bigcup_{i=1}^k U_{a_i}$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, por construção da cobertura existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq n_i$, então $x_m \notin U_{a_i}$. Logo podemos concluir que, se $m \geq \max\{n_i; i = 1, \dots, k\}$, $x_m \notin \bigcup_{i=1}^k U_{a_i} = X$, o que é absurdo. ■

Teorema. *Se X é um conjunto não vazio e (Y, d) um espaço métrico, então o espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ das funções limitadas de X em Y , munido da métrica do supremo*

$$\rho(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x)); x \in X\},$$

é um espaço completo se e só se (Y, d) é completo.

Demonstração. (\Rightarrow): Seja (y_n) uma sucessão de Cauchy em Y . Consideremos as funções constantes $f_n : X \rightarrow Y$ com $f_n(x) = y_n$. A sucessão de funções (f_n) é de Cauchy em $\mathcal{L}(X, Y)$, pois $\rho(f_n, f_m) =$

$d(y_n, y_m)$. Logo a sucessão (f_n) converge para uma função $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{L}(X, Y)$. Sejam $x \in X$ e $y = f(x)$. Então, como $d(y_n, y) \leq \rho(f_n, f)$, é agora fácil concluir que (y_n) converge para y em (Y, d) .

(\Leftarrow): Seja $(f_n : X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $\mathcal{L}(X, Y)$. Para cada $x \in X$, $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \rho(f_n, f_m)$; logo $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em Y . Como Y é completo, $(f_n(x))$ é uma sucessão convergente. Designando por $f(x)$ o seu limite, construímos uma função $f : X \rightarrow Y$. Falta-nos provar que a sucessão (f_n) converge para f e que f é uma função limitada.

Seja $\varepsilon > 0$. Porque a sucessão (f_n) é de Cauchy, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$ e $m \geq p$, então $\rho(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Para cada $x \in X$, como $f_n(x) \rightarrow f(x)$ em Y , existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq q$, então $d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Logo, se $n \geq p$, temos que

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)),$$

qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Considerando $m = \max\{p, q\}$, obtemos

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

o que prova que

$$\rho(f_n, f) = \sup\{d(f_n(x), f(x)); x \in X\} \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

É agora imediato que f é limitada. ■

Proposição. *Se (X, d') e (Y, d) são espaços métricos, então o espaço métrico $\mathcal{C}^*(X, Y)$ das funções limitadas e contínuas de (X, d) em (Y, d') , munido da métrica do supremo, é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Demonstração. Seja $(f_n : (X, d) \rightarrow (Y, d'))_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções contínuas e seja $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ o seu limite em $\mathcal{L}(X, Y)$. Queremos provar que $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é contínua. Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como $f_n \rightarrow f$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, então $\rho(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. A continuidade da função f_p em x garante-nos que existe $\delta > 0$ tal que, se $x' \in X$ e $d(x, x') < \delta$, então $d'(f_p(x), f_p(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$. Logo, se $x' \in X$ e $d(x, x') < \delta$, temos que

$$d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), f_p(x)) + d'(f_p(x), f_p(x')) + d'(f_p(x'), f(x')) < \rho(f, f_p) + \frac{\varepsilon}{3} + \rho(f, f_p) = \varepsilon.$$

■

Corolário. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. O espaço $\mathcal{C}^*(X, Y)$ é um espaço métrico completo se e só se (Y, d') é completo.*

Demonstração. Para provar (\Rightarrow) usa-se exactamente a argumentação usada no Teorema anterior, pois as funções constantes são também contínuas.

(\Leftarrow): Se (Y, d') for completo, então $\mathcal{C}(X, Y)$ é um subespaço fechado do espaço completo $\mathcal{L}(X, Y)$.

■

OBSERVAÇÃO. Se considerarmos o seguinte subespaço de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$

$$A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}); \rho(f, g) \leq 1\}$$

onde g é a função nula, então A é completo e limitado, mas não é compacto.

Teorema. *Todo o espaço métrico é subespaço denso de um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja X um espaço métrico. Consideremos no conjunto

$$\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}; (x_n) \text{ é uma sucessão de Cauchy em } X\}$$

a relação de equivalência: $(x_n) \sim (y_n)$ se a sucessão $(d(x_n, y_n))$ convergir para 0 em \mathbb{R}^+ . Seja Y o conjunto das classes de equivalência desta relação; isto é,

$$Y = \{[(x_n)]; (x_n) \text{ é uma sucessão de Cauchy em } X\}.$$

Para cada par de elementos de Y , $[(x_n)], [(y_n)]$, definimos

$$\gamma([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

(Note-se que, se (x_n) e (y_n) são sucessões de Cauchy, então $(d(x_n, y_n))$ é uma sucessão de Cauchy em \mathbb{R}^+ , logo converge.)

(a) Vejamos em primeiro lugar que a função γ está bem definida, isto é, que a expressão acima não depende dos representantes das classes escolhidos: se $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, então

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ \text{e } d(x'_n, y'_n) &\leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n). \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y'_n) = 0$, concluímos pelo Teorema das Sucessões Enquadradas que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

(b) γ é uma métrica em Y :

$$(b1) \quad \gamma([(x_n)], [(y_n)]) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow [(x_n)] = [(y_n)].$$

$$(b2) \quad \gamma([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = \gamma([(y_n)], [(x_n)]).$$

$$(b3) \quad \begin{aligned} \gamma([(x_n)], [(z_n)]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, z_n) = \gamma([(x_n)], [(y_n)]) + \gamma([(y_n)], [(z_n)]). \end{aligned}$$

(c) Podemos identificar X com um subespaço de Y através da função (injectiva)

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto [(x)] \end{aligned}$$

(onde $[(x)]$ representa a classe de equivalência da sucessão constante igual a x). Como $\gamma([(x)], [(y)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y)$, X tem a métrica de subespaço. Para verificar que X é denso em Y , isto é $\overline{f(X)} = Y$, consideremos um elemento $[(x_n)]$ de Y . A sucessão de classes de equivalência das sucessões constantes

$$y^1 = [(x_1)], \dots, y^k = [(x_k)], \dots$$

converge para $[(x_n)]$ pois $\gamma([y^k], [(x_n)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_k, x_n)$, que sabemos tender para 0 quando k tende para $+\infty$, por definição de sucessão de Cauchy.

(d) Falta verificar que Y é um espaço completo. Para isso consideremos uma sucessão $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de Y , onde, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$y^k = [(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Isto é,

$$\begin{array}{cccccc} y^1 : & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \cdots & x_n^1 & \cdots \\ y^2 : & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & \cdots \\ y^3 : & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_n^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ y^n : & x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Porque cada $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_k$ e $m \geq n_k$, então

$$d(x_n^k, x_m^k) < \frac{1}{k}.$$

Consideremos a sucessão $(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ em X e verifiquemos que é de Cauchy. Sejam $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{k} < \varepsilon$. Porque $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em Y , existe $p \in \mathbb{N}$, que podemos considerar maior ou igual a k , tal que, se $l \geq p$ e $m \geq p$, então

$$\gamma(y^l, y^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^l, x_n^m) < \frac{1}{k}.$$

Logo, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq q$, então $d(x_n^l, x_n^m) \leq \frac{1}{k}$. Donde

$$d(x_{n_l}^l, x_{n_m}^m) \leq d(x_{n_l}^l, x_n^l) + d(x_n^l, x_n^m) + d(x_n^m, x_{n_m}^m) < \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \frac{1}{m} < \frac{3}{k} < \varepsilon.$$

Falta agora verificar que $y^n \rightarrow y = [(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}]$; isto é, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(y^n, y) = 0$. Mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(y^n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k^n, x_{n_k}^k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} (d(x_k^n, x_{n_n}^n) + d(x_{n_n}^n, x_{n_k}^k)) = 0,$$

por construção de $(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$. ■

14 Espaços métricos compactos e funções uniformemente contínuas

Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos.

FUNÇÃO UNIFORMEMENTE CONTÍNUA

Uma função $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ diz-se uniformemente contínua se

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) : (\forall x, x' \in X) d(x, x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Proposição. *A composição de duas funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua.*

■

Teorema. *Se (X, d) é um espaço métrico compacto e $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é uma função contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$ existe $\delta(x) > 0$ tal que, se $x' \in X$ e $d(x, x') < \delta(x)$, então $d'(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Considerando, para cada $x \in X$, $r(x) := \frac{\delta(x)}{2}$, as bolas abertas $B_{r(x)}(x)$ formam uma cobertura aberta de X , que é compacto. Logo, existem $a_1, \dots, a_n \in X$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^n B_{r(a_i)}(a_i)$.

Sejam $\delta = \min\{r(a_i); i = 1, \dots, n\}$ e $x, x' \in X$ tais que $d(x, x') < \delta$. Existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in B_{r(a_j)}(a_j)$. Então

$$d(x', a_j) \leq d(x', x) + d(x, a_j) < \delta + r(a_j) \leq r(a_j) + r(a_j) = \delta(a_j).$$

Logo $d(x, a_j) < \delta(a_j)$ e $d(x', a_j) < \delta(a_j)$, e então

$$d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), f(a_j)) + d'(f(a_j), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

MÉTRICAS UNIFORMEMENTE EQUIVALENTES

Duas métricas d e d' em X dizem-se uniformemente equivalentes se as funções identidade $(X, d) \rightarrow (X, d')$ e $(X, d') \rightarrow (X, d)$ forem funções uniformemente contínuas.

[E os espaços (X, d) e (X, d') dizem-se uniformemente equivalentes.]

EXEMPLO. Sejam d_1, d_2 e d_∞ as métricas em \mathbb{R}^2 definidas no Exemplo 1.3.2. Os espaços métricos (\mathbb{R}^2, d_1) , (\mathbb{R}^2, d_2) e (\mathbb{R}^2, d_∞) são uniformemente equivalentes.

15 ESPAÇOS NORMADOS

ESPAÇO NORMADO

Chama-se **espaço normado** a um par $(V, \|\cdot\|)$, onde V é um espaço vectorial sobre um corpo K (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) e $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função que verifica as seguintes condições, para $x, y \in V$ e λ um escalar (i.e. $\lambda \in K$):

- (1) $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$,
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Observações.

- (1) À função $\|\cdot\|$ chama-se **norma**.
- (2) Todo o espaço normado é em particular um espaço métrico, com a métrica $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Nesse caso a norma é recuperada de d através de $\|x\| = d(x, 0)$. Em particular, todo o espaço normado é um espaço topológico. Sempre que nos referirmos a propriedades de um espaço normado que dependam de uma métrica ou de uma topologia estamos a considerar a métrica e a topologia induzidas pela norma.

- (3) Nem toda a métrica num espaço vectorial é definida por uma norma. De facto, dada uma métrica d num espaço vectorial, $\|x\| = d(x, 0)$ define uma norma se e só se, para $x, y, z \in V$ e λ escalar,

$$d(x, y) = d(x + z, y + z) \text{ e } d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

EXEMPLOS.

- (1) \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , como espaços vectoriais, com a norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$; a estes espaços chamamos, respectivamente, **espaço real euclidiano** e **espaço complexo euclidiano**.

Em geral, se $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço (real ou complexo) l_p^n como o espaço vectorial \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) munido da norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(que corresponde à métrica d_p). Note-se que l_2^n é o espaço euclidiano (de dimensão n).

De igual modo, podemos considerar o espaço l_∞^n com a norma definida em \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

(que corresponde à métrica d_∞ já estudada).

- (2) Se X é um conjunto, o espaço vectorial $\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(X)$, munido da norma (do supremo ou uniforme)

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \rho(f, 0)$$

é um espaço normado.

- (3) Se X é um espaço topológico, o espaço vectorial $\mathcal{C}^*(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^*(X)$ das funções contínuas e limitadas de X em \mathbb{R} é um espaço normado quando munido da norma do supremo.

- (4) Em

$$X = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ contínua e o conjunto } \{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\} \text{ é limitado}\}$$

definimos a norma

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.$$

- (5) Para $1 \leq p < \infty$, o espaço l_p consiste no conjunto das sucessões (reais) $x = (x_1, x_2, \dots)$ tais que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

A norma de um elemento $x \in l_p$  

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço l_∞   o espaço das sucessões limitadas munido da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|,$$

e c_0   o espaço de todas as sucessões que convergem para 0, munido da norma $\|\cdot\|_\infty$.

- (6) O espaço $\mathcal{C}^{(n)}(0, 1)$ tem como pontos as fun es $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis até à ordem n e com derivadas (até à ordem n) contínuas e limitadas, e como norma

$$\|f\| = \sup\left\{\sum_{k=0}^n |f^{(k)}(t)|; 0 < t < 1\right\}.$$

- (7) O conjunto dos polin mios de grau menor ou igual a n , $f(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$, pode ser munido da norma

$$\|f\| = \sum_{k=0}^n (k+1) |c_k|.$$

Se X é um espaço normado, chamamos **bola unitária** à bola aberta de raio 1 e centro 0, que denotamos por D (ou por $D(X)$ se estivermos a trabalhar com mais do que um espaço).

Proposição. *Seja V um espaço vectorial.*

(1) *Dada uma norma $\|\cdot\|$ em V , a sua bola unitária $D = \{x \in V; \|x\| < 1\}$ tem as seguintes propriedades:*

- (a) $(\forall x, y \in D) (\forall \lambda, \mu \in K) |\lambda| + |\mu| \leq 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in D;$
- (b) $(\forall x \in D) (\exists \varepsilon > 0) x + \varepsilon D \subseteq D;$
- (c) $(\forall x \in V x \neq 0) (\exists \lambda, \mu \in K \setminus \{0\}) : \lambda x \in D \wedge \mu x \notin D.$

(2) *Se $D \subseteq V$ satisfizer as condições (a)-(c), então*

$$\|x\| := \inf\{t; t > 0 \text{ e } x \in tD\}$$

define uma norma em V tal que D é a sua bola unitária.

Demonstração. Exercício. ■

OBSERVAÇÃO. Num espaço normado X as bolas abertas são completamente determinadas por D ; de facto:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall a \in X \quad B_\varepsilon(a) = a + \varepsilon D.$$

Teorema. *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *T é uniformemente contínua;*
- (ii) *T é contínua;*
- (iii) *T é contínua nalgum ponto de X ;*
- (iv) $\exists N > 0 \quad \forall x \in X \quad \|T(x)\| \leq N\|x\|;$
- (v) $\{\|T(x)\|; \|x\| \leq 1\}$ *é um subconjunto limitado de \mathbb{R}^+ ;*
- (vi) *$T(B_1[0])$ é um conjunto limitado.*

Demonstração. As implicações (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) são triviais.

(iii) \Rightarrow (iv): Se T é contínua em $x_0 \in X$, então, tomando $\varepsilon = 1$,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|T(x) - T(x_0)\| < 1.$$

Logo, se $y \in X$ for tal que $\|y\| < \delta$, então, considerando $x = x_0 + y$, temos que $\|x - x_0\| = \|y\| < \delta$, logo $\|T(y)\| = \|T(x - x_0)\| = \|T(x) - T(x_0)\| < 1$. Portanto, se $z \in X$ e $z \neq 0$, como

$$z = \frac{2\|z\|}{\delta} \frac{\delta z}{2\|z\|} \text{ e } \left\| \frac{\delta z}{2\|z\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

temos que

$$\|T(z)\| = \frac{2\|z\|}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta z}{2\|z\|}\right) \right\| < \frac{2}{\delta}\|z\|.$$

Conclui-se então que T verifica a condição requerida tomando $N = \frac{2}{\delta}$.

(iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi):

$$\begin{aligned} (\forall x \in X) \|T(x)\| \leq N\|x\| &\Rightarrow (\forall x \in X) (\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|T(x)\| \leq N) \\ &\Rightarrow T(B_1[0]) \subseteq B_N[0] \\ &\Rightarrow (\forall x \in X \setminus \{0\}) \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq N \\ &\Rightarrow (\forall x \in X) \|T(x)\| \leq N\|x\|. \end{aligned}$$

(iv) \Rightarrow (i): Queremos provar que T é uma função uniformemente contínua. Sabemos, por hipótese, que existe $N > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq N\|x\|$, para todo o $x \in X$. Então, se $\varepsilon > 0$, o valor $\delta = \frac{\varepsilon}{N} > 0$ é tal que, para $x, y \in X$,

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq N\|x - y\| < N\frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Observação. A aplicações lineares satisfazendo as condições (equivalentes) (i)-(vi) costuma chamar-se **aplicações lineares limitadas**. É preciso algum cuidado com esta designação, pois estas funções não são limitadas no sentido habitual; aliás, a única aplicação linear com imagem limitada é a nula.

Corolário. Se X e Y são espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ é uma aplicação linear, então T é um homeomorfismo se e só se T é uma bijecção tal que T e a sua função inversa são aplicações lineares contínuas.

Demonstração. Para concluir o resultado basta-nos provar que, se T é uma aplicação linear bijectiva, com função inversa $T_1 : Y \rightarrow X$, então T_1 é uma aplicação linear. Para provar isso, sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ e $y_1, y_2 \in Y$. Sejam x_1, x_2 (os únicos) elementos de X tais que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Então $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. Logo, por definição de inversa, $T_1(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 T_1(y_1) + \lambda_2 T_1(y_2)$. \blacksquare

Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num mesmo espaço vectorial V dizem-se **equivalentes** se forem topologicamente equivalentes, isto é, se definirem a mesma topologia em V ; dizem-se **uniformemente equivalentes** se definirem métricas uniformemente equivalentes.

Corolário. Para quaisquer duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em V , as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são uniformemente equivalentes;
- (ii) $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes;
- (iii) $\exists c > 0 \exists d > 0 : \forall x \in V \ \|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \leq d\|x\|_1$.

Demonstração. As duas normas são uniformemente equivalentes se e só se, por definição, as funções identidade $(V, \|\cdot\|_1) \rightarrow (V, \|\cdot\|_2)$ e $(V, \|\cdot\|_2) \rightarrow (V, \|\cdot\|_1)$ são funções uniformemente contínuas, o que é equivalente – uma vez que são aplicações lineares – a serem aplicações lineares limitadas. Isto é,

$$\exists N > 0 : \|x\|_2 \leq N\|x\|_1 \text{ e } \exists M > 0 : \|x\|_1 \leq M\|x\|_2.$$

É agora trivial tirar a conclusão pretendida. ■

Lema. Se $T : X \rightarrow Y$ é uma aplicação linear contínua entre espaços normados, definimos

$$\|T\| := \inf\{N \geq 0 ; \forall x \in X \ \|T(x)\| \leq N\|x\|\}.$$

Então:

$$(1) \ \|T\| = \min\{N \geq 0 ; \forall x \in X \ \|T(x)\| \leq N\|x\|\}.$$

$$(2) \ \|T\| = \sup\{\|T(x)\| ; \|x\| \leq 1\}.$$

Demonstração. (1) Queremos provar que, para todo o $x \in X$, $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$. Suponhamos, por redução ao absurdo, que esta desigualdade não é válida, isto é, que existe $x \in X$ tal que $\|T(x)\| > \|T\| \|x\|$. Então fazendo $M = \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$ temos que $M > \|T\|$ e que qualquer valor inferior a M , nomeadamente qualquer valor entre M e $\|T\|$, não pertence ao conjunto em causa. Logo $\|T\|$ não será o ínfimo do conjunto, o que é absurdo.

(2) Se $\|x\| \leq 1$, $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\| \leq \|T\|$. Logo, $\|T\|$ é um majorante do conjunto $\{\|T(x)\| ; \|x\| \leq 1\}$. Suponhamos agora que N é um majorante qualquer deste conjunto. Então, qualquer que seja $z \in X \setminus \{0\}$, $\|T(z)\| = \|z\| \|T(\frac{z}{\|z\|})\| \leq N\|z\|$, e então $N \geq \|T\|$, por definição de $\|T\|$. ■

Teorema. Se X e Y são espaços normados,

$$\|T\| := \inf\{N \geq 0 ; \forall x \in X \ \|T(x)\| \leq N\|x\|\}$$

define uma norma no espaço vectorial $\mathcal{L}(X, Y)$ das aplicações lineares limitadas de X em Y .

Demonstração. Exercício. ■

Lema. Se X , Y e Z são espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow Z$ são aplicações lineares contínuas, então $S \circ T : X \rightarrow Z$ é um aplicação linear limitada e $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$.

Demonstração. Exercício. ■

16 Construção de novos espaços normados

Vejamos agora como definir novos espaços à custa de espaços dados.

SUBESPAÇO NORMADO: Se X é um espaço normado, um seu **subespaço normado** é um subespaço vectorial equipado com a norma induzida pela norma de X .

SUBESPAÇO GERADO: Dado $Z \subseteq X$, chama-se **subespaço linear gerado por Z** a

$$\text{lin}Z = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k : z_k \in Z, \lambda_k \in K, n = 1, 2, \dots \right\}$$

(que é o menor subespaço que contém Z).

Podemos também considerar o **menor subespaço fechado que contém Z** , e que denotamos por $\overline{\text{lin}Z}$. Note que $\overline{\text{lin}Z}$ é exactamente o fecho de $\text{lin}Z$.

NÚCLEOS E IMAGENS: Se $T : X \rightarrow Y$ é uma aplicação linear entre os espaços normados X e Y , o seu **núcleo** $\text{Ker}T = \{x \in X ; T(x) = 0\}$ é um subespaço de X enquanto que a sua **imagem** $\text{Im}T = T(X)$ é um subespaço de Y .

ESPAÇO QUOCIENTE: Se X é um espaço vectorial e Z é um seu subespaço, consideramos em X a relação de equivalência \sim definida por $x \sim y$ se $x - y \in Z$. Note que a classe de equivalência de $x \in X$ é $[x] = x + Z$; em particular $[x] = 0$ se e só se $x \in Z$. A estrutura de espaço vectorial em X induz naturalmente uma estrutura de espaço vectorial em $X/\sim = \{[x] ; x \in X\}$: $\lambda[x] + \mu[y] := [\lambda x + \mu y]$. Denotamos este espaço por X/Z .

Se Z for um subespaço fechado de X podemos definir em X/Z uma norma:

$$\|[x]\|_0 := \inf\{\|y\| ; y \sim x\} = \inf\{\|x + z\| ; z \in Z\}.$$

Chamamos ao espaço normado X/Z o **espaço normado quociente** e à norma $\|\cdot\|_0$ **norma quociente**.

Em particular, se $T : X \rightarrow Y$ é uma aplicação linear limitada, então o seu núcleo $Z = \text{Ker}T$ é um subespaço fechado de X e induz uma aplicação linear $T_0 : X/Z \rightarrow Y$.

Proposição. *Sejam $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear limitada entre espaços normados, $Z = \text{Ker}T$ e $T_0 : X/Z \rightarrow Y$ a aplicação linear induzida por T . Então T_0 é uma aplicação linear limitada e a sua norma é exactamente $\|T\|$.* ■

SOMA DIRECTA DE ESPAÇOS NORMADOS: Suponhamos que Y e Z são subespaços fechados dum espaço normado X tais que $Y \cap Z = \{0\}$ e $Y + Z = X$. Note que nesse caso X pode identificar-se com $Y \times Z$. Nesse sentido, se as projecções $p_Y : X \rightarrow Y$ e $p_Z : X \rightarrow Z$ são contínuas (i.e. aplicações lineares limitadas), diz-se que X é a **soma directa de Y e Z** e escreve-se $X = Y \oplus Z = \{(y, z) ; y \in Y, z \in Z\}$.

Por outro lado, dados dois espaços normados Y e Z , podemos definir a sua **soma directa $Y \oplus Z$** e equipar este espaço vectorial com uma norma $\|(y, z)\|_1 = \|y\| + \|z\|$. (De facto, podemos definir $\|\cdot\|_p$ para qualquer natural p ou para $p = \infty$ como se fez em \mathbb{R}^2 .)

ESPAÇO DUAL Dado um espaço vectorial X , o seu dual algébrico

$$X' = \{f : X \rightarrow K \mid f \text{ aplicação linear}\},$$

é um espaço vectorial. (Aos elementos de X^* chamamos funcionais lineares.) Se X é um espaço vectorial normado, definimos o seu espaço dual

$$X^* = \{f : X \rightarrow K \mid f \text{ aplicação linear limitada}\},$$

que, como já vimos, é um espaço vectorial munido de uma norma $\| \cdot \|$, definida por

$$\|f\| = \inf\{N > 0; \forall x \in X \|f(x)\| \leq N\|x\|\}.$$

Lema.

(1) Se $f \in X'$, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $f \in X^*$;
- (ii) $f(B_1[0])$ é um subconjunto limitado de K ;
- (iii) $f(B_1[0]) \neq K$.

(2) Para $f \in X^*$, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\|f\| \leq 1$;
- (ii) $\forall x \in B_1(0) \quad |f(x)| < 1$;
- (iii) $f^{-1}(1) \cap B_1(0) = \emptyset$.

Demonstração. (1): (i) \Leftrightarrow (ii) foi provado no Teorema da pág. 32. (ii) \Rightarrow (iii) é óbvio. Falta provar que (iii) \Rightarrow (ii), ou, o que é equivalente, que, se $f(B_1[0])$ não é um subconjunto limitado, então $f(B_1[0]) = K$. Seja $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Se existir $x \in B_1[0]$ com $|f(x)| > |\lambda|$, então, tomando $\mu = f(x) \in K$, temos $\|\frac{\lambda}{\mu}x\| < \|x\| \leq 1$ e $f(\frac{\lambda}{\mu}x) = \frac{\lambda}{\mu}f(x) = \lambda$.

(2): (i) \Rightarrow (ii): Se $\|f\| \leq 1$, então, para $x \in B_1(0)$, $|f(x)| \leq \|x\| < 1$. (ii) \Rightarrow (iii) é óbvio. (iii) \Rightarrow (i): Se $\|f\| > 1$, então existe $x \in X$ tal que $|f(x)| > \|x\|$. Logo $x' := \frac{1}{f(x)}x \in B_1(0)$ e $f(x') = f(\frac{1}{f(x)}x) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$. ■

Se $f \in X'$, definimos $I(f) = f^{-1}(1)$. Note que, se $f \neq 0$, então existe $x_0 \in X$ tal que $I(f) = \{x_0\} + \text{Ker}(f)$: basta considerar $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) \neq 0$ e $x_0 := \frac{1}{f(x_1)}x_1$.

HIPERPLANO

Um hiperplano afim (ou simplesmente um hiperplano) é um conjunto da forma

$$H = \{x_0\} + Y = \{x_0 + y; y \in Y\},$$

onde $x_0 \in X$ e $Y \subseteq X$ é um subespaço de codimensão 1 (isto é, tal que $\dim X/Y = 1$). Diz-se então que H é uma translação de Y .

Estudemos agora em paralelo algumas propriedades do dual algébrico e do espaço dual do espaço normado X .

Teorema. *Seja X um espaço vectorial.*

- (1) *Se $f \in X' \setminus \{0\}$, então existe $x_0 \in X$ tal que todo o $x \in X$ se escreve de forma única como $x = y + \lambda x_0$, onde $y \in \text{Ker}(f)$ e $\lambda \in K$. Logo, $\text{Ker}(f)$ é um subespaço de codimensão 1 e $I(f)$ é um hiperplano (que não contém 0).*
- (2) *Se $f, g \in X' \setminus \{0\}$ então $f = \lambda g$, para algum $\lambda \in K \setminus \{0\}$, se e só se $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$.*
- (3) *A correspondência $f \mapsto I(f)$ define uma função bijectiva entre as funcionais lineares não nulas e os hiperplanos que não contêm 0.* ■

Teorema. *Seja X um espaço normado.*

- (1) *Seja $f : X \rightarrow K$ uma funcional linear não nula.*
Se f é limitada, então $\text{Ker}(f)$ e $I(f)$ são fechados e têm interior vazio.
Se f não é limitada, então $\text{Ker}(f)$ e $I(f)$ são densos em X .
- (2) *A correspondência $f \mapsto I(f)$ define uma bijecção entre as aplicações lineares limitadas não nulas e os hiperplanos fechados que não contêm 0.*

Demonstração. (1) Sejam $f \in X' \setminus \{0\}$ e $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Como f é contínua, $\text{Ker}(f) = f^{-1}(0)$ e $I(f) = f^{-1}(1)$ são fechados. Para verificar que têm interior vazio basta notar que, quaisquer que sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$,

$$f(x + \varepsilon x_0) = f(x) + \varepsilon f(x_0) \neq f(x).$$

Para provar que, se f não é limitada, $\text{Ker}(f)$ é denso, suponhamos que $\text{Ker}(f)$ não é denso, isto é, que existem $x_0 \in X$ e $r > 0$ tais que $B_r(x_0) \cap \text{Ker}(f) = \emptyset$. Então podemos concluir que $\|f\| \leq \frac{|f(x_0)|}{r}$: de facto, se $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{r} \|x\|$ para algum $x \in X$, então $y := x_0 - \frac{x f(x_0)}{f(x)} \in B_r(x_0) \cap \text{Ker}(f)$.

(2) Segue imediatamente de (1) e do teorema anterior. ■

17 Espaços de Banach

EXEMPLOS.

- (1) \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , como espaços vectoriais, com a norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, são espaços de Banach.

- (2) Se X é um conjunto, o espaço vectorial $\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(X)$, munido da norma (do supremo ou uniforme)

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \rho(f, 0)$$

é um espaço de Banach.

- (3) Se X é um espaço topológico, o espaço vectorial $\mathcal{C}^*(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^*(X)$ das funções contínuas e limitadas de X em \mathbb{R} é um espaço de Banach quando munido da norma do supremo. Em particular, se X é um espaço compacto, o espaço vectorial das funções contínuas $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ é um espaço normado para a norma do supremo. Note-se que, como $f(X)$ é um compacto, $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$.

Teorema. *Se Y for um espaço de Banach, então $L(X, Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $L(X, Y)$. Então, para todo o $x \in X$, uma vez que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|,$$

concluimos que $(T_n(x))$ é uma sucessão de Cauchy em Y , logo convergente. Designemos por $T(x)$ o seu limite. Definimos assim uma função $T : X \rightarrow Y$. Temos agora que verificar que T é uma aplicação linear limitada e que $T_n \rightarrow T$. Dados $x_1, x_2 \in X$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$,

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 T_n(x_1) + \lambda_2 T_n(x_2)) \\ &= \lambda_1 \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_1) + \lambda_2 \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_2) &= \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2), \end{aligned}$$

logo T é uma aplicação linear. Para verificar que é limitada, consideremos $\varepsilon > 0$. Porque (T_n) é de Cauchy, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$ e $m \geq p$, então $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Então, quaisquer que sejam $x \in X$ e $m \geq p$,

$$\|T(x) - T_m(x)\| = \|(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)) - T_m(x)\| = \|\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n - T_m)(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Logo

$$\|T(x)\| \leq \varepsilon \|x\| + \|T_m(x)\| \leq (\varepsilon + \|T_m\|) \|x\|,$$

e então $T \in L(X, Y)$; mas também se conclui da desigualdade anterior que $\|T - T_m\| \leq \varepsilon$. Logo $T_m \rightarrow T$, como queríamos demonstrar. ■

Teorema. *Todo o espaço normado é subespaço denso de um espaço de Banach.*

Demonstração. Sejam X um espaço vectorial normado e Y o espaço métrico definido na demonstração do Teorema da Pág. 27. Vamos verificar que Y é um espaço vectorial normado, que tem X como subespaço vectorial normado denso.

- (1) Y é um espaço vectorial:

Se $[(x_n)] \in Y$ e $\lambda \in K$, definimos $\lambda[(x_n)] = [(\lambda x_n)]$. É fácil verificar que se $(x_n) \sim (y_n)$ também $(\lambda x_n) \sim (\lambda y_n)$, e portanto a multiplicação por λ está bem definida.

Se $[(x_n)], [(y_n)] \in Y$, definimos $[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$. É mais uma vez fácil verificar que a adição está bem definida.

Além disso, estas operações estendem as operações do espaço vectorial X , tornando-o um subespaço vectorial de Y .

(2) Para cada $[(x_n)]$ definimos $\|[(x_n)]\| = \gamma([(x_n)], 0) = \lim_n \|x_n\|$. Usando a Observação (3) da pág 30, para verificarmos que $\|\cdot\|$ é uma norma em Y basta verificar que

$$\gamma([(x_n)] + [(z_n)], [(y_n)] + [(z_n)]) = \gamma([(x_n)], [(y_n)])$$

e que

$$\gamma(\lambda[(x_n)], \lambda[(y_n)]) = |\lambda|\gamma([(x_n)], [(y_n)]) :$$

$$\begin{aligned} \gamma([(x_n)] + [(z_n)], [(y_n)] + [(z_n)]) &= \lim_n d(x_n + z_n, y_n + z_n) = \lim_n \|x_n + z_n - (y_n + z_n)\| \\ &= \lim_n \|x_n - y_n\| = \gamma([(x_n)], [(y_n)]), \text{ e} \end{aligned}$$

$$\gamma(\lambda[(x_n)], \lambda[(y_n)]) = \lim_n d(\lambda x_n, \lambda y_n) = \lim_n \|\lambda x_n - \lambda y_n\| = |\lambda| \lim_n \|x_n - y_n\| = |\lambda|\gamma([(x_n)], [(y_n)]).$$

Finalmente, esta norma estende a norma de X e o resultado está provado. ■

SÉRIE CONVERGENTE/SÉRIE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE

Dado um espaço normado X , uma série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ em X (isto é, com $x_k \in X$ para todo o $k \in \mathbb{N}$) diz-se:

(1) **convergente** para $x \in X$ se a sucessão das somas parciais $(s_n)_n = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)_n$ convergir para x , isto é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n x_k \right\| = 0;$$

(2) **absolutamente convergente** se a série $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ convergir em \mathbb{R}^+ .

Lema. *Num espaço de Banach toda a série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Basta-nos provar que a sucessão das somas parciais (s_n) de uma série absolutamente convergente $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ é uma sucessão de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$ e seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=p+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon$. Então, se $m \geq n \geq p$,

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon.$$

■

OBSERVAÇÃO. Quando, num espaço métrico, queremos provar que uma sucessão de Cauchy (x_n) converge, podemos supor, sem perda de generalidade, que $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^n}$ para todo o $m \geq n$, pois dada qualquer sucessão de Cauchy é fácil construir uma sua subsucessão com esta propriedade, a qual convergirá se e só se a sucessão dada convergir, como indicamos em seguida.

De facto, se (x_n) for de Cauchy, podemos construir uma sua subsucessão $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ da seguinte forma:

(1) existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p_1$ e $m \geq p_1$, então $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$; em particular, $d(x_{p_1}, x_m) < \frac{1}{2}$ se $m \geq p_1$; definimos $\varphi(1) = p_1$;

- (2) de igual modo, existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p_2$ e $m \geq p_2$, então $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^2}$; tomando $\varphi(2) = \max\{p_2, p_1 + 1\}$, temos que $d(x_{\varphi(2)}, m) < \frac{1}{2^2}$, se $m \geq \varphi(2)$, e $\varphi(2) > \varphi(1)$;
- (3) dado $n \in \mathbb{N}$ e supondo já definidos $\varphi(1) < \varphi(2) < \dots < \varphi(n-1)$ tais que, se $m \geq \varphi(k)$, então $d(x_{\varphi(k)}, x_m) < \frac{1}{2^k}$, escolhemos $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ e tal que, se $m \geq \varphi(n)$, então $d(x_{\varphi(n)}, x_m) < \frac{1}{2^n}$.

A sucessão $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ assim definida verifica a propriedade pretendida.

Teorema. *Um espaço normado é completo se e só se toda a sua série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. (\Rightarrow): foi provado no lema anterior.

(\Leftarrow): Suponhamos que X é um espaço normado onde toda a série absolutamente convergente é convergente, e seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em X tal que $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq n$. Sejam $x_0 = 0$ e $y_k = x_k - x_{k-1}$ para $k \in \mathbb{N}$. Então (x_n) é a sucessão das somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$. É fácil verificar que a série $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ é absolutamente convergente, logo converge para algum $x \in X$, ou seja $x_n \rightarrow x$. ■

OBSERVAÇÃO. O uso de séries permite-nos falar de bases de um espaço de Banach: uma sucessão $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma base de um espaço de Banach X se todo o $x \in X$ se escrever, de forma única, como soma de uma série $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$. Por exemplo, o espaço das sucessões l_p tem uma base canónica $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, onde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) = (\delta_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$, onde $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ni} = 0$ se $n \neq i$.

18 Espaços normados de dimensão finita

Lema. *Em l_1^n (real ou complexo), o subespaço $B_1[0]$ é compacto.*

Demonstração. Exercício. ■

Teorema. *Num espaço vectorial de dimensão finita quaisquer duas normas são equivalentes.*

Demonstração. Dado um espaço vectorial V de dimensão n , com base $(e_i)_{i=1}^n$, vamos provar que qualquer norma $\|\cdot\|$ em V é equivalente à norma $\|\cdot\|_1$, definida por $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$. Sejam $S_1 = \{x \in V; \|x\|_1 = 1\}$ e $f: (S_1, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = \|x\|$. Como S_1 é um subconjunto fechado da bola fechada unitária em l_1^n , S_1 é compacto. Além disso, se $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = \left| \|x\| - \|y\| \right| &\leq \|x - y\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i - \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \|e_i\| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \right) \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \right) \|x - y\|_1, \end{aligned}$$

e então f é uma função contínua. Logo, tem máximo M e mínimo m . Note-se que $m > 0$ uma vez que $|f(x)| = \|\|x\|\| > 0$ para todo o $x \in S_1$. Logo, atendendo a que:

$$(\forall x \in V \setminus \{0\}) \quad \|x\| = \|x\|_1 f\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \quad \text{e} \quad m \leq f\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \leq M,$$

obtemos,

$$(\forall x \in V) \quad m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1. \quad \blacksquare$$

Corolário. *Se X e Y são espaços normados e X tem dimensão finita, então qualquer aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é contínua.*

Demonstração. A função $\|\cdot\|' : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\|' = \|x\| + \|T(x)\|$ é uma norma em X . Como $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ são equivalentes, existe $N > 0$ tal que $\|x\|' \leq N\|x\|$, para todo o $x \in X$. Logo $\|T(x)\| \leq \|x\|' \leq N\|x\|$ e então $\|T\| \leq N$. \blacksquare

Definição. Dizemos que dois espaços vectoriais normados X e Y são *isomorfos* se existir uma aplicação linear limitada bijectiva $X \rightarrow Y$ com inversa também limitada (e necessariamente linear e bijectiva).

Corolário. *Dois espaços normados de dimensão finita são isomorfos se e só se têm a mesma dimensão.*

Demonstração. Já sabemos que dois espaços vectoriais de dimensão finita isomorfos têm a mesma dimensão. Por outro lado, se os dois espaços X e Y têm a mesma dimensão, finita, então existe uma aplicação linear $T_1 : X \rightarrow Y$ com inversa $T_2 : Y \rightarrow X$, também linear. Pelo corolário anterior, as aplicações T_1 e T_2 são contínuas. \blacksquare

Corolário. *Todo o espaço normado de dimensão finita é espaço de Banach.*

Demonstração. Sai do corolário anterior e do facto de l_2^n ser completo. \blacksquare

Corolário. *Num espaço normado de dimensão finita X um subconjunto é compacto se e só se é fechado e limitado. Em particular a bola unitária fechada e a esfera unitária fechada*

$$B(X) = \{x \in X ; \|x\| \leq 1\} \quad \text{e} \quad S(X) = \{x \in X ; \|x\| = 1\}$$

são compactas.

Demonstração. Segue do facto do resultado ser válido em l_2^n . \blacksquare

Corolário. *Todo o subespaço de dimensão finita de um espaço normado é fechado.*

Demonstração. Como espaço de dimensão finita, o subespaço é completo, logo necessariamente fechado como subespaço. \blacksquare

19 Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado

Lema. *Seja X um espaço métrico completo. Se $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$ é uma sucessão de subconjuntos fechados não vazios de X tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam} F_n = 0$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in F_n$. Então, porque $\text{diam} F_n \rightarrow 0$, a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Logo $x_n \rightarrow x \in X$, porque X é completo. Além disso, porque, para cada $k \in \mathbb{N}$, a sucessão $(x_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsucessão da primeira que está contida no fechado F_k , $x_{n+k} \rightarrow x \in F_k$. Logo $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. ■

Teorema de Baire. *Seja X um espaço métrico completo. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de subconjuntos abertos e densos de X , então $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é denso em X .*

[Um espaço topológico com esta propriedade diz-se um espaço de Baire.]

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $r > 0$. Queremos provar que $A \cap B_r(x) \neq \emptyset$. Como $A_1 \cap B_r(x)$ é um aberto não vazio, existem $x_1 \in X$ e $s > 0$ tais que $B_s(x_1) \subseteq A_1 \cap B_r(x)$. Podemos ainda afirmar que existe $r_1 \in]0, 1[$ tal que

$$B_{r_1}[x_1] \subseteq A_1 \cap B_r(x).$$

De igual modo, atendendo a que $A_2 \cap B_{r_1}(x_1)$ é um aberto não vazio, existem $x_2 \in X$ e $r_2 \in]0, \frac{1}{2}[$ tais que

$$B_{r_2}[x_2] \subseteq A_2 \cap B_{r_1}(x_1).$$

Supondo já escolhidos x_k e $r_k \in]0, \frac{1}{k}[$ tais que $B_{r_k}[x_k] \subseteq A_k \cap B_{r_{k-1}}(x_{k-1})$, e atendendo a que $A_{k+1} \cap B_{r_k}(x_k)$ é um aberto não vazio, podemos escolher $x_{k+1} \in X$ e $r_{k+1} \in]0, \frac{1}{k+1}[$ tais que

$$B_{r_{k+1}}[x_{k+1}] \subseteq A_{k+1} \cap B_{r_k}(x_k).$$

Construímos assim uma sucessão encaixada $(B_{r_n}[x_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos fechados não vazios de X com $\text{diam}(B_{r_n}[x_n]) \leq \frac{2}{n}$. Pelo lema anterior, existe $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}[x_n] \subseteq (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cap B_r(x)$, como queríamos demonstrar. ■

Corolário. *Se um espaço métrico completo é reunião numerável de subconjuntos fechados, então pelo menos um deles tem interior não vazio.*

Demonstração. Seja $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família numerável de subconjuntos fechados tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = X$.

Então cada $X \setminus F_n$ é aberto e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus F_n) = \emptyset$. Pelo teorema anterior concluímos que algum dos conjuntos $X \setminus F_k$ não é denso, isto é F_k tem interior não vazio. ■

Definições. Um subconjunto Y de um espaço topológico X diz-se:

- (1) raro se o interior do seu fecho for vazio;
- (2) de primeira categoria se for reunião numerável de subconjuntos raros;

(3) de segunda categoria se não for de primeira categoria, isto é, se $Y \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ com cada F_n fechado, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_k) \neq \emptyset$.

[Nota: O complementar de um subconjunto raro é denso.]

Corolário. *Um espaço métrico completo é de segunda categoria. Além disso, num espaço métrico completo o complementar de um subconjunto de primeira categoria é de segunda categoria.* ■

Teorema da Aplicação Aberta. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear limitada sobrejectiva. Então T é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Na prova deste teorema vamos usar os dois lemas que enunciamos em seguida. Omitimos a demonstração do primeiro por ser bastante técnica: cf. [Bollobás, pág. 79].

Lema. *Suponhamos que X e Y são espaços normados, X é completo e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é tal que $\overline{T(B_r(0))} \supseteq B_s(y_0)$. Então $T(B_r(0)) \supseteq B_s(y_0)$.*

Lema. *Se T é uma aplicação linear limitada, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) T é uma aplicação aberta;
- (ii) $T(B_1(0))$ é aberto;
- (iii) $0 \in \text{int}(T(B_1(0)))$;
- (iv) $\text{int}(T(B_1(0))) \neq \emptyset$;
- (v) $\text{int}(\overline{T(B_1(0))}) \neq \emptyset$.

Demonstração. Para provar o lema basta verificar que (iv) \Rightarrow (iii) e que (iii) \Rightarrow (i), uma vez que as implicações (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) são imediatas e que (v) \Rightarrow (iv) segue do lema anterior.

(iv) \Rightarrow (iii): Sejam $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tais que $B_r(y_0) \subseteq T(B_1(0))$. Então também se tem $B_r(-y_0) \subseteq T(B_1(0))$ e podemos ainda concluir que $B_r(0) \subseteq T(B_1(0))$. De facto, se $y \in B_r(0)$, então $y_0 + y \in B_r(y_0) \subseteq T(B_1(0))$ e $-y_0 + y \in B_r(-y_0) \subseteq T(B_1(0))$, logo $y_0 + y = T(x_0)$ e $-y_0 + y = T(x_1)$, com $x_0, x_1 \in B_1(0)$. Portanto

$$y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y) = T\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1\right),$$

com $\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 \in B_1(0)$.

(iii) \Rightarrow (i): Para provar que T é aberta, basta verificar que, quaisquer que sejam $x_0 \in X$ e $s > 0$, $T(x_0) \in \text{int}(T(B_s(x_0)))$. Da condição $0 \in \text{int}(T(B_1(0)))$ concluímos que existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subseteq T(B_1(0))$. Logo $B_{rs}(0) \subseteq T(B_s(0))$ e então $B_{rs}(T(x_0)) \subseteq T(B_s(x_0))$. ■

Resta-nos agora provar o teorema. De

$$Y = T(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(B_n(0))} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{n T(B_1(0))},$$

e do facto de Y ser de segunda categoria podemos concluir que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(n \overline{T(B_1(0))}) \neq \emptyset$. Logo $\text{int}(\overline{T(B_1(0))}) \neq \emptyset$ e então, pelo segundo lema, T é uma aplicação aberta. ■

Teorema da função inversa. *Se $T : X \rightarrow Y$ for uma aplicação linear contínua bijectiva e X e Y forem espaços de Banach, então a sua função inversa é também uma aplicação linear limitada.* ■

Teorema do gráfico fechado. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. Então T é limitada se e só se o seu gráfico*

$$\Gamma(T) = \{(x, T(x)); x \in X\} \subseteq X \times Y$$

é fechado na topologia produto.

Demonstração. Já vimos que o gráfico de uma função contínua cujo conjunto de chegada seja separado é fechado. Falta-nos provar o recíproco.

Em $Z = X \oplus Y = X \times Y$ consideramos a norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Então a função de inclusão $\iota : \Gamma(T) \rightarrow Z = X \times Y$ é contínua, sendo $\Gamma(T)$ um subconjunto fechado de Z . Como Z é um espaço de Banach, $\Gamma(T)$ é um subespaço completo. A aplicação linear

$$\begin{aligned} U : \Gamma(T) &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

é uma bijecção contínua, logo, pelo teorema anterior, é um homeomorfismo; donde, a função inversa

$$\begin{aligned} \tilde{T} : X &\rightarrow \Gamma(T) \\ x &\mapsto (x, T(x)) \end{aligned} \quad \text{é uma aplicação linear limitada. Portanto, escrevendo}$$

$$(X \xrightarrow{T} Y) = (X \xrightarrow{\tilde{T}} \Gamma(T) \xrightarrow{\iota} X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y),$$

concluimos que T é composição de funções contínuas, logo é contínua. ■

20 O Teorema de Hahn-Banach

Neste capítulo um dos nossos objectivos é provar o seguinte

Teorema de Hahn-Banach: Versão Geométrica. *Seja X um espaço normado real. Se A e B são dois subconjuntos convexos não vazios de X tais que $A \cap B = \emptyset$ e A é aberto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B .*

Em primeiro lugar defina-se o que se entende por separação por um hiperplano. Todo o hiperplano H corresponde a uma funcional linear f , como vimos atrás. Diz-se que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ separa A e B se $A \subseteq \{x \in X; f(x) \leq \alpha\}$ e $B \subseteq \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$. No caso do teorema acima, o facto do hiperplano ser fechado significa que a funcional linear f é contínua.

Para provar o teorema vamos em primeiro lugar considerar, para cada subconjunto convexo C de um espaço vectorial X , a função

$$p_C : X \rightarrow [0, \infty] \\ x \mapsto \inf\{\lambda > 0; x \in \lambda C\},$$

a que se chama *funcional de Minkowski*. Esta função não é em geral uma norma, mas tem propriedades análogas, embora mais fracas. (Nota: Quando C é a bola aberta unitária de um espaço normado X , então p_C é exactamente a norma de C , como já vimos.)

Definição. Se X é um espaço vectorial, uma função $p : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{R}_\infty$ diz-se uma funcional convexa se verificar as seguintes condições

- (1) $\forall t \geq 0 \quad p(tx) = tp(x)$ [positivamente homogénea];
- (2) $\forall x, y \in X \quad \forall t \in [0, 1] \quad p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y)$ [convexa].

OBSERVAÇÕES: (a) Na presença de (1), a condição de ser convexa é equivalente a ser sub-aditiva, isto é:

$$(2') \quad \forall x, y \in X \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

(b) As operações em \mathbb{R}_∞ são as naturais: $\forall r \in \mathbb{R} \quad \infty + r = \infty + \infty = \infty$; $0 \cdot \infty = 0$ e $t \cdot \infty = \infty$ para $t > 0$. Além disso, ∞ é o elemento máximo de \mathbb{R}_∞ .

(c) Toda a norma é uma funcional convexa; toda a funcional linear é uma funcional convexa.

(d) Dado um conjunto X e duas funções $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{R}_∞), diz-se que φ domina ψ (ou ψ é dominada por φ) se, para todo o $x \in X$, $\psi(x) \leq \varphi(x)$.

(e) Uma funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dominada pela funcional convexa $p : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto N\|x\|$, se e só se f é limitada e $\|f\| \leq N$.

(f) Quando $f : X \rightarrow Z$ for uma extensão de $g : Y \rightarrow Z$, isto é, quando $Y \subseteq X$ e, para todo o $y \in Y$, $f(y) = g(y)$, escrevemos $g \subseteq f$.

Lema. *Sejam Y um subespaço vectorial de codimensão 1 do espaço vectorial real X , $p : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ uma funcional convexa e $f_0 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ uma funcional linear dominada por p . Existe uma extensão $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ de f_0 que ainda é uma funcional linear dominada por p .*

Demonstração. Como Y tem codimensão 1, existe $z \in X$ tal que todo o elemento de X se escreve na forma $x = y + tz$ para algum $y \in Y$ e $t \in \mathbb{R}$. Se existir a funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que estende f_0 , então f é completamente determinada por $f(z) = c$:

$$f(x) = f(y + tz) = f_0(y) + tf(z) = f_0(y) + tc.$$

Provar a existência de f é então provar a existência de $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $y \in Y$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$f(y + tz) \leq p(y + tz) \Leftrightarrow f_0(y) + tc \leq p(y + tz).$$

• Se $t = 0$, a desigualdade é trivialmente satisfeita.

• Se $t > 0$, para todo o $y \in Y$,

$$f_0(y) + tc \leq p(y + tz) \Leftrightarrow c \leq \frac{p(y + tz) - f_0(y)}{t} = p\left(\frac{y}{t} + z\right) - f_0\left(\frac{y}{t}\right);$$

• Se $t < 0$, isto é $t = -s$, com $s > 0$, para todo o $y \in Y$,

$$f_0(y) - sc \leq p(y - sz) \Leftrightarrow c \geq \frac{-p(y - sz) + f_0(y)}{s} = -p\left(\frac{y}{s} - z\right) + f_0\left(\frac{y}{s}\right).$$

Logo, f é dominada por p se e só se, quaisquer que sejam $y', y'' \in Y$,

$$-p(y'' - z) + f_0(y'') \leq c \leq p(y' + z) - f_0(y').$$

Existirá um $c \in \mathbb{R}$ nestas condições se e só se, quaisquer que sejam $y', y'' \in Y$,

$$f_0(y') + f_0(y'') \leq p(y' + z) + p(y'' - z).$$

Como f é uma funcional linear dominada por p , temos que

$$f_0(y') + f_0(y'') = f_0(y' + y'') \leq p(y' + y'') = p(y' + z + y'' - z) \leq p(y' + z) + p(y'' - z). \quad \blacksquare$$

O resultado do Lema pode estender-se ao caso de Y não ter codimensão 1. A técnica subjacente é a iteração do processo de construção de f . Podemos então afirmar:

Teorema. *Se Y for um subespaço vectorial do espaço vectorial real X tal que $X = \text{lin}(Y \cup \{z_i; i \in \mathbb{N}\})$ e $f_0 \in Y'$ é dominada por uma funcional convexa $p : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$, então f_0 pode ser estendida a uma funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ainda dominada por p .*

Além disso, se X for um espaço normado e f_0 for uma funcional linear limitada, então f_0 tem uma extensão $f \in X^$ tal que $\|f\| = \|f_0\|$.*

Demonstração. A primeira afirmação segue do lema anterior, iterando o processo de construção de f . A segunda afirmação sai da primeira, atendendo à observação já feita de que f_0 é dominada pela funcional convexa $p : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f_0\|\|x\|$. ■

Teorema da Extensão de Hahn-Banach. *Seja Y um subespaço do espaço vectorial real X . Se $f_0 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ é uma funcional linear dominada pela funcional convexa $p : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$, então existe uma funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que estende f_0 e que é dominada por p .*

Se X é um espaço vectorial real normado e $f_0 \in Y^$, então existe $f \in X^*$ tal que $f_0 \subseteq f$ e $\|f\| = \|f_0\|$.*

Demonstração. Consideremos o conjunto $\mathcal{F} = \{f_\gamma : Y_\gamma \rightarrow \mathbb{R}; f_\gamma \in Y'_\gamma \text{ e } f_0 \subseteq f_\gamma \leq p\}$, ordenado pela inclusão \subseteq . Se $\mathcal{F}_0 = \{f_\gamma; \gamma \in \Gamma_0\} \subseteq \mathcal{F}$ for um conjunto totalmente ordenado, então $\tilde{f} : \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} Y_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$,

onde $\tilde{f}(x) = f_\gamma(x)$ para $\gamma \in \Gamma_0$ tal que $x \in Y_\gamma$, é um supremo de \mathcal{F}_0 . Logo, pelo Lema de Zorn¹, \mathcal{F} tem um elemento maximal, f . Se o domínio de f não for X , pelo lema anterior f pode ser estendida a um subespaço maior, o que contraria o facto de f ser maximal. Logo f tem domínio X e é uma extensão de f_0 nas condições pretendidas.

A segunda afirmação sai agora da primeira, tal como no teorema anterior. ■

Voltemos agora à prova da versão geométrica do Teorema de Hahn-Banach.

Lema. *Seja X um espaço normado real, e seja $C \subseteq X$ um convexo aberto, com $0 \in C$. Considere-se a funcional de Minkowski de C :*

$$p_C : X \rightarrow [0, \infty]$$

$$x \mapsto \inf\{\lambda > 0; x \in \lambda C\}.$$

Então p_C é uma funcional convexa e

- (1) $(\exists M > 0) (\forall x \in X) 0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|$;
- (2) $C = \{x \in X; p_C(x) < 1\}$.

Demonstração. É fácil verificar que p_C é uma funcional convexa (usa os argumentos do exercício proposto n.º 8).

(1) Como C é um aberto contendo 0, existe $r > 0$ tal que $B_r[0] \subseteq C$. Logo, para todo o $x \in X$, $\frac{r}{\|x\|}x \in B_r[0] \subseteq C$, e então $p_C(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$.

(2) Se $x \in C$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(1 + \varepsilon)x \in C$, donde $p_C(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Por outro lado, se $p_C(x) < 1$, então existe $\alpha \in]0, 1[$ tal que $x \in \alpha C$, logo $\alpha^{-1}x \in C$. Temos então $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1 - \alpha)0 \in C$. ■

Lema. *Sejam $C \subseteq X$ um aberto convexo não vazio e $x_0 \in X \setminus C$. Existe $f \in X^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo o $x \in C$. Em particular, o hiperplano $\{x \in X; f(x) = f(x_0)\}$ separa $\{x_0\}$ e C .*

Demonstração. Suponhamos que $0 \in C$. Sejam $Y = \mathbb{R}x_0$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ a funcional linear contínua definida por $g(tx_0) = t$, para todo o $t \in \mathbb{R}$. Então, para todo o $x \in Y$,

$$g(x) \leq p_C(x) = \inf\{\lambda > 0; \frac{x}{\lambda} \in C\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach existe uma funcional linear contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \supseteq g$ e $f(x) \leq p_C(x)$ para todo o $x \in X$. Então $f(x_0) = 1$ e $f(x) < 1$ para todo o $x \in C$. Logo, o hiperplano $f^{-1}(\{1\})$ separa $\{x_0\}$ e C . ■

Demonstração do Teorema. Seja $C = A - B = \{a - b; a \in A, b \in B\}$. Então C é convexo, e é aberto porque $C = \bigcup_{y \in B}(A - \{y\})$, e $A - \{y\}$ é aberto. Porque $A \cap B = \emptyset$, $0 \notin C$. Logo,

¹Lema de Zorn (que é equivalente ao Axioma da Escolha): *Todo o conjunto ordenado tem elemento maximal desde que todo o seu subconjunto totalmente ordenado tenha majorante.*

existe $f \in X^*$ tal que $f(z) < 0$ para todo o $z \in C$. Mas então, para todo o $a \in A$ e $b \in B$, $f(a - b) = f(a) - f(b) < 0$, ou seja, $f(a) < f(b)$. Mas então os subconjuntos não vazios $f(A)$ e $f(B)$ de \mathbb{R} são limitados, respectivamente, superior e inferiormente, logo o primeiro tem supremo e o segundo ínfimo. Existe então $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sup f(A) \leq \alpha \leq \inf f(B)$ e daí se conclui que o hiperplano fechado $H = \{x \in X; f(x) = \alpha\}$ separa A e B . ■

O Teorema de Hahn-Banach pode ser estendido ao caso dos espaços vectoriais complexos.

Teorema. *Sejam Y um subespaço de um espaço normado complexo X e $f_0 \in Y^*$. Existe uma extensão $f \in X^*$ de f_0 a todo o X que tem exactamente a norma de f_0 .*

Demonstração. Usamos as funções r e c estudadas no Exercício 135. Pelo teorema anterior podemos estender $r(f_0)$ a uma funcional linear $g : X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, limitada, com $\|g\| = \|r(f_0)\| = \|f_0\|$. A funcional complexa $f = c(g) \in X^*$ estende f_0 e verifica $\|f\| = \|f_0\|$. ■

Vejamos agora algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach.

Se X e Y são espaços normados, existe uma função (natural) do espaço das aplicações lineares de X em Y no espaço das aplicações lineares de Y^* em X^* :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(X, Y) & \longrightarrow & \mathbf{F}(Y^*, X^*) \\ X \xrightarrow{T} Y & \longmapsto & \begin{array}{ccc} T^* : Y^* & \rightarrow & X^* \\ f & \mapsto & f \circ T. \end{array} \end{array}$$

É fácil ver que, se T é uma aplicação linear, então T^* é também linear.

Teorema. *Se X e Y são espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ é uma aplicação linear limitada, então $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ é uma aplicação linear limitada e $\|T^*\| = \|T\|$.*

Demonstração. Ver resolução da segunda frequência. ■

Dado um espaço vectorial X , com dual X' e bidual X'' , existe uma aplicação linear injectiva

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X'' = \mathbf{F}(\mathbf{F}(X, K), K) \\ x & \longmapsto & \begin{array}{ccc} x'' : \mathbf{F}(X, K) & \rightarrow & K \\ f & \mapsto & f(x). \end{array} \end{array}$$

(Esta função é um isomorfismo se X tiver dimensão finita.)

Se X for um espaço normado, esta aplicação pode ser considerada entre os espaços normados X e X^{**} :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{**} \\ x & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \hat{x} : X^* & \rightarrow & K \\ f & \mapsto & f(x). \end{array} \end{array}$$

De facto, como $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, \hat{x} é uma funcional linear limitada, e, além disso, $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$.

Teorema. *A correspondência $x \mapsto \hat{x}$ define uma função $X \rightarrow X^{**}$ que preserva a norma.*

Demonstração. Para $x \in X$ com $x \neq 0$, seja $f \in X^*$ tal que $f(x) = \|x\|$. Então $\|f\| = 1$ e $|\hat{x}(f)| = |f(x)| = \|x\|$ e $|\hat{x}(f)| \leq \|\hat{x}\|\|f\| = \|\hat{x}\|$, logo $\|x\| \leq \|\hat{x}\|$. ■

[Esta é uma forma natural de ver X como subespaço de um espaço normado completo, X^{**} , pois a preservação da norma implica que seja uma aplicação injectiva, contínua, e que X tenha a topologia de subespaço relativamente a X^{**} .]

Num espaço métrico X , para cada $Y \subseteq X$ e $x \in X$, definimos $\text{dist}(x, Y) := \inf\{d(x, y) ; y \in Y\}$. (Note que $\text{dist}(x, Y) = 0$ se e só se $x \in \overline{Y}$.)

Teorema. *Seja Y um subespaço próprio do espaço normado X .*

(1) *Se Y é fechado, então $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in S(X) = \{x \in X ; \|x\| = 1\} : \text{dist}(x, Y) \geq 1 - \varepsilon$.*

(2) *Se Y tiver dimensão finita, então existe $x \in S(X)$ tal que $\text{dist}(x, Y) = 1$.*

Demonstração. Sejam $z \in X \setminus Y$ e $Z := \text{lin}(Y \cup \{z\})$. Consideremos a funcional linear $f_0 : Z \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_0(y + \lambda z) = \lambda$.

(a) Como Y é fechado e $\text{Ker}(f_0) = Y$, f_0 é uma funcional linear limitada e então, pelo Teorema de Hahn-Banach, tem uma extensão $f \in X^*$ tal que $\|f\| = \|f_0\| > 0$. Tem-se ainda $Y \subseteq \text{Ker} f$. Como $\|f\| = \sup_{x \in S(X)} |f(x)|$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in S(X)$ tal que $|f(x)| \geq (1 - \varepsilon)\|f\|$. Então, se $y \in Y$,

$$\|x - y\| \geq \frac{|f(x - y)|}{\|f\|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq 1 - \varepsilon.$$

(b) Se Y for de dimensão finita, podemos também considerar X de dimensão finita. Então a restrição de f a $S(X)$ tem máximo, porque $S(X)$ é compacto. Logo, existe $x \in S(X)$ tal que $|f(x)| = \|f\|$. Então, para todo o $y \in Y$, temos

$$\|x - y\| \geq \frac{|f(x - y)|}{\|f\|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} = 1.$$

■

Teorema. *Um espaço normado tem dimensão finita se e só se a sua bola fechada unitária é compacta.*

Demonstração. Se X é um espaço normado com dimensão infinita, consideramos uma sucessão (x_n) em $S(X)$ tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n \neq m$, cuja existência é garantida pelo teorema anterior. Então a cobertura aberta $(B_{\frac{1}{2}}(x))_{x \in X}$ não tem subcobertura finita, pois cada uma das bolas abertas contém no máximo um dos termos da sucessão. ■