Capítulo 3

Relação de Equivalência e Ordem

3.1 Relações de equivalência e abstracções

Uma relação binária $R(x, y)$ em que tanto x como y percorrem certo conjunto, X, diz-se relação de equivalência se tem as seguintes propriedades:

1) $\forall_x \, R(x, x)$ – propriedade reflexiva

2) $\forall_x \forall_y \, [R(x, y) \Rightarrow R(y, x)]$ – propriedade simétrica

3) $\forall_x \forall_y \forall_z \, [R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)]$ – propriedade transitiva

Por exemplo, sendo X o conjunto das rectas do plano, $x, y, \ldots$, a relação "x é paralela a y" é relação de equivalência (se se convencionar que cada recta é paralela a si própria); sendo X o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, a relação "x é aproximadamente igual a y a menos de $0,001$" não é relação de equivalência porque não satisfaz 3). As relações de equivalência intervêm no processo mental de abstracção do modo seguinte: por vezes, sabemos reconhecer se dois objectos, x e y, têm ou não certa analogia ainda que não saibamos definir a característica comum que os torna análogos, mas, se a relação $R(x, y)$ que traduz essa analogia entre x e y for uma relação de equivalência, dado um objecto, x_0, o conjunto $\{x : R(x_0, x)\}$ que representaremos por $\hat{x}_0$ e se chama a classe de equivalência definida por R e x_0 e o conjunto $\hat{x}_1 = \{x : R(x_1, x)\}$ em que x_1 satisfaz $R(x_0, x_1)$ – isto é, em que x_1 é análogo a x_0 – são iguais em virtude de 2) e 3). Deste modo, a propriedade de pertencer a esta classe de equivalência não depende especificamente de x_0, podendo ser definida por qualquer outro elemento, x_1, da mesma classe. Abstraimos assim um conceito novo, a propriedade comum a x_0 e aos objectos análogos (segundo R). Por exemplo, como a relação de paralelismo entre rectas do plano é uma equivalência, todas as paralelas a certa recta x_0 têm uma propriedade comum, que se chama a direcção definida por x_0 (ou por qualquer destas paralelas). Pelo contrário, com a relação de igualdade aproximada a menos de $0,001$, as coisas passam-se diferentemente: por exemplo, o n.° $2,4006$ tem a propriedade de diferir de $2,4$ menos de $0,001$ mas a propriedade de diferir de $2,4006$ menos de $0,001$ já é outra ($2,3992$ tem a primeira propriedade mas não a segunda).

Vimos que, se $R(x_0, x_1)$, as classes de equivalência $\hat{x}_0$ e $\hat{x}_1$ coincidem. Vejamos agora que, se $\sim R(x_0, x_1)$, as mesmas classes são disjuntas, isto é, $\hat{x}_0 \cap \hat{x}_1 = 0$. Porque, se existisse $x_2 \in \hat{x}_0 \cap \hat{x}_1$ verificar-se-iam $R(x_0, x_2)$ e $R(x_1, x_2)$, donde, por 2), $R(x_2, x_1)$ e, por 3), $R(x_0, x_1)$, contradição.

Exemplo:

No conjunto

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

"$x - y$ é múltiplo de 3" é uma relação de equivalência, visto que

$\forall_x \; x - x$ é múltiplo de 3
$\forall_x \forall_y \, (x - y$ múltiplo de $3 \Rightarrow y - x$ múltiplo de 3)
$\forall_x \forall_y \forall_z \, (x - y$ múltiplo de $3 \wedge y - z$ múltiplo de $3 \Rightarrow x - z$ múltiplo de 3)

As classes de equivalência são:

$$\hat{1} = \hat{4} = \{1, 4\}$$

$$\hat{2} = \hat{5} = \{2, 5\}$$

$$\hat{3} = \{3\}$$

Como se vê neste exemplo, e também de um modo geral, uma relação R de equivalência definida no conjunto X efectua uma decomposição de X em subconjuntos (as classes de equivalência) dois a dois sem elementos comuns.

Reciprocamente, seja dada uma decomposição de X em subconjuntos A_i:

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i$$

com

$$\forall_{i\in I}\,\forall_{j\in I}\,(i\neq j\Rightarrow A_i\bigcap A_j=0)$$

A relação $R(x,y)$ definida por $\exists_{i\in I}\,(x\in A_i\wedge y\in A_i)$, isto é, x e y satisfazem R sse ambos pertencem a um mesmo dos conjuntos A_i, é uma relação de equivalência.

Demonstremos, por exemplo, que R é transitiva. Suponhamos que $R(x,y)$ e $R(y,z)$, isto é,

$$\exists_{i\in I}\,(x\in A_i\wedge y\in A_i)$$

e

$$\exists_{j\in I}\,(y\in A_j\wedge z\in A_j)$$

Como

$$y\in A_i\cap A_j,\ A_i\cap A_j\neq 0,\ \text{donde } i=j$$

(porque $i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=0$) de modo que $z\in A_i$ e $\exists_i(x\in A_i\wedge z\in A_i)$, isto é, $R(x,z)$.

Dado um conjunto, X, e uma relação de equivalência, R, definida em X, fica então definido o conjunto das respectivas classes de equivalência, que se chama conjunto quociente de X pela relação R e se escreve X/R ou $\dfrac{X}{R}$.

No exemplo supra,

$$\frac{X}{R}=\{\{1,4\},\{2,5\},\{3\}\}.$$

Como a cada elemento x de X corresponde uma e uma só classe (porque duas classes distintas não têm elementos comuns), a classe $\hat{x}$, e como cada classe, $\hat{x}$, tem pelo menos um elemento (o próprio x), vê-se que a aplicação $x\mapsto\hat{x}$ é uma sobrejecção $X\to X/R$.

3.2 Cardinais

Um exemplo importante de conceito definido por uma relação de equivalência é o de número cardinal, ou cardinalidade ou potência de um conjunto; dados dois conjuntos X e Y diz-se que são equicardinais ou equipotentes ou têm o mesmo cardinal se existe uma bijecção de X para Y. A bijecção i_X e o facto de serem bijecções a inversa de uma bijecção e a composta de duas, mostram que esta relação entre X e Y é, de facto, uma equivalência e a correspondente noção é a de número cardinal [1].

Às diversas classes de equicardinalidade correspondem, assim, números cardinais [2]: à que é definida pelo conjunto vazio, $\emptyset$, (e que só possui esse conjunto) corresponde um cardinal a que se chama 0 (zero); à classe de equicardinalidade de que faz parte o conjunto $\{\emptyset\}$ (e todos os que lhe são equicardinais, como $\{a\}$, $\{24\}$, etc.) corresponde um cardinal a que se chama 1; chama-se 2 o cardinal do conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 3 o cardinal do conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ e assim por diante, considerando de cada vez um conjunto cujos elementos são todos os conjuntos anteriores.

Ficam, assim definidos o zero e os números naturais e poderiam definir-se também, para estes números, as relações de desigualdade $(\leq, \geq, <, >)$ e as operações $(+, -, \times, :,$ potenciação) que já conhecemos, e demonstrar, a partir dessas definições, as suas propriedades.

Em particular poderia demonstrar-se o princípio de boa ordem (em qualquer conjunto de números naturais há um que é o menor de todos) e o princípio de indução completa: se $P(n)$ é uma propriedade da variável natural n,

$$P(1) \wedge \forall_n \left[P(n) \Rightarrow P(n+1)\right] \Rightarrow \forall_n \; P(n)$$

Os números naturais constituem um conjunto $\mathbb{N}$, cujo cardinal (chamado álefe-zero, $\aleph_0$) já não é um número natural, pois (num sentido intuitivamente evidente, mas que adiante se definirá), os primeiros são finitos e o segundo não.

Poderia ainda pensar-se que todos os conjuntos infinitos tinham o mesmo cardinal, mas não é verdade: alguns têm "mais elementos" que outros, se se definir esta noção do seguinte modo:

Dados dois conjuntos X e Y, diz-se que $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$ se existe uma injecção $i : X \to Y$ (o que sucede, por exemplo, se $X \subseteq Y$). Se isto se verifica, i é também uma bijecção $X \to i(X) \subseteq Y$ e, reciprocamente, se existe uma bijecção $b : X \to Y_1 \subseteq Y$, b é também uma injecção $b : X \to Y$. Em particular, se $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ existe uma bijecção $b : X \to Y$ e b^{-1} é também

[1] O cardinal do conjunto A representa-se aqui pela sua primitiva notação: $\overline{\overline{A}}$. Outras são Card A e $\#A$.

[2] A ideia de definir deste modo o número de elementos de um conjunto, que aparece por vezes atribuída a Russell, foi exposta já em 1884 pelo matemático alemão F.L.G. Frege (1848 - 1925) a quem se deve a fundamentação da aritmética na lógica.

bijectiva: $Y \to X$, donde

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \Rightarrow \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$$

Podem então, em princípio, acontecer quatro casos:

$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$ (isto é, existem injecções $i : X \to Y$ e $j : Y \to X$)

$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \sim \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$

$\sim \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$

$\sim \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \sim \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$

É necessário recorrer agora a dois teoremas importantes da teoria dos conjuntos que não poderemos demonstrar aqui. O primeiro afirma que

$$\forall_X \forall_Y \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \vee \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}},$$

propriedade que, por vezes, se chama dicotómica (da relação $\leq$) ficando deste modo excluído o 4.° caso.

O outro teorema é o de Bernstein, e afirma que

$$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \wedge \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}} \Rightarrow \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$$

isto é, se existem injecções $i : X \to Y$ e $j : Y \to X$ existe uma bijecção $b : X \to Y$.

Deste modo, dados os cardinais de dois conjuntos quaisquer, X e Y, ou se está no primeiro caso e $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$, ou no segundo e diz-se então que $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$ porque é $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$ mas não $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$, ou no terceiro e diz-se então, por motivos análogos, que $\overline{\overline{Y}} < \overline{\overline{X}}$. Este resultado constitui a propriedade tricotómica da desigualdade de cardinais.

Definamos agora conjunto finito e conjunto infinito.

Representando por $X^* \subset X$ o facto de ser $X^* \subseteq X$ mas $X^* \neq X$, o que se exprime também dizendo que X^* é parte própria de X, diz-se que X é finito se nenhuma parte própria de X é equicardinal a X (isto é, se não existe nenhuma bijecção $b : X \to X^* \subseteq X$).

Por exemplo, $\{a, b\}$ com $a \neq b$ é finito porque as suas partes próprias são $\emptyset$, $\{a\}$ e $\{b\}$, e facilmente se vê que nenhuma é equicardinal a $\{a, b\}$. Um conjunto que não é finito diz-se infinito e o seu cardinal chama-se transfinito. Um exemplo simples é o do conjunto $\mathbb{N}$ que é equicardinal a $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, pela bijecção $b(n) = n + 1$, ou ao conjunto $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ dos quadrados dos números naturais [3]. Estes conjuntos e todos os que são equicardinais a $\mathbb{N}$ chamam-se conjuntos numeráveis, isto é, que podem ser numerados usando apenas os números naturais e todos eles.

Não podemos desenvolver aqui a teoria dos números cardinais (finitos ou transfinitos) e das suas relações e operações mas vamos citar alguns resultados importantes demonstrando alguns.

a) A infinito $\Rightarrow \overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{\mathbb{N}}}$

Suponhamos que existe $b : A \to A^* \subset A$. $A \setminus A^*$ tem pelo menos um elemento, a_1. Seja $a_2 = b(a_1), a_3 = b(a_2), \ldots$ e em geral $a_{n+1} = b(a_n)$.

Mostremos que estes elementos são todos distintos.

Com efeito, se não fossem todos distintos, pelo príncipio de boa ordem haveria um índice m que seria o menor índice tal que

$$\exists_{n>m}\, a_m = a_n.$$

De $n > m$ deduz-se sucessivamente $n > 1$, $a_n = b(a_{n-1})$, $a_n \in A^*$ (por ser imagem na bijecção b), $a_m \in A^*$ (por ser $= a_n$), $a_m = b(a_{m-1})$, $b(a_{m-1}) = b(a_{n-1})$ e $a_{m-1} = a_{n-1}$ por ser b bijectiva. Mas isto contraria a hipótese de ser m o menor índice, tal que

$$\exists_{n>m}\, a_m = a_n.$$

b) $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{\mathbb{N}}} \Rightarrow A$ infinito

Seja i uma injecção: $\mathbb{N} \to A$. i é também uma bijecção $i : \mathbb{N} \to i(\mathbb{N})$ que tem uma inversa $i_1 : i(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$.

[3] É o chamado paradoxo de Galileu: paradoxo, porque contradiz o axioma "a parte é menor que o todo" que vem já dos geómetras gregos, e de Galileu porque nos tempos modernos foi o astrónomo e físico florentino Galileu Galilei (1564 - 1642), bem conhecido protagonista da polémica em torno do heliocentrismo, quem chamou a atenção para este facto. Mas descobriu-se recentemente que já na primeira metade do séc. XIV se tinham ocupado do assunto dois autores, Henry of Harclay, em Oxford, e Gregorio da Rimini.

Considere-se a aplicação $j : A \to A$ definida por

$$j(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in A \setminus i\,(\mathbb{N}) \\ \\ i(i_1\,(x) + 1) & \text{se } x \in i\,(\mathbb{N}) \end{cases}$$

j não é sobrejectiva porque, no primeiro caso, $j(x) \in A \setminus i(\mathbb{N})$ e, no segundo, $i_1(x) + 1$ nunca toma o valor 1, de modo que $\in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e, como i é injectiva, $j(x) = i(i_1(x) + 1) \in\; i(\mathbb{N} \setminus \{1\}) = i(\mathbb{N}) \setminus \{i(1)\}$; logo, $j(x)$ nunca toma valor $i(1)$.

Por outor lado, j é injectiva, pois: se $j(x_1)$ e $j(x_2)$ resultam do primeiro caso (x_1 e $x_2 \in A \setminus i(\mathbb{N})$), $j(x_1) = j(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ porque $j(x_1) = x_1$, etc.; se $j(x_1)$ e $j(x_2)$ resultam do segundo caso,

$$\begin{aligned} j(x_1) \quad &= j(x_2) \Rightarrow i(i_1(x_1) + 1) = i(i_1(x_2) + 1) \Rightarrow i_1(x_1) + 1 = i_1(x_2) + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow i_1(x_1) = i_1(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

em vista de serem i e i_1 injectivas.

Então j é uma injecção $A \to A \setminus \{i(1)\} \subset A$ e A é infinito.

De a) deduz-se

c) Se A é infinito, contém um subconjunto numerável.

De a) e b) deduz-se

d) A é finito $\Leftrightarrow \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathbb{N}}}$

Pode demonstrar-se que também

e) A é finito $\Leftrightarrow \overline{\overline{A}}$ é um número natural, ou zero.

f) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é numerável.

g) A reunião de uma família numerável (isto é, cujo conjunto de índices é $\mathbb{N}$) de conjuntos numeráveis é um conjunto numerável.

h) A reunião de um número finito de conjuntos numeráveis é um conjunto numerável.

i) A reunião de um conjunto finito com um conjunto numerável é um conjunto numerável.

A segunda destas propriedades pode demonstrar-se elementarmente do seguinte modo. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é o conjunto de todos os pares (m, n) em que m e n são naturais. Se dispusermos estes pares num quadro com uma infinidade numerável de linhas e uma infinidade numerável de colunas como o que é sugerido à esquerda da figura 3 e se os numerarmos como é indicado pela outra parte da mesma figura, segundo linhas oblíquas [4] fica definida uma bijecção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \cdots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \cdots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 4 & 7 & 11 & \cdots \\
3 & 5 & 8 & 12 & \cdots & \cdots \\
6 & 9 & 13 & \cdots & \cdots & \cdots \\
10 & 14 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
15 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Fig. 3

A propriedade g) pode demonstrar-se por um processo análogo:

Sendo $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n \cup \ldots$ [5] uma reunião de conjuntos numeráveis, podemos dispôr os elementos de A_1 na primeira linha de um quadro como o dos pares (m, n) da figura 3, os de A_2 na segunda linha e assim por diante e enumerá-los de modo análogo ao que aí se indicou apenas com a precaução de desprezar os elementos que, por figurarem em mais de um dos conjuntos A_n, já tinham recebido numeração. A demonstração de h) é análoga à de g) e a de i) é muito fácil.

i) permite mostrar que é numerável o conjunto $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; daí, usando h), deduz-se que é numerável $\mathbb{Z}$ porque o conjunto dos inteiros negativos é evidentemente equicardinal a $\mathbb{N}$; g) permite mostrar que é numerável o conjunto

[4] É possível indicar explicitamente uma função $b(m, n)$ que defina uma bijecção $b : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de modo que esta propriedade se demonstre sem recurso à figura.

[5] Modo sugestivo de exprimir a reunião $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

$\mathbb{Q}^+$ dos números racionais positivos (A_1 seriam as fracções de denominador 1, A_2 as de denominador 2, etc...) e daqui se deduz, usando outra vez i) e h), que $\mathbb{Q}$ também é numerável.

Finalmente, mostremos que

j) $\overline{\overline{\mathcal{P}(X)}} > \overline{\overline{X}}$

Como a aplicação $x \mapsto \{x\}$ é uma injecção de X em $\mathcal{P}(X)$, $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(X)}}$. Se fosse igual, existiria uma injecção $i : \mathcal{P}(X) \to X$.

Seja $C = \{i(A) : i(A) \notin A\}$. Se fosse $i(C) \in C$, $i(C)$ seria um dos elementos $i(A)$ com a propriedade $i(A) \notin A$, logo $i(C) \notin C$, contradição. Se fosse $i(C) \notin C$, $i(C)$ teria aquela propriedade e $i(C) \in C$, outra contradição. Logo, não existe i.

3.3 Relações de ordem

Chama-se relação de ordem (parcial) em sentido lato num conjunto X uma relação binária R que tenha as seguintes propriedades:

1) $\forall_x\, R(x,x)$

2) $\forall_x\, \forall_y\, [R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow x = y]$

3) $\forall_x \forall_y \forall_z\, [R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)]$

A cada relação R deste tipo corresponde uma e uma só relação binária R', relação de ordem (parcial) em sentido restrito definida por $R'(x,y)$ sse $R(x,y) \wedge x \neq y$, que tem as propriedades seguintes:

1') $\forall_x \sim R'(x,x)$

2') $\forall_x\, \forall_y \sim [R'(x,y) \wedge R'(y,x)]$

3') $\forall_x\, \forall_y\, \forall_z\, [R'(x,y) \wedge R'(y,z) \Rightarrow R'(x,z)]$

como seria fácil de provar.

Reciprocamente, dada uma relação R' com as propriedades 1'), 2') e 3') e definindo R por meio de

$$R(x,y) \text{ sse } R'(x,y) \vee x = y$$

vê-se que R tem as propriedades 1), 2) e 3).

Também a partir de uma relação R se pode definir a relação inversa $R^{-1}(x, y)$, que se verifica sse $R(y, x)$ e que é também uma relação de ordem parcial, em sentido restrito ou em sentido lato, conforme for R.

Chama-se conjunto ordenado (parcialmente) um conjunto em que esteja definida uma relação de ordem parcial (por exemplo, em sentido lato R e, portanto, também as respectivas relações de ordem parcial R', R^{-1} e $(R^{-1})'$).

Mais propriamente, um conjunto ordenado é o par (X, R) em que X é um conjunto e R uma relação de ordem parcial.

Exemplos:

1.°) O exemplo típico é o da relação $x \leq y$ no conjunto $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

Por este motivo, em vez de $R(x, y)$, escreveremos muitas vezes $x \leq y$, mesmo que não se trate destes conjuntos ordenados e que $\leq$ tenha um significado diferente.

As respectivas relações R', etc., são $<$, $\geq$ e $>$.

2.°) Uma recta horizontal, como conjunto dos seus pontos, ordenados por "x não está à direita de y". No conjunto dos pontos de um plano esta relação já não é de ordem parcial por se não verificar 2) nem $2'$).

3.°) $\mathbb{N}$, com a relação "x é divisor de y".

4.°) Sendo E um conjunto, $\mathcal{P}(E)$ com a relação $X \subseteq Y$, em que $X \subseteq E$ e $Y \subseteq E$.

5.°) Considere-se o conjunto $\{a, b, c, \ldots, h\}$ de pontos indicados na figura 4:

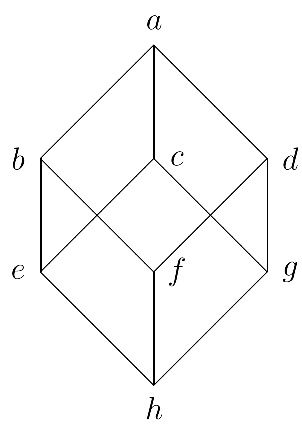


Fig. 4

com a relação “$x = y \ \vee \ x$ está abaixo de y e ligado a y por uma poligonal que não é intersectada em mais de um ponto por nenhuma recta horizontal”. Verifica-se, por exemplo, $R(h, h)$, $R(h, e)$, $R(h, c)$ mas não $R(e, f)$ porque uma poligonal que una e a f, como $e\ b\ f$ ou $e\ h\ f$ já não tem a propriedade indicada.

Sendo finito o conjunto ordenado X, pode representar-se a relação de ordem R por um esquema deste tipo.

O exemplo 3.°, no conjunto $\{2, 3, \ldots, 10\}$, tem o esquema

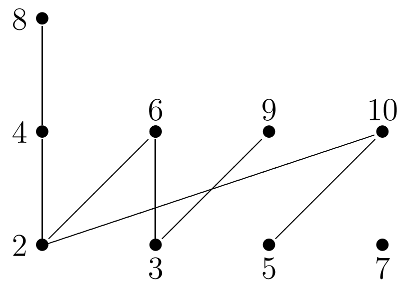


Fig. 5

Dado um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$, define-se:

a é um elemento máximo (ou maximal) de X quando, com $x \in X$, $\forall_x\ (a \leq x \Rightarrow a = x)$.

Do mesmo modo, a é um elemento mínimo (ou minimal) de X quando $\forall_x\ (x \leq a \Rightarrow x = a)$.

Pode haver ou não e haver um ou mais elementos máximos e mínimos. Assim, considerem-se os seguintes exemplos:

6.°) Em $(\mathbb{N}, \leq)$ não há máximos e há um único mínimo, 1.

7.°) Em $(\mathbb{Z}, \leq)$ e no segundo dos exemplos anteriores não há máximos nem mínimos.

8.°) No exemplo a que se refere a figura 5 há cinco máximos, 6, 7, 8, 9 e 10 e 4 mínimos, 2, 3, 5 e 7.

9.°) Em $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ há um máximo, $\{1, 2, 3\}$, e um mínimo, $\emptyset$. O esquema deste conjunto ordenado é o da figura 4.

Desta noção de máximo e mínimo é preciso distinguir a seguinte:

Chama-se o maior (ou o máximo) elemento de X, se existir, ao elemento $a \in X$ tal que $\forall_x \; x \leq a$. Analogamente, a é o menor (ou o mínimo) elemento de X quando $\forall_x \; a \leq x$.

O maior e o menor elemento de X podem existir ou não: em $(\mathbb{Z}, \leq)$ não existem; em $(\mathbb{N}, \leq)$ existe só o menor elemento, 1; em $(\mathcal{P}\{1,2,3\}), \leq)$ $\{1,2,3\}$ é o maior elemento e $\emptyset$ o menor.

a) O maior [menor] elemento de X, se existe é um máximo [mínimo] e o único máximo [mínimo].

Por exemplo, sendo a o maior elemento, $\forall_x \; x \leq a$. Então, se $a \leq x, a = x$, isto é, $\forall_x \,(a \leq x \Rightarrow a = x)$ e a é máximo.

Se fosse a' outro máximo, tinha de ser $a' \leq a$ (por ser a o maior) e $a' \leq a \Rightarrow a' = a$ por ser a' máximo; logo, $a' = a$.

Dado um subconjunto A do conjunto ordenado X, chama-se maiorante [6] de A, um elemento m de X tal que $\forall_{x \in A} \; x \leq m$; do mesmo modo, m é minorante de A quando $\forall_{x \in A} \; m \leq x$.

Como nas definições anteriores, pode haver ou não maiorantes e minorantes. E um ou mais.

Exemplos:

10.°) Em $(\mathbb{Z}, \leq)$ o conjunto $\mathbb{N}$ não admite maiorantes e tem muitos minorantes, como -4, 0 e até 1 (este por sinal $\in \mathbb{N}$).

11.°) No 5.° exemplo, o conjunto $A = \{b, c, d\}$ tem um só maiorante, a, que $\notin A$ e 4 minorantes, e, f, g, h.

Se $A = \emptyset$, como $\forall_{x \in A} \; x \leq m$ significa $\forall_x (x \in A \Rightarrow x \leq m)$ e a hipótese $x \in A$ é sempre F, qualquer $m \in X$ é maiorante (e, analogamente, é minorante) de A.

Por vezes usam-se as seguintes abreviaturas:

Em vez de $\forall_{x \in A} \; x \leq m$ escreve-se $A \leq m$ e, analogamente se interpretam $A < m$, $A \geq m$, $A > m$. Se $\forall_{x \in A} \; \forall_{y \in B} \; x \leq y$, escreve-se $A \leq B$ e do mesmo modo $A < B$, etc.[7].

[6] Melhor que "majorante" pois todas as palavras portuguesas da família de "maior" se escrevem com i, excepto "major".

[7] Não são relações de ordem em $\mathcal{P}(X)$.

Sendo $(X, \leq)$ um conjunto ordenado e $A \subseteq X$, A e a restrição [8] da relação $\leq$ ao conjunto A definem um novo conjunto ordenado. Pode, por exemplo, falar-se do maior dos elementos de A. E facilmente se vê que

b) O maior [menor] dos elementos de A é maiorante [minorante] de A (no conjunto ordenado $(X, \leq)$).

Considere-se agora o conjunto M_A dos maiorantes [minorantes] de A. Se existe o menor [maior] elemento de M_A, chama-se-lhe supremo ou extremo superior [ínfimo ou extremo inferior] de A e representa-se por $\sup\ A$ [$\inf\ A$]. Pode existir ou não, mas se existir é único em virtude de a).

Exemplos:

12.°) $\mathbb{N}$ em $(\mathbb{Z}, \leq)$ não tem supremo (porque não tem maiorantes) mas tem ínfimo, que é 1 e $\in \mathbb{N}$.

13.°) $\{b, c, d\}$, do exemplo 11.°, tem supremo, a, que $\notin \{b, c, d\}$ mas não tem ínfimo.

14.°) Considere-se uma recta horizontal de que se excluiu um ponto, p, e ordene-se este conjunto, X, pela relação do exemplo 2.° (figura 6).

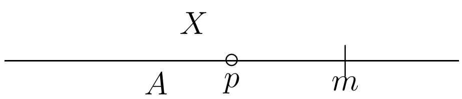


Fig. 6

Seja $A = \{x : x \text{ está à esquerda de } p\}$. Os maiorantes de A são todos os pontos de X que estão à direita de p (p não é maiorante porque não faz parte de X). Mas não existe $\sup\ A$ porque, dado um dos maiorantes, m, o ponto médio do segmento pm ainda é maiorante de A e está à esquerda de m.

Seja A uma parte do conjunto parcialmente ordenado X e M_A o conjunto dos seus maiorantes.
Então:

[8] Isto é, a relação $\leq (x, y)$ que se verifica sse $x \in A$, $y \in A$ e $x \leq y$. Salvo indicação em contrário, quando se considera como conjunto ordenado um subconjunto A de $(X, \leq)$ supõe-se que se toma para relação de ordem em A esta restrição de $\leq$.

a) m é o maior dos elementos de A sse $m \in A \cap M_A$.

Pois a definição de "maior dos elementos" foi que $m \in A$ e $\forall_{x \in A}\ x \leq_A m$ sendo $\leq_A$ a restrição da relação $\leq$ ao conjunto A.

Mas, entre elementos x e m de A, $x \leq_A m$ sse $x \leq m$, sendo pois m o maior dos elementos de A sse $m \in A \wedge \forall_{x \in A}\, x \leq m$, isto é, sse $m \in A \cap M_A$.

a′) m é o menor dos elementos de A sse $m \ \in A$ e m é minorante de A.

b) Se $m \in A \cap M_A$, $m = \sup\ A$

m é maiorante de A. Para qualquer outro maiorante, m', $\forall_{x \in A}\ x \leq m'$, logo, porque $m \in A$, $m \leq m'$, isto é, m é minorante de M_A e, como $\in\ M_A$ de acordo com a′) é o menor dos maiorantes de A, isto é, o $\sup\ A$.

b′) Se algum minorante de A pertencer a A é o $\inf A$.

c) Se existe $\inf\ M_A$, existe $\sup\ A$ e é igual. E reciprocamente.

Seja $c = \inf\ M_A$.

Ora

$$\forall_{a \in A}\ a \leq M_A \ (a \text{ é minorante de } M_A),$$

donde

$$\forall_a\ a \leq c$$

por ser c o maior dos minorantes de M_A.

Logo, $c \in M_A$, mas como é minorante de M_A, por a′), c é o menor elemento de M_A, isto é, $\sup\ A$.

Reciprocamente, se $c = \sup\ A$, é o menor elemento de M_A, logo, por a′) e b′), é o $\inf M_A$.

c′) Se existe o supremo dos minorantes de A, existe $\inf A$ e é igual. E reciprocamente.

Facilmente se vê que

d) $m \geq A \Leftrightarrow m \geq \sup\ A$ e $m \leq A \Leftrightarrow m \leq \inf\ A$.

e) Se $A \subseteq B$, $\sup\ A \leq \sup B$ caso estes supremos existam.

De facto, $x \in A \Rightarrow x \in B$.
Logo, $\forall_{x\in B}\, x \leq m \Rightarrow \forall_{x\in A}\, x \leq m$.
Logo, $m \in M_B \Rightarrow m \in M_A$, isto é, $M_B \subseteq M_A$.

Como sup $B \in M_B$, sup $B \in M_A$, e como sup A é o menor elemento de M_A, sup $A \leq$ sup B.

e′) Se $A \subseteq B$ e inf A e inf B existem, inf $A \geq$ inf B.

f) Se $A \neq \emptyset$ e inf A e sup A existem, inf $A \leq$ sup A porque $\exists_a\, a \in A$ e inf $A \leq a \leq$ sup A.

Mas é costume considerar $\sup \emptyset$ igual ao menor dos elementos de X e $\inf \emptyset$ igual ao maior, se estes elementos existirem (porque, por exemplo, $\forall_{m\in X}\, (x \in \emptyset \Rightarrow x \leq m)$, de modo que $M_\emptyset = X$).

Seja $f : X \to Y$, em que X é um conjunto qualquer e Y um conjunto ordenado pela relação $\leq$. Seja $A \subseteq X$.

$f(A)$, como parte de Y, pode ter ou não sup e inf, que se chamam então supremo ou ínfimo de f em A e se representam por $\sup\limits_A f$ e $\inf\limits_A f$ ou $\sup\limits_{x\in A} f(x)$ e $\inf\limits_{x\in A} f(x)$.

Se em particular este supremo ou este ínfimo pertencerem a $f(A)$, isto é, forem valores efectivamente tomados pela função f em A, chamam-se o máximo absoluto [9] de f em A e o mínimo absoluto de f em A.

Por exemplo, sendo $f : R \to R$ dada por $x \mapsto x^2$ e $A = [-1, 2[$, $f(A)$ é $[0, 4[$, $\inf\limits_A f = 0$, $\sup\limits_A f = 4$ e 0 é também o mínimo absoluto de f em A.

g) $A \subseteq B \Rightarrow \sup\limits_A f \leq \sup\limits_B f \wedge \inf\limits_A f \geq \inf\limits_B f$

Basta atender a e) e e′) e a que $f(A) \subseteq f(B)$.

h) Se $\forall_{x\in A}\, f(x) \leq g(x)$ e se $\sup\limits_A f$ e $\sup\limits_A g$ existem, $\sup\limits_A f \leq \sup\limits_A g$.

Porque a hipótese implica que qualquer maiorante de $g(A)$ é maiorante de $f(A)$, isto é, $M_{g(A)} \subseteq M_{f(A)}$, donde inf $M_{f(A)} \leq$ inf $M_{g(A)}$ e estes ínfimos são precisamente $\sup\limits_A f$ e $\sup\limits_A g$.

[9] Mesmo que, para abreviar, se diga apenas "o máximo de f em A" distingue-se esta noção da de "um máximo de $f(A)$" porque agora se usa o artigo definido.

h′) Sob a mesma condição, se $\inf_A f$ e $\inf_A g$ existem, $\inf_A f \leq \inf_A g$.

As noções de supremo, máximo, etc., de uma função aplicam-se naturalmente a famílias $(x_i : i \in I)$, bastando que $x_i \in X$, parcialmente ordenado.

Em particular o conjunto dos índices pode ser um produto cartesiano $I \times J$, isto é, pode tratar-se de um aplicação $x : I \times J \to X$, dada por $(i, j) \mapsto x_{ij}$.

Sem demonstração, citaremos uma propriedade importante.

i) Se $\forall_{j \in J} \sup_{I \in I} x_{ij}$ existe, então $\sup_{(i,j) \in I \times J} x_{ij}$ existe sse existe $\sup_{j \in J} \sup_{i \in I} x_{ij}$ e, nesse caso, estes dois supremos coincidem.

Seja agora $f : X \to Y$ uma aplicação entre dois conjuntos parcialmente ordenados por certas relações de ordem que, para simplificar, designaremos – ambas – pelo mesmo sinal $\leq$.

Diz-se que f é crescente em sentido lato quando

$$\forall_x \forall_y [x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]$$

Analogamente, diz-se que f é crescente em sentido restrito, decrescente em sentido lato e decrescente em sentido restrito quando se verificam propriedades análogas em que apenas a desigualdade $f(x) \leq f(y)$ é substituída, respectivamente por $f(x) < f(y)$, $f(x) \geq f(y)$ e $f(x) > f(y)$.

No primeiro e no terceiro casos diz-se, ainda, que f é monótona em sentido lato e que é monótona em sentido restrito nos outros dois.

É claro que a função crescente em sentido restrito é também crescente em sentido lato, etc.

Se f é crescente e decrescente em sentido lato, $\forall_x \forall_y [x < y \Rightarrow f(x) = f(y)]$, de modo que f é constante.

15.°) Exemplos de aplicações $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ classificadas quanto ao crescimento:

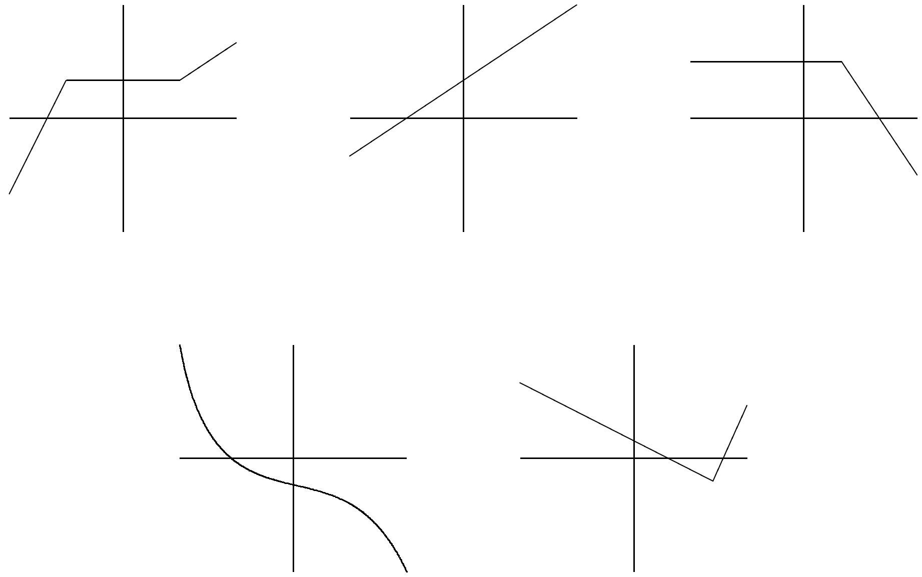


Fig. 7

Num conjunto parcialmente ordenado, X, dados dois elementos a e b, chamam-se intervalos de extremos a e b (por esta ordem) os conjuntos

$[a,b] = \{x : a \leq x \wedge x \leq b\}$ [10]	intervalo fechado
$]a,b[= \{x : a < x \wedge x < b\}$	intervalo aberto
$[a,b[= \{x : a \leq x \wedge x < b\}$	intervalo fechado à esquerda e aberto à direita
$]a,b] = \{x : a < x \wedge x \leq b\}$	intervalo aberto à esquerda e fechado à direita

Consideram-se ainda os intervalos ilimitados $[a,\rightarrow\ [$, $]a,\rightarrow\ [$, $]\ \leftarrow,b]$, $]\ \leftarrow,b[$ e $]\ \leftarrow,\rightarrow[$, que significam, respectivamente,

$$\{x : a \leq x\},\ \ \{x : a < x\},\ \ \{x : x \leq b\},\ \ \{x : x < b\}\ \text{ e }\ X$$

16.°) Exemplos de intervalos no conjunto ordenado do exemplo 5.°.

$$[e,a] = \{e,b,c,a\},\ \ [g,a[= \{g,c,d\},\ \ ]f,c[= \emptyset,\ \ [f,\rightarrow[= \{f,b,d,a\},$$

$$[f,f] = \{f\},\ [f,h] = \emptyset,\ \ ]\leftarrow,h[= \emptyset$$

Facilmente se vê que os intervalos $[a, \rightarrow[$ e $]\leftarrow, b]$ e, se $a \leq b$, os intervalos $[a, b]$, $[a, b[$ e $]a, b]$ não podem ser vazios.

Se $a < b$ e $]a, b[$ é vazio, diz-se que a e b são consecutivos.

Consideremos agora diversas espécies particulares de conjuntos ordenados.

Diz-se que X, ordenado por $\leq$, é filtrante à direita [esquerda] quando

$$\forall_x \forall_y \exists_m (x \leq m \wedge y \leq m) \; [\forall_x \forall_y \exists_m (m \leq x \wedge m \leq y)],$$

isto é, quando dois quaisquer elementos possuem um maiorante [minorante] comum.

j) Num conjunto filtrante à direita [esquerda], qualquer elemento máximo é o maior [menor] elemento.

Seja a o máximo.

$$\forall_x \exists_m (a \leq m \wedge x \leq m).$$

Como a é um máximo,

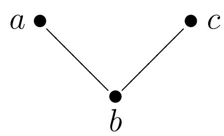
$$a \leq m \Rightarrow a = m,$$

donde

$$\forall_x \;\; x \leq a.$$

17.°) O conjunto do exemplo 3.° é filtrante à direita (por exemplo $m =$ m.m.c. (x, y)) e à esquerda ($m = 1$).

18.°) O conjunto parcialmente ordenado a, b, c representado por



é filtrante à esquerda mas não à direita.

Diz-se que X é um reticulado quando, dados dois quaisquer elementos, x e y, existem

$$\sup\{x, y\} \quad \text{e} \quad \inf\{x, y\}$$

Exemplo:

19.°) $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um reticulado.

Dados A e B, contidos em E, os maiorantes de A, B, isto é, os subconjuntos de E que contêm A e B são $A \cup B$ e todos os conjuntos que contêm $A \cup B$. $A \cup B$ é, pois, um maiorante $\leq$ que qualquer outro (isto é, $\subseteq$ em qualquer outro).

Logo, $A \cup B = \sup\{A, B\}$ e analogamente $\inf\{A, B\} = A \cap B$, no conjunto ordenado que estamos considerando.

1) Num reticulado a intersecção de dois intervalos é um intervalo.

Bastará analisar o que se passa num dos casos; os outros são análogos.

$$\begin{aligned}
[a', b[\, \cap \,]a'', \rightarrow [\; &= \{x : a' \leq x \wedge x < b\} \cap \{x : a'' < x\} \\
&= \{x : a' \leq x \wedge x < b \wedge a'' \leq x \wedge a'' \neq x\} \\
&= \{x : a' \leq x \wedge a'' \leq x \wedge a'' \neq x \wedge x < b\}.
\end{aligned}$$

Seja $a = \sup\, \{a', a''\}$.
Então

$$a' \leq x \wedge a'' \leq x \Leftrightarrow \{a', a''\} \leq x \Leftrightarrow a \leq x$$

(de acordo com d). Logo, a intersecção daqueles intervalos é igual a

$$\{x : a \leq x \wedge a'' \neq x \wedge x < b\} = [a, b[\setminus \{a''\}.$$

Como $a'' < a \vee a'' = a$, a mesma intersecção ou é $[a, b[$ ou $]a, b[$.

Chama-se denso um conjunto parcialmente ordenado, tal que

$$\forall_a \forall_b \, (a \leq b \Rightarrow]a, b[\neq 0),$$

isto é, onde não há elementos consecutivos.

Por exemplo, $(\mathbb{Q}, \leq)$ é denso, porque, dados

$$\frac{m_1}{n_1} \text{ e } \frac{m_2}{n_2},$$

a sua média aritmética é ainda $\in \mathbb{Q}$ e pertence ao intervalo aberto determinado por aqueles números; $(\mathbb{Z}, \leq)$ não é denso porque $]2, 3[$, por exemplo, é vazio.

Chama-se completo um conjunto parcialmente ordenado que satisfaz uma das três condições seguintes (em que A e B designam subconjuntos do c.p.o. X)

1) $\forall_A (A \neq \emptyset \wedge A$ maiorado $\Rightarrow \exists_s\ s = \sup\ A)$

2) $\forall_B (B \neq \emptyset \wedge B$ minorado $\Rightarrow \exists_i\ i = \inf\ B)$

3) $\forall_A \forall_B (A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \leq B \Rightarrow \exists_x\ A \leq x \leq B)$

(diz-se que entre A e B, com $A \leq B$, há uma lacuna se $\sim \exists_x\, A \leq x \leq B$).

Estas três condições são equivalentes entre si, bastando verificar-se uma delas para que as outras se verifiquem (e o c.p.o. seja completo).

Demonstração:

Vejamos que 1) $\Rightarrow$ 3). Se A e B satisfazem a hipótese de 3), como $B \neq 0$, $\exists_b (b \in B \wedge A \leq b)$ (porque $A \leq B$) de modo que A é maiorado; por 1) existe $s = \sup\ A$, o que implica, conforme a definição de sup, $s \in M_A$ e $s \leq M_A$, donde, respectivamente $A \leq s$ e $s \leq B$ (porque todos os elementos de B pertencem a M_A por ser $A \leq B$); s é então o x a que se refere a tese de 3).

Vejamos que 3) $\Rightarrow$ 2).

Seja $B \neq 0$ e minorado e seja $A = \{x : x$ é minorante de $B\}$. $A \neq 0$ porque B é minorado e $A \leq B$, dada a definição de A.

Então, por 3), $\exists_i\, A \leq i \leq B$. $A \leq i$ significa que i é $\geq$ qualquer minorante de B; $i \leq B$ significa ser i minorante de B.

Logo, $i = \inf\ B$.

Vejamos que 2) $\Rightarrow$ 1).

Se A satisfaz as hipóteses de 1), A maiorado, donde $M_A \neq 0$, e $A \neq 0$, de modo que M_A minorado (por ser $A \leq M_A$).

Então, por 2), existe $\inf\ M_A$, mas, como se viu em c), existe então $\sup\ A$.

20.°) Exemplo de um c.p.o. completo é $(\mathbb{Z}, \leq)$ pois se A é um conjunto de inteiros não vazio ($\exists_{n_1}\, n_1 \in A$) e maiorado ($\exists_{n_2}\, A \leq n_2$), como $n_1 \leq n_2$ e entre n_1 e n_2 há apenas um número finito de inteiros, pode verificar-se um a um se $\in A$ ou $\notin A$ e encontrar-se assim o maior dos elementos de A, que é o $\sup\ A$.

21.°) Exemplo de um c.p.o. não completo é o exemplo 14.°, acima mencionado, por não existir $\sup A$ como logo se vê.

Há aqui, pois, uma lacuna entre A e $X \setminus A$ como a figura 6 sugere.

22.°) Outro exemplo de c.p.o. não completo é $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Seja $A = \{q : q > 0 \wedge q^2 < 2\}$. $1 \in A$, logo $A \neq 0$. $q \in A \Rightarrow q \leq 2$, pois $q > 2 \Rightarrow q^2 > 4$; logo $A \leq 2$.

Se existisse, em $\mathbb{Q}$, $s = \sup\ A$, teria de ser $1 \leq s \leq 2$.

Vejamos o valor de s^2.

Se $s^2 = 2$, seja $s = \dfrac{m}{n}$, irredutível.

Então $\dfrac{m^2}{n^2} = 2$, $m^2 = 2\ n^2$, m par, $m = 2\ p$, $4\ p^2 = 2\ n^2$, $2\ p^2 = n^2$ e n par contra a hipótese de ser $\dfrac{m}{n}$ irredutível.

Se $s^2 < 2$, como $s^2 \geq 1$, $0 < 2 - s^2 \leq 2 - 1 = 1$.

Então,

$$\begin{aligned}(s + \frac{2-s^2}{5})^2 &= s^2 + \frac{2}{5}\ s\ (2 - s^2) + \frac{(2-s^2)^2}{25} \\ &\leq s^2 + \frac{4}{5}\,(2 - s^2) + \frac{2-s^2}{25}\end{aligned}$$

(atendendo a que $s \leq 2$ e $2 - s^2 \leq 1$), donde

$$(s + \frac{2-s^2}{5})^2 = s^2 + \frac{21}{25}\,(2 - s^2) < s^2 + (2 - s^2) = 2.$$

O racional $s + \dfrac{2-s^2}{5} \in A$, não podendo s ser maiorante de A.

Se $s^2 > 2$, $0 \leq s^2 - 2$, e

$$\begin{aligned}(s - \frac{s^2-2}{5})^2 &= s^2 - \frac{2}{5}\ s\ (s^2 - 2) + \frac{(s^2-2)^2}{25} \\ &\geq s^2 - \frac{4}{5}\,(s^2 - 2)\end{aligned}$$

porque $s \leq 2$, vindo

$$(s - \frac{s^2-2}{5})^2 > s^2 - \frac{5}{5}\,(s^2 - 2) = 2.$$

Como $s^2 \leq 4$, $\dfrac{s^2-2}{5} \leq \dfrac{2}{5} < s$ e $s - \dfrac{s^2-2}{5}$ é positivo.

Logo, $s - \dfrac{s^2-2}{5} \notin A$ e, se $q > s - \dfrac{s^2-2}{5}$ também $q > 0$ e $q^2 > 2$, donde $q \notin A$.

Então, $q \in A \Rightarrow q \leq s - \dfrac{s^2-2}{5}$ e $s - \dfrac{s^2-2}{5} \in M_A$ sendo $< s$, o que contradiz $s = \sup\ A$.

Finalmente, um conjunto parcialmente ordenado (X, R) diz-se totalmente ordenado ou linearmente ordenado se R satisfaz

4) $\forall_x \forall_y \,[R(x,y) \vee R(y,x)]$

não podendo, pois, existir em X elementos incomparáveis (tais que nem $x \leq y$ nem $y \leq x$).
O conjunto do exemplo 5.° não é linearmente ordenado. Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são-no.

Se R satisfaz esta condição, a respectiva relação de ordem em sentido restrito, R', satisfaz a propriedade tricotómica:

$\forall_x \forall_y$ Verifica-se sempre uma e uma só das três condições seguintes:

$$R'(x,y),\ x = y,\ R'(y,x).$$

De facto, se $R(x,y) \vee R(y,x)$, há três casos possíveis:

$R(x,y) \wedge R(y,x)$, donde, por 2), $x = y$;

$R(x,y) \wedge \sim R(y,x)$, donde $R'(x,y)$, porque $\sim R(y,x)$ implica, em vista de 1), $x \neq y$; e analogamente, se $\sim R(x,y) \wedge R(y,x)$.

Em sentido inverso, se R' é tricotómica, a respectiva relação R satisfaz 1) e 2), como facilmente se vê, de modo que se pode caracterizar um conjunto totalmente ordenado por meio de uma relação de ordem (em sentido restrito) que seja, apenas, transitiva e tricotómica.

Algumas propriedades dos c.t.o.

m) Se $(X, \leq)$ é totalmente ordenado, é um reticulado.

Pois, dados a e b, se $a \leq b$, $\sup\ \{a,b\} = b$ e $\inf\ \{a,b\} = a$, e inversamente se $a \geq b$.

n) Uma aplicação, f, monótona em sentido restrito de um conjunto totalmente ordenado X num conjunto parcialmente ordenado, Y, é injectiva e a respectiva aplicação $f^{-1} : f(X) \to X$ é crescente em sentido restrito ou decrescente em sentido restrito conforme for f.

Supondo f crescente,

$$x \neq y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ \text{ou} \\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

de modo que f é injectiva. Inversamente, dados dois elementos de $f(X)$, $f(x)$ e $f(y)$, $f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$ e o esquema anterior mostra que

$$f^{-1}[f(x)] = x \gtrless y = f^{-1}[f(y)] \ \text{ conforme } \ f(x) \gtrless f(y).$$

o) Num conjunto totalmente ordenado, X, dado um subconjunto, A,

$$s = \sup\ A \Leftrightarrow s \geq A \wedge \forall_x \left(x < s \Rightarrow \exists_{a \in A}\, x < a \leq s\right)$$

De facto, se $s = \sup\ A$, é $\geq A$ e sendo $x < s$, $\sim x \geq A$, logo $\exists_{a \in A} \sim x \geq a$.

Ora, sendo X totalmente ordenado,

$$\forall_x \left(\sim\ x \geq a \Leftrightarrow x < a\right)$$

de modo que [11] $\exists_{a \in A}\, x < a$ e $a \leq s$ por ser $s = \sup\ A$.

Reciprocamente $x < s \Rightarrow \exists_a\, x < a$ significa $x < s \Rightarrow\sim x \geq A$, donde $x \geq A \Rightarrow\sim x < s \Rightarrow x \geq s$. Logo, s é minorante de M_A, mas como $s \geq A$, $s \in M_A$ e é o sup A.

Analogamente, num conjunto totalmente ordenado

$$i = \inf\ A \Leftrightarrow i \leq A \wedge \forall_x (x > i \Rightarrow \exists_a x > a \geq i).$$

[11] De $\forall_x(\sim x \geq a \Leftrightarrow x < a)$ deduz-se sucessivamente $\forall_x(\sim\sim x \leq a \Leftrightarrow\sim x < a)$, e por 3) da pág. ??, $\forall_x \sim\sim x \geq a \Leftrightarrow \forall_x \sim x < a$, e finalmente $\sim \forall_x \sim\sim x \geq a \Leftrightarrow\sim \forall_x \sim x < a$, isto é, $\exists_x \sim x \geq a \Leftrightarrow \exists_x\, x < a$.