Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 3 de Fevereiro de 2005

Duração: 2h 30m

Observação: Justifique sucintamente as suas afirmações.

1. Mostre que, para A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$,

   (a) $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$;

   (b) nem sempre se tem $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(A \cup B)$.

2. Calcule os limites das sucessões:

   (a) $\left(\dfrac{n \arctan(n)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;

   (b) $\left(n\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Escolha, se possível, constantes reais a e b de forma que a função definida por $f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + b & \text{se } x \leq 1 \\ x\cosh(x^2-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$ seja derivável em $\mathbb{R}$.

4. (a) Mostre que não existe nenhuma função derivável em $\mathbb{R}$ cuja derivada seja a função definida por $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

   (b) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ uma função derivável em $[a,b[$ tal que, para todo o $x \in]a,b[$, $|f'(x)| < 2005$. Mostre, utilizando o Teorema do Valor Médio de Lagrange, que f é uma função limitada.

5. (Os alunos que pretendam conservar a nota do trabalho devem responder a apenas uma das questões A e B seguintes.)

   A. (a) Deduza a fórmula de Taylor de ordem 2 com resto de Lagrange, no ponto $a = \frac{\pi}{2}$, da função definida por $f(x) = \log(\sin x)$.

   (b) Mostre que, para todo o $x \in]0,\pi[$, $f(x) \leq -\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2}$.

   B. Um homem, que é capaz de nadar a uma velocidade 6 vezes inferior à sua velocidade de corrida, encontra-se a tomar banho no rio e está a 10 metros de distância do ponto mais próximo da margem. Se ele pretender alcançar o mais depressa possível um outro ponto da margem, situado a 30 metros do primeiro, em que direcção deverá nadar?

6. Suponha que a função $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in X \cap X'$. Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

   (a) $\exists L \in \mathbb{R} \;:\; \lim\limits_{x\to a}(f(x) - f(a) - L(x-a)) = 0.$

   (b) $\forall L \in \mathbb{R} \;:\; \lim\limits_{x\to a}(f(x) - f(a) - L(x-a)) = 0.$

   (c) $\exists L \in \mathbb{R} \;:\; \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{x-a} = 0.$

   (d) $\forall L \in \mathbb{R} \;:\; \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{x-a} = 0.$