Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 Folha 1

CAPÍTULO I: Fundamentos

1. Qual o valor de verdade de cada uma das seguintes proposições?
   (a) 8 é par ou 6 é ímpar. (b) 8 é par e 6 é ímpar.
   (c) 8 é ímpar e 6 é ímpar. (d) 8 é par ou 6 é par.

2. Quais das seguintes frases são a negação à proposição apresentada?

   Proposição 1: Os pepinos são verdes e têm sementes.

   (a) Os pepinos não são verdes e não têm sementes.
   (b) Os pepinos não são verdes ou não têm sementes.
   (c) Os pepinos são verdes e não têm sementes.

   Proposição 2: Tem-se $2 < 7$ ou 3 é ímpar.

   (a) Tem-se $2 > 7$ e 3 é par. (b) Tem-se $2 \geq 7$ e 3 é par.
   (c) Tem-se $2 \geq 7$ ou 3 é ímpar. (d) Tem-se $2 \geq 7$ ou 3 é par.

3. Construa e compare as tabelas de verdade para as seguintes expressões:
   (a) $p \vee \neg p$ (b) $p \wedge \neg p$ (c) $\neg(p \wedge q)$
   (d) $\neg p \vee \neg q$ (e) $p \wedge (q \vee r)$ (f) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

4. Qual o valor de verdade de cada uma das seguintes proposições?
   (a) Se 8 for ímpar então 6 é ímpar. (b) Se 8 for par então 6 é ímpar.
   (c) Se 8 for ímpar então 6 é par. (d) Se 8 for ímpar e 6 for par então $8 < 6$.

5. Escreva a recíproca, negação e contra-recíproca de cada uma das seguintes expressões:
   (a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ (b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (c) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

6. Escreva o recíproco, o contra-recíproco e a negação das seguintes frases:

   (a) Se chove então há nuvens no céu.
   (b) Se 229 é primo então Roma é a capital de França.
   (c) Se 147 é primo então Paris é a capital de França.
   (d) Se a economia melhorar arranjarei um emprego melhor.
   (e) Se $2 < 4$ e $5 + 5 = 10$ então $\sin(\pi/3) = 1/2$.

7. Escreva cada uma das frases na forma de implicação $p \Rightarrow q$.

   (a) Se comeres demasiado bolo ficas mal disposto.
   (b) Continua a comer bolo e arrepender-te-ás.
   (c) Sai ou chamo a polícia.
   (d) Vou-me embora se não pararem de falar.

8. Determine a proposição contra-recíproca de cada uma das proposições do exercício anterior.

9. Determine o antecedente e o consequente de cada uma das seguintes proposições:
   (a) Um aumento significativo no poder dos computadores é uma condição necessária para futuros avanços tecnológicos.
   (b) Erros serão introduzidos se efectuarmos uma modificação neste programa.
   (c) Para poupar combustível é necessário instalar um bom isolamento térmico, assim como janelas duplas.

10. Construa tabelas de verdade para as seguintes expressões:

(a) $p \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)$	(b) $p \wedge q \Rightarrow \neg p$	(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)]$
(d) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	(e) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg q \vee \neg p$	(f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
(g) $((p \vee q) \wedge \neg r) \Rightarrow \neg p \vee r$	(h) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$	(i) $(p \vee \neg p) \Rightarrow (q \wedge \neg q)$
(j) $[\neg q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p$	(k) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$	(l) $\neg((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r)$
(m) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$	(n) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	(o) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

11. Sem construir tabelas de verdade, verifique que as seguintes expressões são tautologias:
   (a) $(p \vee \neg r) \wedge [(p \vee \neg r) \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (q \wedge r)$
   (b) $[(p \vee \neg r) \wedge (q \Rightarrow (\neg p \wedge r))] \Rightarrow \neg q$

*12. Prove que uma expressão não contendo conectivos lógicos além de $\Leftrightarrow$ é uma tautologia se e só se cada variável (letra) aparece um número par de vezes.

13. Analise a validade dos seguintes argumentos:
   (a) Se hoje for segunda-feira amanhã será terça-feira. Mas hoje não é segunda feira, logo, amanhã não é terça.
   (b) Hoje é segunda ou terça-feira. Mas hoje não é segunda. Então hoje é terça-feira.
   (c) Sendo $p \Rightarrow q$ uma tautologia para que $q \Rightarrow p$ seja uma tautologia é necessário e suficiente que $p \Leftrightarrow q$ seja uma tautologia. Sabendo que $p \Rightarrow q$ é uma tautologia e $p \Leftrightarrow q$ não é uma tautologia então $q \Rightarrow p$ não é uma tautologia.

14. Num certo país cada habitante é um amante da verdade ou é um amante da mentira e, como tal, diz sempre a verdade ou diz sempre a mentira. Ao viajar neste país encontrei o Pedro e o Luís. O Pedro disse-me: "Se eu for um amante da verdade então o Luís é um amante da verdade." Será Pedro um amante da verdade ou da mentira? E o Luís?

15. (a) Sendo $p \Leftrightarrow q$ uma proposição verdadeira, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $p \Leftrightarrow \neg q$ e $\neg p \Leftrightarrow q$?
   (b) Supondo agora que $p \Leftrightarrow q$ é falso, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $p \Leftrightarrow \neg q$ e $\neg p \Leftrightarrow q$?
   (c) Sendo $p \Rightarrow q$ uma proposição verdadeira, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $\neg p \wedge q \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$?

*16. (a) Noutro país há, além dos amantes da verdade e da mentira, pessoas normais que mentem só de vez em quando. Ao encontrar um grupo com uma pessoa de cada tipo dizem-me:
   António: "Sou normal". Bruno: "Isso é verdade". Cristiano: "Eu não sou normal".
   Que podemos concluir?
   (b) No mesmo país encontro o Diogo, que diz ao Eugénio: "Tu dizes mais vezes a verdade do que eu", que responde: "Isso não é verdade". Podemos concluir alguma coisa?

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 — Folha 2

CAPÍTULO I: Fundamentos

17. O Artur, o Bernardo e o Carlos, suspeitos de terem assaltado uma loja de chocolates, fazem os seguintes depoimentos:

Artur: "Bernardo é culpado, mas Carlos é inocente".
Bernardo: "Se Artur é culpado então Carlos é culpado".
Carlos: "Estou inocente, mas um dos outros dois é culpado".

(a) Os três depoimentos são compatíveis?
(b) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?
(c) Supondo que todos disseram a verdade, quem é inocente e quem é culpado?
*(d) Supondo que os inocentes disseram a verdade e os culpados mentira, quem é inocente e quem é culpado?

18. (a) Mostre que bastam os conectivos lógicos $\neg$ e $\vee$ (também seria verdade para $\neg$ e $\Rightarrow$) para representar todas as operações lógicas.

(b) Mostre que basta o conectivo lógico $|$, dado pela tabela de verdade

p	q	$p\,|\,q$
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F

para representar todas as operações lógicas.

*(c) Existem mais algumas operações lógicas com esta propriedade? Quantas?

*19. Na notação de Łukasiewicz utiliza-se a notação "$\vee p\, q$" em vez de "$p \vee q$" (para os conectivos $\wedge$, $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ a notação é análoga, em particular utiliza-se "$\Rightarrow p\, q$" em vez de "$p \Rightarrow q$"). Uma expressão nesta notação deve ler-se da direita para a esquerda, aplicando-se os conectivos que forem aparecendo ao par de expressões (no caso do conectivo $\neg$, à expressão) imediatamente à sua direita. Nesta notação não são necessários parênteses. Uma notação análoga a esta foi adoptada nas primeiras calculadoras HP e é ainda hoje oferecida como opção em alguns modelos por exigência de muitos dos seus clientes.

(a) Escreva, utilizando a notação de Łukasiewicz, as expressões
(i) $\neg(p \vee q)$
(ii) $\neg p \vee q$
(iii) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow (q \vee r)]$
(iv) $\Big\{[(p \Leftrightarrow q) \wedge r] \vee (r \Leftrightarrow \neg p)\Big\}$.

(b) Escreva, se possível, na notação habitual, as expressões
(i) $\vee \neg p\, q$
(ii) $\vee q \neg p$
(iii) $\neg \vee \vee r\, q\, p$
(iv) $\vee \neg \vee r\, p\, q$
(v) $\vee \neg \vee \neg \vee r\, r\, q\, p$
(vi) $\Rightarrow q \Rightarrow s \wedge \wedge r \vee p \neg s \Rightarrow \Rightarrow q\, r\, p$.

(c) Há alguma regra simples para decidir se uma sequência de variáveis e conectivos corresponde, nesta notação, a uma expressão válida?

20. De entre as seguintes frases assinale as que são proposições atribuindo-lhe o respectivo valor de verdade.

(a) Para todo o x real, $x^2 = x$.
(b) Para exactamente um x real, $x^2 = x$.
(c) Para algum $x \in \mathbb{R}$ verifica-se $x^2 = x$.
(d) $x^2 = x$.
(e) $xy = xz$ implica $y = z$.
(f) Para x, y, z reais $xy = xz$ implica $y = z$.

21. Considere as expressões proposicionais $a(x, y)$, $h(x)$, $e(x)$ e $m(x)$, cujo significado é, respectivamente, "x ama y", "x é homem", "x é encantador" e "x é mulher", e apresente uma tradução em português de $(\exists x)[m(x) \wedge (\forall y)(a(x, y) \Rightarrow e(y) \wedge h(y))]$.

22. Para cada uma das expressões seguintes determine uma interpretação onde a proposição seja verdadeira e outra onde seja falsa.

(a) $(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \Rightarrow q(y, x))$
(b) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow (\exists y)q(x, y))$.

23. (a) Qual destas proposições é a negação de: "Algumas pessoas gostam de matemática"?
   i. Algumas pessoas não gostam de matemática.
   ii. Todas as pessoas gostam de matemática.
   iii. Ninguém gosta de matemática.

   (b) Qual destas proposições é a negação de: "Todas as pessoas gostam de gelados"?
   i. Ninguém gosta de gelados.
   ii. Todas as pessoas não gostam de gelados.
   iii. Existe alguém que não gosta de gelados.

24. Determine a negação de cada uma das seguintes expressões numa forma que não contenha o conectivo $\neg$ como conectivo principal.

(a) $(\forall x)(p(x) \vee \neg p(x))$
(b) $(\exists x)(p(x) \Rightarrow (q(x) \vee r(x)))$
(c) $(\forall x)(\exists y)(p(x, y) \Leftrightarrow p(y, x))$
(d) $(\exists y)(\forall x)(p(x, y) \Rightarrow (q(x) \Rightarrow r(y)))$.

25. Escreva expressões equivalentes às do exercício anterior utilizando apenas o quantificador $\exists$ e os conectivos lógicos $\neg$ e $\vee$.

26. Para cada um dos seguintes pares de expressões, indique qual delas é consequência da outra e apresente, se possível, uma interpretação onde sejam não equivalentes:

(a) $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$ e $(\exists y)(\forall x)p(x, y)$
(b) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$ e $((\exists x)p(x)) \wedge ((\exists x)q(x))$
(c) $((\forall x)p(x)) \wedge ((\forall x)q(x))$ e $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$
(d) $(\forall x)p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x)$ e $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$.

27. Apresente, se possível, uma interpretação onde sejam falsas as seguintes expressões:

(a) $(\forall x)p(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x)(\neg p(x))$
(b) $((\forall x)p(x)) \vee ((\forall x)q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$
(c) $[(\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)p(x)] \Rightarrow (\exists x)q(x)$
(d) $(\forall z)(\forall y)[(\forall x)(p(y) \Rightarrow q(x, y)) \Rightarrow (p(y) \Rightarrow (\forall x)q(x, y))]$
*(e) $(\forall z)(\forall y)[(\forall x)(p(x, y) \Rightarrow q(x, y)) \Rightarrow (p(z, y) \Rightarrow (\forall x)q(x, y))]$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 Folha 3

CAPÍTULO I: Fundamentos

28. Verifique que

    (a) $\{x \in \mathbb{N};\ x^2 < 15\} = \{x \in \mathbb{N};\ 2x < 7\}$

    (b) $\{x \in \mathbb{Q};\ x^2 = 2\} = \{x \in A;\ x$ é tigre e x é cor-de-rosa$\}$,

    onde A é o conjunto dos animais terrestres conhecidos até 3/10/2004.

29. Considere os conjuntos

    $R = \{1, 3, \pi, 4.1, 9, 10\}$ $\quad S = \{\{1\}, 3, 9, 10\}$ $\quad T = \{1, 3, \pi\}$ $\quad U = \{\{1, 3, \pi\}, 1\}$.

    Indique, de entre as seguintes proposições, as que são falsas (justifique a sua resposta).

    (a) $1 \in R$ (b) $1 \in S$ (c) $T \subseteq R$
    (d) $S \subseteq R$ (e) $T \subseteq U$ (f) $\emptyset \subseteq S$
    (g) $\{1\} \subseteq S$ (h) $T \in U$ (i) $T \not\subseteq R$.

30. Para A, B e C conjuntos arbitrários, indique quais as afirmações verdadeiras.

    (a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$ (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
    (c) $\{\emptyset\} \subseteq A$ (d) $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$
    (e) Se $A \not\subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \not\subseteq C$ (f) Se $A \in B$ e $B \not\subseteq C$ então $A \notin C$.

31. Para $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 4, 7\}$, $C = \{x;\ x \in \mathbb{Z}$ e $2 \le x < 5\}$ subconjuntos de $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ determine:

    (a) $A \cup B$ (b) $A \cap C$ (c) $A - B$
    (d) $S - A$ (e) $A - S$ (f) $(A \cap B)^c$
    (g) $(B - A)^c \cap (A - B)$ (h) $(C \cap B) \cup A^c$ (i) $(C^c \cup B)^c$.

32. Sendo A e B subconjuntos arbitrários de um conjunto X, indique as igualdades verdadeiras.

    (a) $A \cup A = A$ (b) $B \cap B = B$
    (c) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ (d) $(A^c)^c = A$
    (e) $A - B = (B - A)^c$ (f) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
    (g) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A = B^c$ (h) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.

33. Para cada uma das seguintes proposições, indique condições a impor aos conjuntos A e B para que as proposições sejam verdadeiras.

    (a) $A \cup B = A$ (b) $A \cup \emptyset = \emptyset$ (c) $A \cap B = A$ (d) $B - A = \emptyset$ (e) $(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$.

34. Mostre que para conjuntos arbitrários A, B e C se tem

    (a) Se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ então $A \subseteq B \cap C$.

    (b) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ também $A \cup B \subseteq C$.

35. Para A e B subconjuntos arbitrários de X, prove que $A \subseteq B$ se e só se $X \setminus B \subseteq X \setminus A$.

36. Prove ou refute que, sendo A, B e C subconjuntos arbitrários de X, se verificam as seguintes propriedades:

(a)	$A - (B - C) = (A - B) - C$;	(b)	$(A \cap B) - C = A \cap (B - C)$;
(c)	$(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$;	(d)	$(A - B)^c = A^c - B^c$;
(e)	$A \cup (B - A) = A \cup B$;	(f)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
(g)	$A - B = A \cap B^c$;	(h)	$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ se e só se $C \subseteq A$.

37. Mostre que, para subconjuntos de um conjunto arbitrário X, todas as operações utilizadas nos problemas anteriores se podem definir a partir da operação diferença, representada pelos símbolos "$-$"ou "$\setminus$". Será possível fazer o mesmo com as operações reunião e intersecção?

*38. Considere a operação Δ (diferença simétrica) definida, entre subconjuntos de um conjunto X, por $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que, para subconjuntos arbitrários A, B e C de X, se tem:

(a) $A \Delta \emptyset = A$;
(b) $A \Delta B = B \Delta A$;
(c) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$;
(d) $A \Delta B = A \Delta C$ se e só se $B = C$.

39. Sejam A e B conjuntos arbitrários.

(a) Prove que, se $A \subseteq B$ então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
(b) Prove que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
(c) Quando é que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$?

*40. Mostre que, para qualquer conjunto X, se tem $\mathcal{P}(X) \not\subseteq X$ (sugestão: examinar o conjunto $Y = \{x \in X;\ x \notin x\}$).

41. Sejam A, B, C e D conjuntos arbitrários. Prove ou refute as seguintes afirmações:

(a) $A \times B = B \times A$;
(b) $A \times B \neq B \times A$;
(c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
(d) $A \subseteq C,\ B \subseteq D \Leftrightarrow A \times B \subseteq C \times D$;
(e) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$;
(f) $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$.

42. Quando é que, para A e B subconjuntos de um conjunto X, se tem $A^c \times B^c = (A \times B)^c$?

43. Determine x, y e z tais que
(a) $((x, y + 2), z + 3) = ((3, 5), 6)$;
(b) $\{x, y + 2, z + 3\} = \{3, 5, 6\}$.

44. Sejam A e B conjuntos arbitrários, x e a elementos de A e y e b elementos de B. Prove que $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{b, a\}\}$ se e só se $(x, y) = (a, b)$.

*45. Para $X \neq \emptyset$, um subconjunto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{P}(X)$ diz-se um **ultrafiltro** em X se

(i) $\emptyset \notin \mathcal{U}$
(ii) $A \in \mathcal{U} \ \wedge \ A \subseteq B \subseteq X \ \Rightarrow \ B \in \mathcal{U}$
(iii) $A \in \mathcal{U} \ \wedge \ B \in \mathcal{U} \ \Rightarrow \ A \cap B \in \mathcal{U}$
(iv) $\forall A \in \mathcal{P}(X),\ A \in \mathcal{U} \ \vee \ (X - A) \in \mathcal{U}$.

No caso de $\mathcal{U}$ ser não vazio e verificar as três primeiras condições (mas não necessariamente a quarta), $\mathcal{U}$ diz-se um **filtro**.

(a) Prove que, dados (em X) um ultrafiltro $\mathcal{U}$ e um filtro $\mathcal{F}$ tais que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, se tem $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.
(b) Prove que, se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro em X, então o conjunto dos elementos V de $\mathcal{P}(X \times X)$ que verificam $\{a \in X;\ \{b \in X;\ (a, b) \in V\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ é um ultrafiltro em $X \times X$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 — Folha 4

CAPÍTULO I: Fundamentos

46. Considere a função
$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (n,m) &\mapsto m\times n. \end{aligned}$$
   (a) Verifique se a função f é injectiva.
   (b) Verifique se a função f é sobrejectiva. É bijectiva?
   (c) Calcule $f(A)$, quando:
      i. $A = \{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,;\, n+m\leq 5\}$; ii. $A=\{2\}\times\mathbb{N}$;
      iii. $A = \{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,;\, n$ e m pares$\}$.
   (d) Calcule $f^{-1}(B)$, quando:
      i. $B=\{1,2,3,4\}$; ii. $B=\{n\in\mathbb{N}\,;\, n$ é par$\}$; iii. $B=\{n\in\mathbb{N}\,;\, n$ é ímpar$\}$.

47. Sejam $f : X\to Y$ uma função e A e B subconjuntos de X. Prove que:
   (a) $f(A-B)\supseteq f(A)-f(B)$;
   (b) Se f é injectiva, então $f(A-B)=f(A)-f(B)$;
   (c) f é injectiva se e só se $f(X-C)=f(X)-f(C)$ para qualquer $C\in\mathcal{P}(X)$.

48. Dada uma função, $f : X\to Y$, prove que:
   (a) $\forall A\subseteq X\ \ A\subseteq f^{-1}(f(A))$; (b) f é injectiva $\Leftrightarrow\ \forall A\subseteq X\ \ A=f^{-1}(f(A))$;
   (c) $\forall B\subseteq Y\ \ f(f^{-1}(B))\subseteq B$; (d) f é sobrejectiva $\Leftrightarrow\ \forall B\subseteq Y\ \ f(f^{-1}(B))=B$;
   (e) $\forall B_1,B_2\subseteq Y\ \ f^{-1}(B_1-B_2)=f^{-1}(B_1)-f^{-1}(B_2)$.

49. Sejam $f : X\to Y$ e $g : Y\to Z$ duas funções. Prove que:
   (a) Se f e g são injectivas, então $g\circ f$ é injectiva.
   (b) Se f e g são sobrejectivas, então $g\circ f$ é sobrejectiva.
   (c) Se $g\circ f$ é injectiva, então f é injectiva.
   (d) Se $g\circ f$ é sobrejectiva, então g é sobrejectiva.

50. Entre as funções seguintes, indique as que são injectivas, sobrejectivas e bijectivas. Quando for possível, indique uma inversa à esquerda, uma inversa à direita ou a inversa para a função dada.
   (a) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, $f(x)=x^2+1$; (b) $g:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$, $g(x)=\frac{1}{x}$;
   (c) $h:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$, $h(z,n)=\frac{z}{n+1}$; (d) $f:\{1,2,3\}\to\{p,q,r\}$, $G(f)=\{(1,q),(2,r),(3,p)\}$;
   (e) $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $g(x)=2^x$; (f) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $h(x,y)=(y+1,x+1)$.

51. Denotando por $\mathcal{F}(X;Y)$ o conjunto das funções de X em Y, dados conjuntos X, Y e Z estabeleça uma bijecção entre os conjuntos $\mathcal{F}(X\times Y;Z)$ e $\mathcal{F}(X;\mathcal{F}(Y;Z))$.

52. (a) Prove que, se $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto X e $(B_\mu)_{\mu\in M}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto Y, então:

    i. $X \setminus (\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in L}(X \setminus A_\lambda)$;

    ii. $X \setminus (\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in L}(X \setminus A_\lambda)$;

    iii. $(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$;

    iv. $(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda) \cup (\bigcap_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$.

    (b) Demonstre que, se $f : X \to Y$ é uma função e $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ e $(B_\mu)_{\mu\in M}$ são famílias de subconjuntos de X e Y, respectivamente, então:

    i. $f(\bigcup A_\lambda) = \bigcup f(A_\lambda)$; ii. $f(\bigcap A_\lambda) \subseteq \bigcap f(A_\lambda)$;

    iii. $f^{-1}(\bigcup B_\mu) = \bigcup f^{-1}(B_\mu)$; iv. $f^{-1}(\bigcap B_\mu) = \bigcap f^{-1}(B_\mu)$.

*53. Seja $\left(A_{(\lambda,\mu)}\right)_{(\lambda,\mu)\in L\times M}$ uma família de subconjuntos de X tal que para todo o $\lambda \in L$ se tem $A_{(\lambda,\mu_1)} \cap A_{(\lambda,\mu_2)} = \emptyset$ se $\mu_1 \neq \mu_2$. Mostre que $\bigcap_{\lambda\in L}\left(\bigcup_{\mu\in M} A_{(\lambda,\mu)}\right) = \bigcup_{f\in M^L}\left(\bigcap_{\lambda\in L} A_{(\lambda,f(\lambda))}\right)$, onde M^L é o conjunto de todas as funções de domínio L e conjunto de chegada M. Será que esta igualdade se verifica para qualquer família de subconjuntos de X indexada por $L \times M$? (Sugestão: considere a função definida por $f_x(\lambda) = \mu$ se $x \in A_{(\lambda,\mu)}$).

*54. Sendo $(A_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ uma família arbitrária de conjuntos com índices em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, verifique se é sempre verdade que $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i,j}\right)$.

55. Mostre que $\bigcup_{\lambda\in L} \mathcal{P}(A_\lambda) \subseteq \mathcal{P}\Big(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\Big)$ e que $\bigcap_{\lambda\in L} \mathcal{P}(A_\lambda) = \mathcal{P}\Big(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\Big)$, onde $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto X, e apresente um exemplo em que a primeira inclusão seja estrita.

56. Mostre que, para um conjunto qualquer X, todo o subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ é imagem directa de uma família de subconjuntos de X, ou seja, existe uma família $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ tal que $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ A = A_\lambda \text{ para algum } \lambda \in L\}$.

57. (a) Determine, se possível, uma extensão sobrejectiva para a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & xy. \end{array}$

    (b) Determine, se possível, uma extensão bijectiva para a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} \\ & x & \mapsto & \frac{2}{3}x. \end{array}$

    (c) Prove que toda a função é a composta, por esta ordem, de uma função sobrejectiva com uma função injectiva.

    *(d) Prove que toda a função é a composta, por esta ordem, de uma função injectiva com uma função sobrejectiva.

    *(e) Prove que toda a função injectiva tem uma extensão bijectiva.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 — Folha 5

CAPÍTULO I: Fundamentos

58. Indique quais das seguintes relações são gráficos de funções, indicando nesse caso o seu domínio.
    (a) $\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,3)\}$; (b) $\{(1,2),(2,2),(2,3),(4,3)\}$;
    (c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ x^2+y=1\}$; (d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ x+y^2=1\}$.

59. Teste a reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade da relação ρ em X, quando:
    (a) $X=\mathbb{N}$, $x\rho y$ se $x+y$ for um número par;
    (b) $X=\mathbb{N}$, $x\rho y$ se xy for um número ímpar;
    (c) $X=\mathbb{N}$, $x\rho y$ se $x=y^2$;
    (d) $X=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $(x,y)\rho(x',y')$ se $x+y'=x'+y$;
    (e) X conjunto das linhas do plano e $x\rho y$ se x for paralela a y ou x coincidir com y;
    (f) $X=\{1,2,3\}$ e $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2),(1,3)\}$.

60. Seja $f: X\to Y$ uma função.
    (a) Prove que ρ, definida em X por $x\rho y$ se $f(x)=f(y)$, é uma relação de equivalência. (ρ diz-se a equivalência núcleo de f.)
    (b) Para $X=Y=\mathbb{Z}$ e $f(x)=3x^2$ determine a classe de equivalência do elemento 4 pela relação de equivalência núcleo de f.

61. Considere a relação de inclusão $\subseteq$ no conjunto das partes do conjunto $X=\{1,2,3\}$.
    (a) Mostre que $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, mas não uma cadeia.
    (b) Determine, caso existam, os minorantes, mínimo, majorantes e supremo dos conjuntos:
        i. $A=\{S\subseteq X\,;\,1\in S\}$;
        ii. $B=\{S\subseteq X\,;\,2\notin S\}$;
        iii. $C=\{S\subseteq X\,;\,S$ é um conjunto singular$\}$.

62. Considere o conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$, onde X é um conjunto arbitrário.
    (a) Indique, se existirem, o elemento mínimo e o elemento máximo de $\mathcal{P}(X)$.
    (b) Para que conjuntos X é que $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ é totalmente ordenado?
    (c) Sejam A e B subconjuntos arbitrários de X. Prove que o ínfimo e o supremo de $\{A,B\}$ existem. Indique esses elementos.

63. Em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ considere a relação binária ρ definida por $(a,b)\rho(c,d)$ se $a<c$ ou $a=c$ e $b\le d$.
    (a) Mostre que ρ é uma relação de ordem em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. É total?
    (b) Determine, caso existam, os minorantes, mínimo, ínfimo, majorantes, máximo, supremo, dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:
        i. $X=\{1\}\times\mathbb{N}$; ii. $Y=\mathbb{N}\times\{1\}$; iii. $Z=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,;\,n+m=10\}$.

64. Seja ρ_1 uma relação binária em X reflexiva e transitiva.

 (a) Mostre que a relação ρ_2, definida por $a\rho_2 b$ se e só se $a\rho_1 b$ e $b\rho_1 a$, é uma relação de equivalência.

 *(b) Denotando por $[a]$ a classe de equivalência $\{a' \in X;\ a\rho_2 a'\}$, mostre que a relação ρ, definida por $[a]\rho[b]$ se e só se $a\rho_1 b$, é uma relação de ordem no conjunto das classes de equivalência definidas em X por ρ_2.

*65. Seja $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ uma família de elementos de um conjunto parcialmente ordenado, X, tal que para todo o $j \in J$ existe $\sup\{x_{ij};\ i \in I\}$. Mostre que, no caso de existir, $\sup\{\sup\{x_{ij};\ i \in I\};\ j \in J\}$ é igual a $\sup\{x_{ij};\ (i,j) \in I \times J\}$.

*66. Apresente um exemplo de uma família de conjuntos infinitos, disjuntos dois a dois, indexada por $\mathbb{N}$, cuja união seja $\mathbb{N}$.

67. Prove que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é limitado se e só se $\exists b \in \mathbb{R} \ :\ \forall x \in A\ \ |x| \leq b$.

68. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e α um majorante de A.

 (a) Mostre que as seguintes afirmações se equivalem:

  (i) α é o supremo de A;

  (ii) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists x \in A\ :\ x > \alpha - \varepsilon$;

 (b) Formule a correspondente caracterização de ínfimo de A.

69. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$.

 (a) Suponha que $A \subseteq B$. Prove que:

  i. Se α é um majorante de B, também é um majorante de A.

  ii. Se A for não vazio e B for limitado superiormente, então $\sup A \leq \sup B$.

 (b) Mostre que, se α é um majorante de A e β é um majorante de B, então $\max\{\alpha, \beta\}$ é um majorante de $A \cup B$ e $\min\{\alpha, \beta\}$ é um majorante de $A \cap B$.

 (c) Se A e B forem não vazios e limitados superiormente, então

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

70. Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que: $\forall x \in A\ \ \forall y \in B\ \ x < y$. Prove que:

 (a) $\sup A \leq \inf B$;

 (b) pode ocorrer $\sup A = \inf B$;

 (c) $\sup A = \inf B$ se e só se $\forall \delta > 0\ \ \exists x \in A\ \ \exists y \in B\ :\ x + \delta > y$.

71. Seja $-A = \{-x;\ x \in A\}$, onde A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. Mostre que $\inf(-A) = -\sup A$.

72. Seja $A \cdot B = \{ab;\ a \in A \text{ e } b \in B\}$, onde A e B são conjuntos limitados de números reais positivos. Mostre que $\sup A \cdot B = (\sup A)(\sup B)$. O que aconteceria no caso de A e B conterem números negativos?

73. Sejam $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ e $(y_\lambda)_{\lambda\in L}$ famílias limitadas de números reais positivos indexadas por L.

 (a) Mostre que $\sup\{x_\lambda y_\lambda; \lambda \in L\} \leq (\sup\{x_\lambda; \lambda \in L\})(\sup\{y_\lambda; \lambda \in L\})$ e apresente um exemplo em que a desigualdade anterior seja estrita.

 (b) Mostre que $\sup\{x_\lambda^2; \lambda \in L\} = (\sup\{x_\lambda; \lambda \in L\})^2$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 Folha 6

CAPÍTULO I: Fundamentos

*74. (a) Prove que todo o subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é reunião de intervalos abertos dois a dois disjuntos.

(b) Prove que todo o subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é reunião de uma família numerável de intervalos abertos.

(c) Mostre que se I é um intervalo aberto então não existem conjuntos abertos disjuntos e não vazios, A_1 e A_2, tais que $I = A_1 \cup A_2$.

75. (a) Prove que a intersecção de uma família finita de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

(b) Dê exemplos de famílias de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ cuja intersecção seja, respectivamente,

i. um conjunto aberto;

ii. um conjunto fechado que não seja aberto;

iii. um conjunto que não seja aberto nem fechado.

76. Sendo A e B subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ mostre que são abertos os conjuntos

(a) $A + B = \{x + y;\ x \in A \ \text{ e } \ y \in B\}$;

(b) $A \cdot B = \{xy;\ x \in A \ \text{ e } \ y \in B\}$.

77. Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são abertos e/ou fechados:

(a) $\mathbb{Q}$	(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	(c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
(d) $\mathbb{R}$	(e) $\{\frac{1}{n}\,;\ n \in \mathbb{N}\}$	(f) $\{\frac{1}{n}\,;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
(g) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$	(h) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$	(i) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.

78. Determine o interior e o fecho de cada um dos conjuntos do exercício anterior.

79. Mostre que, para X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, se tem,

(a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

(b) $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$;

(c) nalguns casos, $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$;

80. Verifique que, para A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$,

(a) se A é aberto então A é vazio ou A não é numerável;

(b) se A é aberto e B é finito então $A - B$ é aberto;

(c) se A é aberto e B é numerável então $A - B$ pode ser ou não ser aberto.

81. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   (a) Mostre que $\mathbb{R} \setminus \operatorname{int}(A) = \overline{\mathbb{R} \setminus A}$ e $\mathbb{R} \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus A)$.

   (b) Mostre que, em alguns casos, $\operatorname{int}(\overline{A}) \not\subseteq \overline{\operatorname{int}(A)}$ e $\overline{\operatorname{int}(B)} \not\subseteq \operatorname{int}(\overline{B})$.

   *(c) Quando é que $\overline{\operatorname{int}(A)} = \operatorname{int}(\overline{A})$?

*82. Mostre que uma família numerável de intervalos fechados e limitados não vazios, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que verifique $\forall n \in \mathbb{N} \;\; F_{n+1} \subseteq F_n$, tem intersecção não vazia.

83. Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, A diz-se *vizinhança de* x se x for ponto interior de A. Mostre que:

   (a) A intersecção de duas vizinhanças de x ainda é uma vizinhança de x.

   (b) Se A for vizinhança de x e $A \subseteq B$, então B é vizinhança de x.

   (c) Se x e y são números reais distintos, então existem uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

   (d) Se $\alpha = \sup A$, então A e $\mathbb{R} \setminus A$ não são vizinhanças de α.

84. Para $A \subseteq \mathbb{R}$, mostre que:

   (a) A é aberto se e só se é vizinhança de todos os seus pontos;

   (b) um ponto $x \in \mathbb{R}$ é ponto aderente de A se e só se toda a vizinhança de x intersecta A.

85. Determine o conjunto dos pontos de acumulação dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   (a) $\mathbb{Z}$ (b) $\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $]0,1]$.

86. Dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$:

   (a) infinito sem pontos de acumulação;

   (b) com exactamente um ponto de acumulação;

   (c) numerável com um conjunto de pontos de acumulação não numerável;

   *(d) com um conjunto de pontos de acumulação infinito numerável.

87. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Mostre que:

   (a) $\overline{X} = X \cup X'$;

   (b) X é fechado se e só se contém todos os seus pontos de acumulação;

   *(c) se X não tem pontos de acumulação então X é numerável.
   (Sugestão: verificar que X é igual a qualquer conjunto numerável E tal que $E \subseteq X \subseteq \overline{E}$).

Ano lectivo 2004/05 Folha 7

CAPÍTULO II: Limites

88. Prove que cada uma das sucessões cujo termo geral se indica a seguir é limitada e estude a monotonia dessas sucessões.

(a) $x_n = \dfrac{2n}{3n+16}$; (b) $x_n = \dfrac{n}{n^2+2}$;

(c) $x_n = \dfrac{100}{n} + 2(-1)^n$; (d) $x_n = \begin{cases} 10 & \text{se } n = 1 \\ \frac{(-1)^n n - 8}{3n-2} & \text{se } n \neq 1; \end{cases}$

(e) $x_n = \dfrac{2004^n}{n!}$; (f) $x_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ n\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

89. Verifique que as seguintes sucessões não são limitadas e, em cada caso, determine, se possível, uma subsucessão que seja limitada:

(a) $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$; (b) $((-1)^n n^2 + 2n)_{n\in\mathbb{N}}$; *(c) $\sqrt[n]{n!}$; (d) $n\cos(\frac{\pi n}{4})$.

90. Sejam X um subconjunto não vazio limitado de $\mathbb{R}$ e s o seu supremo. Mostre que existe uma sucessão com valores em X que converge para s.

91. (a) Sejam X um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma sucessão com valores em X que converge para a.

(b) Conclua que qualquer número real é limite de uma sucessão de números racionais e limite de uma sucessão de números irracionais.

92. Considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

(a) Mostre que (x_n) é uma sucessão crescente.

(b) Prove que, para todo o número natural n, $x_n \leq 3$. (Sugestão: Mostre que $n! \geq 2^{n-1}$).

(c) Será (x_n) uma sucessão convergente? Justifique.

*93. Existirá alguma família de intervalos abertos cuja união contenha $\mathbb{Q}$ mas não contenha $\mathbb{R}$? (Sugestão: considerar uma família numerável de intervalos com largura $\frac{1}{2^n}$ e consultar *Curso de Análise, vol. 1*, de Elon Lages Lima).

94. Mostre que se a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente então a sucessão $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é também convergente. Será que a recíproca é sempre verdadeira?

95. Usando a definição de limite, verifique as seguintes igualdades:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}+n}{2-n^2} = 0$; (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{\pi - n} = -2$;

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin(\frac{n\pi}{3})}{2n} = \frac{1}{2}$; (f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1000}{n^2} = 0$.

96. Diga, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:

   (a) Toda a sucessão convergente é limitada.
   (b) Toda a sucessão limitada é convergente.
   (c) Toda a sucessão convergente é monótona.
   (d) Toda a sucessão de termos positivos que tende para 0 é monótona decrescente (a partir de certa ordem).
   (e) Para que uma sucessão seja limitada basta que possua uma subsucessão limitada.
   (f) Uma sucessão monótona é convergente se e só se possui uma subsucessão limitada.
   (g) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < 0$, então tem-se $u_n < 0$ a partir de uma certa ordem.
   (h) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq 0$, então tem-se $u_n \leq 0$ a partir de uma certa ordem.
   (i) Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente e se $u_n < 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < 0$.
   (j) Se uma sucessão convergente é soma de duas sucessões, então cada uma das sucessões parcelas também é convergente.

97. Verifique as igualdades do problema 95 utilizando álgebra dos limites.

*98. Mostre que, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, então $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

99. Mostre, usando a definição, que:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n - n^2) = -\infty$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n + (-1)^n n) = +\infty$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+1)^n}{n} = +\infty$.

100. Indique, quanto à convergência, o comportamento da sucessão $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $a \in \mathbb{R}$.

101. Diga, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:

   (a) Toda a sucessão superiormente ilimitada tende para $+\infty$.
   (b) Toda a sucessão que tende para $+\infty$ é crescente (a partir de uma certa ordem).
   (c) Toda a sucessão monótona e não limitada inferiormente tende para $-\infty$.
   (d) Toda a sucessão crescente tende para $+\infty$.

102. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as subsucessões definidas por $u_n = x_{2n}$ e $v_n = x_{2n+3}$. Mostre que:

   (a) Se $a \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$, então também $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
   (b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$, então também $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

103. Estude a convergência das sucessões de termo geral

   (a) $u_n = \begin{cases} 1 - \frac{4}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{n^2-3n-2}{n^2+n} & \text{se } n \text{ par;} \end{cases}$ (b) $u_n = \begin{cases} (-1)^n + \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \cos((n-1)\pi) & \text{se } n \text{ par;} \end{cases}$

   (c) $u_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \\ (-1)^n \frac{1}{n} & \text{se } n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ (\frac{1}{\pi})^n & \text{se } n = 3k+2,\ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$ (d) $u_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{\sin n}{n} & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 Folha 8

CAPÍTULO II: Limites

104. Descubra o erro do seguinte raciocínio:

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0+\cdots+0 = 0.$$

105. Usando o Teorema das Sucessões Enquadradas, determine o limite das sucessões:

(a) $u_n = \dfrac{\cos^2(n)}{n+1},\ n\in\mathbb{N}$;

(b) $u_n = \sqrt[n]{3^n+4^n+7^n},\ n\in\mathbb{N}$;

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i)^2},\ n\in\mathbb{N}$;

(d) $u_n = \displaystyle\sum_{i=4}^{n+6}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+i}},\ n\in\mathbb{N}$.

106. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2+1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+(-3n)+1}{\sqrt{n^4+1}}$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)}-n$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n-1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+5}-\sqrt{4n+1}}\ (n\geq 3)$;

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n^2-3\sqrt{n+1}+n}{\sqrt{n^3}-n^2}\ (n\geq 2)$;

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(3n+19)}{\log n}\ (n\geq 2)$;

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$;

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{3}\sin^2\frac{\pi}{3n}\right)^3$;

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} -n(16+\cos(\log n))$;

(j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(1+\sin^2 n)$;

*(k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(1+\sin n)$;

(l) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}$.

107. Indique sucessões (x_n) e (y_n) de números reais que tendam para $+\infty$ e tais que:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=+\infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=a$, sendo a um número real qualquer, previamente fixado;

(c) $(x_n-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada mas não diverge para ∞.

108. Dê exemplos de sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que tendam para $+\infty$ e 0, respectivamente, e tais que:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\infty$, sem ser $+\infty$ e $-\infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_ny_n=a$, sendo a um número real qualquer, previamente dado;

(c) $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente mas limitada.

109. Dê exemplos:

(a) De uma sucessão limitada com quatro valores de aderência.

(b) De uma sucessão não limitada com quatro valores de aderência.

110. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e seja $c \in]0,1[$. Prove que

(a) Se para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem $0 < \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq c$ então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

*(b) Se para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$ então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. (Sugestão: provar que (x_n) satisfaz o Critério de Convergência de Cauchy).

*111. Para $a > 0$ considere a sucessão definida por $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ se $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que $x_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$ se $n \geq 2$.

(b) Mostre que a sucessão é convergente e calcule o seu limite. (Sugestão: utilize (a) para provar que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$ para $n \in \mathbb{N}$).

112. Foram investidos 1000 euros a uma taxa de juros de 6%, compostos anualmente.

(a) Indique o valor v_n do investimento ao fim de n anos.

(b) Verifique se a sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

113. Considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recorrência da seguinte forma:

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}},\ n \geq 1.$$

(a) Prove, por indução, que:

i. $x_{n+1} \geq x_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$;

ii. $x_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(b) Conclua que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

(c) Mostre que o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é raiz do polinómio $P(x) = x^4 - 4x^2 - x + 4$.

114. Mostre que cada uma das sucessões a seguir definidas é convergente e calcule o respectivo limite:

(a) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2$, $n \in \mathbb{N}$;

*(b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$ (desenvolvimento da *razão dourada* em *fracções contínuas*);

(c) dado $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a < 1$, $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

115. Sejam a e b números positivos, com $a > b$. Denotemos por a_1 a sua média aritmética, e por b_1 a sua média geométrica; isto é,

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

Iterando este processo, obtemos duas sucessões, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sendo, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{e} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(a) Use o Princípio da Indução Matemática para provar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

(b) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. (A este limite Gauss chamou *média aritmética-geométrica* dos números a e b.)

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 Folha 9

CAPÍTULO II: Limites

116. Esboce o gráfico das funções seguintes e indique o seu domínio e o seu contradomínio.

(a) $a(x) = 1 + |x|$ (b) $b(x) = |\sin x|$ (c) $c(x) = \sin |x|$

(d) $d(x) = \begin{cases} |\log|x|| & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$ (e) $e(x) = \begin{cases} -x-5 & \text{se } x \geq 1 \\ -1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq -1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < -1 \end{cases}$ (g) $g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(h) $h(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa a *característica* de x, isto é, o maior inteiro menor ou igual a x.

117. Indique a expressão da função cujo gráfico é uma recta que passa nos pontos de coordenadas $(1, 3)$ e $(3, 4)$.

118. Sendo $f(x) = kx^2 + 5x + k$, determine k de modo que $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

119. Sendo $f(x) = kx^2 + 3x + 2k + 1$, determine k de modo que $\sqrt{f(x) + 2}$ tenha domínio $\mathbb{R}$.

120. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c constantes reais. Analise a representação gráfica de f, consoante o valor dos parâmetros a, b e c.

121. Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ (b) $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ (c) $h(x) = \sqrt{-2x} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}$

(d) $j(x) = 1 + 2\cos x$ (e) $l(x) = \log \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ (f) $m(x) = \dfrac{\tan(x + 1)}{\sqrt[4]{x}}$

(g) $n(x) = \sqrt{x} - \dfrac{2^x}{x}$ (h) $o(x) = e^{\sqrt{x+1}} - \sin x$ (i) $p(x) = \log(1 - \sqrt{x^2 - 1})$.

122. Sendo $f : A \to B$, identifique as propriedades descritas pelas condições:

(a) $(\forall x \in A\ \exists y \in B\ :\ f(x) = y)\ \wedge\ (\forall x_1, x_2 \in A\ x_1 = x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) = f(x_2))$.

(b) $(\forall x_1, x_2 \in A\ x_1 \neq x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2))\ \wedge\ (\forall y \in B\ \exists x \in A\ :\ f(x) = y)$.

(c) $(\forall x \in A)\ (-x \in A\ \wedge\ f(-x) = f(x))$.

(d) $(\forall x \in A)\ (-x \in A\ \wedge\ f(-x) = -f(x))$.

123. Verifique quais das seguintes funções são pares e quais são ímpares:

(a) $f(x) = \log \dfrac{2 + x}{2 - x}$; (b) $g(x) = \dfrac{2}{3}(e^x + e^{-x})$;

(c) $h(x) = \sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[3]{x - 2}$; (d) $l(x) = \sin^2 x - \cos(x + \pi)$.

124. Diga quais dos seguintes conjuntos são gráficos de funções e, para esses casos, indique quais das funções são injectivas, pares ou ímpares.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 = 4\}$; (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 \leq 3 \wedge y = -\sqrt{3 - x^2}\}$;

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, xy = 1\}$; (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x| + |y| = 1\}$;

(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \,;\, y$ é divisor de $x\}$; (f) $F = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \,;\, x = \sin y\}$;

(g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 4\}$; (h) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 4\}$.

125. Verifique, usando a definição, se são ou não bijectivas as seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{7x + 9}$ (b) $g(x) = 5 - 3x^2$ (c) $h(x) = \tan x,\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

126. Determine em que casos a função é invertível e, quando o for, determine a sua inversa e faça a representação gráfica de ambas as funções.

(a) $f(x) = \sin x$; (b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$; (c) $h(x) = x|x|$;

(d) $i(x) = 3x^2 - 2$; (e) $j(x) = e^{x+1}$; (f) $l(x) = \log(x^3)$.

127. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, determine:

(a) $f(\mathbb{R})$;
(b) $f(A)$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \geq 4\}$;
(c) $f^{-1}(B)$, quando $B = \{y \in \mathbb{R} \,;\, y > 3\}$;
(d) $f^{-1}(C)$, para $C = \{y \in \mathbb{R} \,;\, y < -3 \ \vee\ y = 1\}$.

128. Considere as funções:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Indique o domínio e a expressão analítica das funções

(a) $h = f + g$, (b) $j = f \cdot g$, (c) $k = f/g$, (d) $l = g/f$, (e) $m = \sqrt{f}$.

129. Determine o domínio e a expressão analítica de $g \circ f$, sendo:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

(b) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \sqrt{2x + 3}$;

(c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = x^2 - 1$;

(d) $f(x) = |x|$ e $g(x) = \begin{cases} \log(x + 1) & \text{se } x > -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x < -1. \end{cases}$

130. Sendo $f(x) = x^4$ e $g(x) = 4^x$, determine o domínio, o contradomínio e a expressão analítica das funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

CAPÍTULO II: Limites

131. Mostre que, para $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X - X'$, se tem

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X\quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

132. Para $X \subseteq \mathbb{R}$ limitado, $a \in X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$ traduza as seguintes afirmações para português corrente:

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X\quad 0 < |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$;

(b) $\exists \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in X\quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

133. Demonstre, usando a definição, que:

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{2}(3x-2) = 5$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$; (c) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$.

134. (a) Mostre que, se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existir e for L, então também existe $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ e é igual a $|L|$.

(b) Dê exemplos que mostrem que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ pode existir não existindo $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(c) Mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ se e só se $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

135. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positiva e $a \in D'$. Mostre que, se existir $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0$, então existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ e é igual a $\frac{1}{L}$.

136. Use o Teorema das Funções Enquadradas para provar que:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^4+4x^2+7}} = 0$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$, se existir $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $0 \le f(x) \le c$;

(c) Se f e g são funções com domínio $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ e f é limitada numa vizinhança de a, então $\lim\limits_{x\to a} g(x)f(x) = 0$.

137. Supondo $a > 0$, calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]$.

138. Demonstre, usando a definição, que:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x^2} = 1$; (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{7+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$; (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$;

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2-2) = +\infty$; (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+4) = +\infty$; (f) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2}{(x-4)^2} = +\infty$.

139. Mostre que não existem os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{|x-3|}{9-x^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin x$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

140. Seja p um polinómio real de grau n, isto é, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Estude $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)$.

141. Determine, se possível, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 + x\sin\frac{1}{x}}{(x+3)^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^x - 2^x}{3^{x+1} + 2^{x-3}}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+3})$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4-3}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; (e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$; (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{x^3-x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin(\pi x)}{x}\right)^x$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - \cos x \log x)$;

*(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$; *(k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$; *(l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$.

142. (a) Seja $a \in X'$. Dê exemplos de funções, f e g, definidas em X, para as quais não existam $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nem $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ mas existam $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$.

(b) Sejam $a \in X'$ e f e g funções definidas em X. Mostre que, se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e não existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, então não existe $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ mas pode existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$.

143. Estude a existência de limite, nos pontos indicados, das funções definidas por:

*(a) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{se } x<0 \\ (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{se } x>0 \end{cases}$, $a=0$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $a=0$;

(c) $f(x) = \dfrac{x+2+|x+2|}{x^2-4}$, $a=2$, $a=-2$; (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{7+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} & \text{se } x\geq 1 \\ \frac{-7+2\sqrt{1-x}}{4\sqrt{1-x}} & \text{se } x<1 \end{cases}$, $a=1$.

144. Seja f uma função definida e monótona em $X \subseteq \mathbb{R}$ e seja $a \in X'_+$. Prove que, se existir uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $X \cap]a,+\infty[$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$, então $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

*145. Seja f uma função monótona em $]a,b[$. Mostre que $\{c \in\ ]a,b[\ ;\ \lim\limits_{x\to c^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to c^+} f(x)\}$ é um conjunto numerável.

146. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função de Dirichlet, que é definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$
Mostre que f não tem limite em nenhum ponto.

147. Sejam $X = Y \cup Z \subseteq \mathbb{R}$, $a \in Y' \cap Z'$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Mostre que

$$\lim_{x\to a} f|_Y(x) = \lim_{x\to a} f|_Z(x) = L \text{ se e só se } \lim_{x\to a} f(x) = L.$$

148. Determine os pontos de acumulação de X, domínio de f, para os quais existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(a) $X = [0, 2\pi]$, com $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x \text{ racional} \\ \sin x & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$

(b) $X = \mathbb{R}$, com $f(x) = [x]$.

*(c) $X =]0,1[$, com $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = \dfrac{p}{q} \text{ com } p,q \in \mathbb{N},\ p<q,\ \text{mdc}(p,q)=1 \\ 0 & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$

CAPÍTULO III: Continuidade

149. Determine $k \in \mathbb{R}$ de forma a que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{kx-2} & \text{se} \quad x > 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \\ \frac{1}{k^2x-4} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

tenha, em $a = 1$:

(a) uma descontinuidade removível;

(b) um pólo;

(c) uma descontinuidade essencial de 1ª espécie;

(d) uma descontinuidade essencial de 2ª espécie.

150. Estude a continuidade das funções seguintes, indicando, nos pontos de descontinuidade, o tipo de descontinuidade que ocorre:

(a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = [x]$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2+|x+2|}{x^2-4} & \text{se } x \neq 2 \text{ e } x \neq -2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{se } x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & \text{se } x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{\log(\sin x)} & \text{se } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ (x-1)^2 - 2 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

*(h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{se } x = \dfrac{p}{q} \text{ com } p, q \in \mathbb{N},\ p < q,\ \text{mdc}(p,q) = 1 \\ 0 & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$

151. Encontre uma bijecção $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todos os pontos.

*152. Mostre que uma função cujo domínio é aberto é contínua se e só se, para todo o aberto $A \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(A)$ é um subconjunto aberto do domínio de f.

153. Prove que a equação $x^3 - 9x^2 + 7 = 0$ tem três soluções, uma em cada um dos intervalos abertos $]-1, 0[$, $]0, 1[$ e $]6, 9[$. Melhore o resultado aproximando-as até às décimas.

154. Prove que existe um número real c tal que:

(a) $0 < c < \dfrac{\pi}{2}$ e $\sin c = 0,7$;

(b) $\dfrac{\pi}{2} < c < \pi$ e $\cos c = -\dfrac{3}{4}$;

(c) $c^3 = 2$;

(d) $c > 0$ e $c^2 = 3$.

155. (a) Mostre que a equação $x^3 - x - 1 = 0$ tem uma solução em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que qualquer polinómio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real. Conclua que, para cada $a \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$ ímpar, existe pelo menos um número real b tal que $b^p = a$.

156. Seja $f(x) = \tan x$. Verifique que $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ e $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1$. Pode concluir que existe $c \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$ tal que $f(c) = 0$?

157. (a) Seja f uma função contínua em $[0,1]$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$. Mostre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$. (A um ponto x tal que $f(x) = x$ chama-se *ponto fixo* da função f.)

(b) Dê um exemplo de uma função contínua $f : [0,1[\to [0,1[$ que não tenha nenhum ponto fixo.

158. Seja f uma função contínua em $[0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Prove que existe $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $f(c) = \cos c$.

*159. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *uniformemente contínua* quando verifica a condição

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(a) Mostre que toda a função uniformemente contínua é contínua.

(b) Mostre que nem toda a função contínua é uniformemente contínua.

(c) Mostre que, se X é um intervalo fechado e limitado, então toda a função contínua em X é uniformemente contínua. (Sugestão: recordar que toda a sucessão limitada tem um valor de aderência).

*160. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ satisfaz uma *condição de Lipschitz* quando verifica a condição

$$\exists k > 0 : \ \forall x, y \in X \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Mostre que toda a função que satisfaz uma condição de Lipschitz é uniformemente contínua mas o recíproco nem sempre se verifica.

*161. Dê exemplos de funções invertíveis, com pontos de descontinuidade, cujas inversas sejam funções contínuas.

162. Verifique se a função f indicada em seguida é limitada e determine os seus extremos, caso existam.

(a) $f : [-1, 2[\to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2 - 1$;

(b) $f(x) = \tan x$, com $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$;

(c) $f :]0, 2] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{4}{x^2}$;

(d) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$.

163. Indique os extremos da função

$$\begin{array}{rcl} f : [0,2] \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x-1}. \end{array}$$

A função toma todos os valores entre eles? Justifique a sua resposta.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 Folha 12

CAPÍTULO IV: Cálculo Diferencial

164. Calcule, usando a definição, a derivada da função f no ponto a indicado:

(a) $f(x) = 9 - x^2$, $a = 1$; (b) $f(t) = 3t^2 - t$, $a = -1$;

(c) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$, $a = 1$; (d) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $a = 1$.

165. Usando a definição, determine a função derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = a$, com $a \in \mathbb{R}$; explique como pode concluir imediatamente o resultado a partir do gráfico de f;

(b) $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$; explique como pode concluir imediatamente o resultado a partir do gráfico de f;

(c) $f(x) = x|x|$;

(d) $f(x) = \cos x$ (sabendo que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$);

(e) $f(x) = e^x$ (sabendo que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$);

(f) $f(t) = t^2 - 1$;

(g) $f(x) = x - x^2$;

(h) $g(u) = \dfrac{1}{u^2}$;

(i) $f(x) = (x-a)^n$, com $a \in \mathbb{R}$.

*166. Mostre que, se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in X'_- \cap X \cap X'_+$, então

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Será a recíproca verdadeira?

167. Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo o $x \in X$ e $a \in X \cap X'$. Mostre que, se $f(a) = h(a)$, f e h são deriváveis em a e $f'(a) = h'(a)$, então g é derivável em a e $f'(a) = g'(a) = h'(a)$.

168. Sejam $f(x) = x^2$ e $a = 3$.

(a) Qual a função linear $l(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ quando x está próximo de a?

(b) Use $l(x)$ para obter um valor aproximado de $(3.12)^2$ (cujo valor real é 9.7344).

169. Para cada uma das funções f seguintes, use a aproximação linear em a para calcular um valor aproximado de c. Compare estes valores com os valores obtidos numa calculadora.

(a) $f(x) = x^3$, $a = 1$, $c = (1.06)^3$; (b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $a = 2$, $c = \dfrac{2.04}{1 + 2.04}$;

(c) $f(x) = \cos x$, $a = \dfrac{\pi}{3}$, $c = \cos 1$; (d) $f(x) = \sin x$, $a = \dfrac{\pi}{6}$, $c = \sin 0.5$.

170. Em cada um dos casos seguintes, escolha uma função e um ponto a adequados, e use a aproximação linear dessa função em a para obter um valor aproximado de:

(a) $(3.026)^2$; (b) $\frac{1}{(0.97)^3}$; (c) $\sqrt[4]{15}$;

(d) $\tan 3$; (e) $\sin 0.045$; (f) $\tan 0.092$.

171. Determine a função derivada de cada uma das funções seguintes:

(a) $f(x) = \tan x - 3\sec x$; (b) $f(x) = \cot x + 2\csc x$; (c) $f(x) = \sin x \cos x$;

(d) $f(x) = \sqrt[4]{x}(x^2+1)$; (e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^3+1}$; (f) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}\cos x - x^{-\frac{1}{3}}\sin x$.

172. Usando o Teorema da derivada da função composta, determine a derivada das funções definidas por:

(a) $f(x) = \sin\sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ (c) $f(x) = \log x$

(d) $f(x) = 4^x$ (e) $f(x) = 4^{\sqrt{x^2-1}}$ (f) $f(x) = \sin(\log x)$

(g) $f(x) = \log(\sin x)$ (h) $f(x) = \log\left(\sin x^{\cos x}\right)$ (i) $f(x) = \sin x^{\cos x}$

(j) $f(x) = g(x)^{h(x)}$ (k) $f(x) = \sqrt{\log\sqrt{x}}$ (l) $f(x) = \log\sqrt{\log\sqrt{x}}$.

173. Dê uma demonstração da fórmula $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, usando a fórmula do produto e o Teorema da derivada da função composta.

*174. Mostre que, caso f seja derivável em $\mathbb{R}$ e, para um dado $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfaça a condição $\forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(tx) = t^\alpha f(x)$, então $xf'(x) = \alpha f(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

175. Determine as funções derivadas das funções seguintes:

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ -5 & \text{se } x = 0 \\ \tan x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x + \log(2-x) & \text{se } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ (d) $1 + |\sin x|,\ x \in [0, 2\pi]$

176. Cada uma das equações seguintes define uma ou mais funções y na variável x. Usando o regra da derivada da função implícita, determine y':

(a) $x^2 + y^2 = 3$; (b) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1$; (c) $y = (x+y)^2$;

(d) $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$; (e) $x = \dfrac{y-1}{y+1}$; (f) $x^2 - y^2 = \dfrac{x^2}{y^2}$.

177. Use o Método de Newton com o valor inicial x_1 dado, para encontrar a terceira aproximação, x_3, da raiz da equação dada:

(a) $x^3 + x + 1 = 0$, $x_1 = -1$; (b) $x^3 - x^2 - 1 = 0$, $x_1 = 1$;

(c) $x^4 - 20 = 0$, $x_1 = 2$; (d) $x^7 - 100 = 0$, $x_1 = 2$.

178. Explique porque é que o Método de Newton não funciona para encontrar as raízes da equação $x^3 - 3x + 6 = 0$ se o valor inicial escolhido for $x_1 = 1$.

Ano lectivo 2004/05 Folha 13

CAPÍTULO IV: Cálculo Diferencial

179. Determine o máximo e o mínimo absolutos das seguintes funções nos intervalos indicados:
   (a) $f(x) = 3x^2 - 10x + 7,\ X = [-1, 3]$; (b) $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3,\ X = [-3, 1]$;
   (c) $f(x) = x^3 + 1,\ X = [-1, 1]$; (d) $f(x) = \sin x \cos x,\ X = [0, \pi]$.

180. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.
   (a) Verifique que f' toma valores positivos e negativos mas nunca se anula. Estará este facto em contradição com o Teorema de Darboux?
   (b) Mostre que $f(-1) = f(1)$ mas $f'(c) \neq 0$ para todo o c no intervalo $]-1, 1[$. Estará este facto em contradição com o Teorema de Rolle?

181. Aplicando o Teorema de Rolle à função $f(x) = (x - 1) \tan x$ no intervalo $[0, 1]$, mostre que a equação $\sin 2x = 2 - 2x$ tem pelo menos uma solução entre 0 e 1.

182. (a) Explique porque é que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ não pode ter mais do que uma raiz real.
   (b) Use o Teorema de Rolle para provar que a equação $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ não pode ter mais do que uma solução real quando $\beta^2 < 3\alpha\gamma$.

183. Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e que $f'(x)$ existe e não se anula em $]a, b[$. Se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, prove que a equação $f(x) = 0$ tem uma e uma só solução em $]a, b[$.

184. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$ tal que $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = f(c)$. (Sugestão: Use a função $g(x) = f(x)e^{-x}$.)

185. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, duas vezes derivável em $]a, b[$ e que se anula em três pontos distintos de $[a, b]$. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f''(c) = 0$.

*186. Mostre que a equação $k_0 + k_1 x + \ldots + k_{n-1}x^{n-1} + k_n x^n = 0$ tem pelo menos uma solução (real) se $k_0 + \dfrac{k_1}{2} + \ldots + \dfrac{k_{n-1}}{n} + \dfrac{k_n}{n+1} = 0$.

187. Mostre que, ao aplicar o Teorema do Valor Médio de Lagrange à função $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ num intervalo $[a, b]$ qualquer, o ponto x onde a tangente ao gráfico é paralela à recta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é o ponto médio do intervalo $[a, b]$.

188. Seja f uma função contínua em $[0, 1]$ e derivável em $]0, 1[$ tal que $f(1) = 4$. Prove que existe $c \in]0, 1[$ tal que $f(c) + cf'(c) = 4$.

189. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.
   (a) Calcule $f'(x)$ quando $x \neq 0$.
   (b) Verifique que não existem $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.
   (c) Poder-se-á concluir da alínea anterior que não existe $f'(0)$? Verifique, usando a definição, se f é derivável em 0.

190. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}\ |f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$. Mostre que f é constante.

191. Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$.

   (a) Mostre que, se $f'(x) \neq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, então existe no máximo um ponto fixo de f (ou seja, existe no máximo um $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = c$).

   *(b) Mostre que, se existir $k < 1$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}\ |f'(x)| \leq k$, então f possui um ponto fixo c, e qualquer sucessão definida por $x_{n+1} = f(x_n)$ converge para c. (Sugestão: rever o problema 110(b)).

   (c) Para $f(x) = x + \dfrac{1}{1+e^x}$, verifique que $|f'(x)| < 1$ mas f não possui nenhum ponto fixo.

192. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

   (a) Se I for um intervalo contendo 0 no seu interior, não existe nenhuma função derivável $f : I \to \mathbb{R}$ cuja derivada seja a função $g : I \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sin^2 x & \text{se } x \neq 0, \\ -5 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   (b) Existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja derivada é a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com

$$h(x) = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \leq 3, \\ \frac{1}{x-3} & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

   (c) Se existirem as derivadas laterais de uma função f num ponto a do seu domínio, então f é contínua em a.

   (d) Existem uma função derivável em $[-1, 1]$ e $c \in]-1, 1[$ tais que o declive da tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é igual a $\frac{1}{2}(f(1) - f(-1))$.

   (e) Se $f : X \to \mathbb{R}$ for constante num subconjunto Y de X, então, em cada ponto de $Y \cap Y'$, a derivada de f existe e é zero.

   (f) Se $f : X \to \mathbb{R}$ for constante num aberto Y de X, então, em cada ponto de Y, a derivada de f existe e é zero.

   (g) Uma função contínua num ponto é derivável nesse ponto.

   (h) Sejam f e g duas funções deriváveis num ponto de acumulação a do seu domínio. Se $f(a) = g(a)$, então $f'(a) = g'(a)$.

   (i) Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ forem duas funções deriváveis em todos os pontos do domínio e tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in X$, então $f = g$.

   (j) Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ forem duas funções deriváveis em todos os pontos do domínio e tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in X$, então $f - g : X \to \mathbb{R}$ é uma função constante.

   (k) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in X \cap X'$. Se $f'(a) > 0$, então existe um intervalo aberto I, contendo a, tal que f é crescente em $X \cap I$.

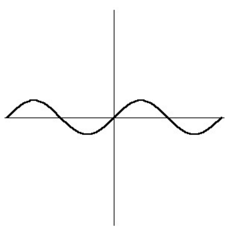
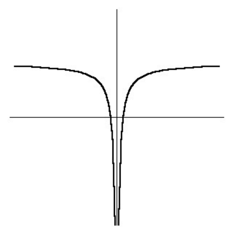
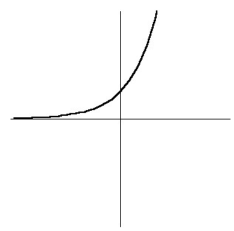
   (l) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável num ponto $a \in X \cap X'$. Se $f'(a) = 0$, então não existe nenhum intervalo aberto I, contendo a, tal que f seja monótona em $X \cap I$.

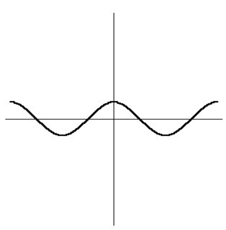
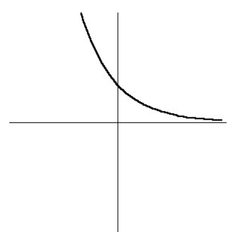
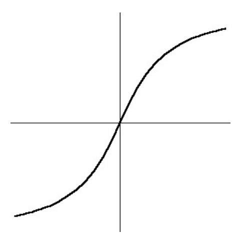
   (m) A equação $\cos x = 2x$ tem uma única solução em $[0, \frac{\pi}{4}]$.

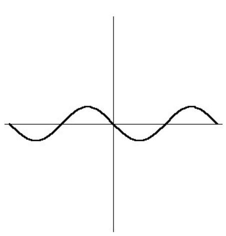
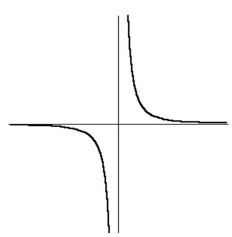
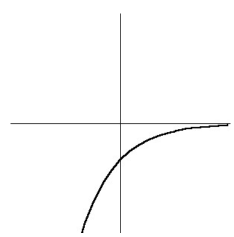
Ano lectivo 2004/05 Folha 14

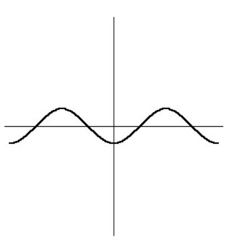
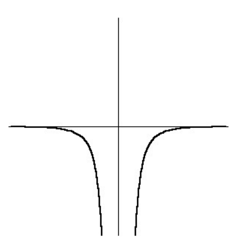
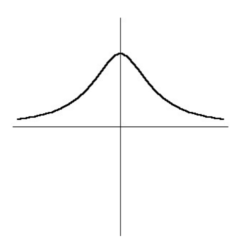
CAPÍTULO IV: Cálculo Diferencial

193. Considere as funções cujos gráficos estão esboçados em seguida. Com a excepção da função da alínea (l), todas as funções têm a sua derivada também representada. Identifique cada uma das derivadas, justificando a sua resposta.

(a)  (b)  (c) 

(d)  (e)  (f) 

(g)  (h)  (i) 

(j)  (k)  (l) 

194. Diz-se que a função $F : X \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f : X \to \mathbb{R}$ se, para todo o $x \in X$, $F'(x) = f(x)$.

Determine todas as primitivas das funções seguintes:

(a) $f(x) = 1 - x$; (b) $f(x) = x^2 - 4$; (c) $f(x) = x - |x|$;
(d) $f(x) = \sin x$; (e) $f(x) = \cos x$; (f) $f(x) = \tan x$.

195. Determine a equação de uma curva que passe na origem cuja recta tangente no ponto (x, y) tenha declive $2(x - 1)$.

196. Confirme que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin^2 x$, é uma primitiva de $g(x) = 2 \sin x \cos x$. Da igualdade $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ resulta que outra primitiva de g é dada por $h(x) = -\dfrac{1}{2} \cos 2x$. Atendendo a um dos corolários do Teorema de Lagrange, as funções f e h diferem por uma constante. Qual é essa constante?

197. Calcule os limites das funções seguintes, nos pontos indicados:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \tan \dfrac{1}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}}$; (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}$; (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^x$;

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$; (h) $\lim\limits_{x\to 2\pi} (\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{2\pi - x})$; (i) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\sin^2 x}{x^4})$.

198. Usando a Regra de Cauchy, prove que:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\log x} = +\infty$, qualquer que seja o número real positivo α;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$, qualquer que seja o número natural n;

(c) usando a alínea anterior, conclua que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

199. Verificando que não se pode aplicar a Regra de Cauchy, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{5x^2 + 6x + 7}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \cos x}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

200. (a) Determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, onde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão definida por $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{e^n}\right)^{n^2}$.

(b) Existe alguma função $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que exista $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ não existindo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

*201. Mostre que, se f é derivável em $]a, b[$ e, para $x \in]a, b[$, existir $f''(x)$ então

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Poderá existir o limite anterior sem existir $f''(x)$?

202. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função três vezes derivável tal que $f''(x) + xf'(x) + x^2 = 1$, $f'(0) = 1$, $f(0) = -1$. Determine o polinómio de Taylor, de ordem três, de f em 0.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2004/05 Folha 15

CAPÍTULO IV: Cálculo Diferencial

203. Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ no ponto -1.

204. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 1$. Determine os seus polinómios de Taylor de ordem 4 no ponto 0 e no ponto 1.

205. Determine o polinómio de Taylor de ordem n, no ponto zero, da função f, quando:

(a) $f(x) = x^3 - 1$;	(b) $f(x) = e^x$;	(c) $f(x) = \frac{1}{1+x}$
(d) $f(x) = \log(1 + x)$;	(e) $f(x) = \frac{1}{2-x}$;	(f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

206. Determine o polinómio de Taylor:

(a) de ordem $2n$, quando $f(x) = \cos x$, no ponto 0;

(b) de ordem $2n + 1$, para $f(x) = \sin x$, no ponto 0.

207. (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem n no ponto 0, com resto de Lagrange, da função $\log(1 + x)$.

(b) Mostre que $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1 + x) < x$, para qualquer $x \in]0, +\infty[$.

208. Considere a função $f(x) = e^x$ e o seu polinómio de Taylor $p_n(x)$ (já calculado no Exercício 205) e seja $r_n(x) = e^x - p_n(x)$.

(a) Mostre que
$$|r_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n + 1)!}|x|^{n+1}.$$

(b) Use o polinómio de Taylor de ordem 4 para calcular um valor aproximado de $e^{0.2}$.

(c) O valor de e pode ser calculado tomando $x = 1$ na fórmula de Taylor da função f.

i. Usando o facto de $e < 3$, explique porque é que
$$|r_n(1)| < \frac{3}{(n + 1)!}.$$

ii. Qual o valor de n que garante que no valor estimado de e as três primeiras casas decimais estão correctas?

(d) Determine um valor aproximado de $\sqrt{e}$ a menos de 10^{-3}.

209. (a) No Exercício 206 determinou-se o polinómio de Taylor de ordem n, no ponto 0, da função sin. Escreva a fórmula de Taylor de ordem n desta função, no ponto 0, e mostre que
$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

(b) Mostre que $|\sin x - x| \leq \frac{1}{6}|x|^3$.

*210. Seja f uma função duas vezes derivável em $I =]a, +\infty[$ tal que existem (e são reais) $M_0 = \sup\limits_{x \in I} |f(x)| = \sup\{|f(x)|;\ x \in I\}$, $M_1 = \sup\limits_{x \in I} |f'(x)|$ e $M_2 = \sup\limits_{x \in I} |f''(x)|$.

Mostre que $M_1^2 \leq 4M_0M_2$. (Sugestão: utilizar a fórmula de Taylor com resto de Lagrange tomando, se possível, $\frac{h}{2} = \sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$).

211. Será que a função $f :]\frac{\pi}{2}, \pi[\to \mathbb{R}$ definida por $\dfrac{\sin x}{x}$ atinge um máximo ou um mínimo local? Justifique.

212. Determine, caso existam, os extremos locais das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 1$, $x \in [-2, 3[$;

(b) $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$, $x \in]1, +\infty[$;

(c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 3, \\ -2 & \text{se } x = 3, \\ (x-2)^2 - 5 & \text{se } x > 3; \end{cases}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 4$.

213. Dê exemplos de funções polinomiais de grau 4 com dois pontos de inflexão ou sem pontos de inflexão. Será possível encontrar alguma com exactamente um ponto de inflexão?

214. A equação $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ representa uma hipérbole. Use derivação implícita para provar que $y'' = \dfrac{b^4}{a^2y^3}$ e discuta a sua concavidade.

*215. O gráfico de $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$ é um *hipociclóide com quatro cúspides.*

(a) Verifique que $y' = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ e $y'' = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{3\,x^{\frac{4}{3}}\,y^{\frac{1}{3}}}$.

(b) Esboce a curva.

216. Faça o estudo completo das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

(b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

(d) $f(x) = \dfrac{4(x-1)}{x^2}$;

(e) $f(x) = \sqrt{|x|}$;

(f) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

(g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$;

(h) $f(x) = \begin{cases} e - \frac{1}{x+1} & \text{se } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1-x}{e^x} & \text{se } x > 0; \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{4}\log x & \text{se } x > 1, \\ \sqrt{5 - x} & \text{se } x \leq 1; \end{cases}$

(j) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 9}$.

217. Faça o estudo completo das seguintes funções trigonométricas:

(a) $y = \tan x$; (b) $y = \cot x$; (c) $y = \sec x$; (d) $y = \csc x$.

CAPÍTULO IV: Cálculo Diferencial

218. As funções f e g definidas por $f(x) = \sin(\arcsin x)$ e $g(x) = \arcsin(\sin x)$ são diferentes. Justifique esta afirmação.

219. Considere a função arcsec, definida como a inversa da restrição da função sec ao conjunto $[0, \frac{\pi}{2}[\cup [\pi, \frac{3\pi}{2}[$.

   (a) Mostre que $(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

   (b) Faça o estudo completo da função.

220. Use derivação para mostrar que:

   (a) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;

   (b) $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$, para todo o $x \in]-1, 1[$.

221. Use as definições de sinh e de cosh para provar as igualdades:

   (a) $\sinh(u + v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v$;

   (b) $\cosh(u + v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v$.

222. Mostre que:

   (a) $(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$;
   (b) $(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x$;
   (c) $(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x$;
   (d) $(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$.

223. De Moivre provou que, para qualquer número natural n, se tem

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

   (a) Use indução matemática e as fórmulas para $\sin(u + v)$ e $\cos(u + v)$ para provar esta fórmula.

   (b) Prove que, para qualquer número natural n,

$$(\cosh t + \sinh t)^n = \cosh(nt) + \sinh(nt).$$

224. Mostre que, para $n \in \mathbb{N}$ e $x < 0$, $\sinh x < x + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

*225. (a) Relacione a inversa da função tanh, habitualmente denotada por arg tanh, com a função log.

   (b) Calcule $(\operatorname{arg\,tanh} x)'$ e $(\operatorname{arg\,coth} x)'$.

226. Gera-se um cilindro circular recto pela rotação de um rectângulo de perímetro P em torno de um dos seus lados. Quais as dimensões do rectângulo que gerará um cilindro de volume máximo?

227. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

228. (a) Prove que, para a e b positivos, se tem $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, estudando a função $f(x) = \dfrac{a+x}{\sqrt{ax}}$.

*(b) Prove que, para números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positivos, se tem $\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$, estudando a função $f(x) = \dfrac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + x}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n-1} x}}$ (sugestão: começar com $n = 3$).

229. Mostre que, entre os rectângulos com base no eixo dos XX e dois vértices na curva de equação $y = e^{-x^2}$, o que tem área máxima tem esses vértices situados nos pontos de inflexão da curva.

230. Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

231. Na produção de umas caixas, uma companhia de embalagens pinta a base, o topo e dois lados de branco e os restantes dois lados de vermelho. Se a tinta vermelha custar 50% mais do que a branca, quais as dimensões da caixa com volume V que tem menor custo de pintura?

*232. Qual a forma mais rápida para ir do ponto $(0, 1)$ para o ponto $(1, -1)$ se a velocidade acima do eixo dos xx for 300 e abaixo do eixo dos xx for 225?
(Sugestão: para simplificar os cálculos é conveniente, a partir de certa altura, considerar os ângulos que a trajectória mais rápida faz com o eixo dos xx).

233. Numa sala de cinema com chão horizontal, a base do écran está 2 metros mais alta que as cabeças dos espectadores, sendo a altura do écran de 4 metros. Onde se deve sentar um espectador que pretenda um ângulo de visão máximo?

234. (a) Mostre que, se $y = ce^{kx}$, onde c e k são constantes, então $y' = ky$, isto é, a função y varia com uma razão proporcional a si própria.

(b) Suponha agora que $y = f(x)$ é uma função que varia proporcionalmente a si própria, isto é, $y' = ky$, onde k é constante.

i. Verifique que, se $g(x) = f(x)e^{-kx}$, então $g'(x) = 0$.

ii. Conclua que $f(x) = ce^{kx}$ para alguma constante c.

235. O número de bactérias numa determinada cultura cresce de forma proporcional à população. O número inicial de bactérias é 20000, sendo 48000 ao fim de 3 horas.

(a) Encontre a função que apresenta a população de bactérias como função do tempo.

(b) Qual é a população ao fim de 7 horas?

(c) Quanto tempo é necessário para a população atingir um milhão?

236. (a) Mostre que, se r é uma raiz real da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então a função $y = e^{rx}$ é solução da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

(b) Use a alínea anterior para obter duas soluções de cada uma das equações diferenciais:

i. $y'' - y = 0$; ii. $y'' - 3y' + 2y = 0$; iii. $y'' - y' = 0$.

(c) Mostre que as funções $y = e^x$ e $y = xe^x$ são ambas soluções da equação diferencial $y'' - 2y' + y = 0$.

(d) Mostre que $y = e^x \sin x$ e $y = e^x \cos x$ são ambas soluções da equação diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$.

(e) Compare estes dois últimos casos com os anteriores.