

Sumários Alargados

CAPÍTULO I: FUNDAMENTOS – O RIGOR E A DEMONSTRAÇÃO EM ANÁLISE

1. Operadores lógicos e quantificadores

Recomenda-se a leitura de:

Capítulos 0 e 1 de: J. Lewin/M. Lewin, *An Introduction to Mathematical Analysis*;

Capítulo 1 de: M. T. Oliveira-Martins, *Tópicos de Matemática Finita*;

Capítulos 1 e 2 de: R. Pereira Coelho, *Lições de Análise Infinitesimal*.

2. Conjuntos

Para as Secções 2-6, recomenda-se a leitura de:

Capítulos 1 e 2 do livro de Elon Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1*.

Capítulo 3 do livro de J. Lewin/M. Lewin, *An Introduction to Mathematical Analysis*.

2.1. **Definição.** Um *conjunto* X é uma colecção de objectos, a que chamamos *elementos* de X . Se x é um elemento de X , dizemos que x *pertence a* X e escrevemos $x \in X$.

2.2. **Definição.** Se todo o elemento de X pertencer a Y , isto é, se

$$\forall x \ x \in X \Rightarrow x \in Y,$$

dizemos que o conjunto X é um *subconjunto de* Y , ou uma *parte de* Y , ou que X *está contido em* Y , e escrevemos $X \subseteq Y$.

Dois *conjuntos* X e Y serão *iguais* se e só se tiverem exactamente os mesmos elementos; logo

$$X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq X.$$

Se $X \subseteq Y$ mas $X \neq Y$ (isto é, se existir um elemento y de Y que não pertence a X), dizemos que X *está estritamente contido em* Y , ou que X *é uma parte própria de* Y e escrevemos $X \subset Y$.

Por exemplo,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q};$$

para todo o conjunto X , $\emptyset \subseteq X$.

2.3. **Definição.** Dado um conjunto X , designa-se por $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto das partes de* X :

$$\mathcal{P}(X) = \{A; A \subseteq X\}.$$

2.4. **Exemplos.**

1. Note-se que se tem sempre $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ e $X \in \mathcal{P}(X)$.

2. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

3. Se $X = \{1, 2, 3\}$, então $\mathcal{P}(X)$ tem 8 elementos:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

2.5. Definições. Dados dois subconjuntos A e B de X , a sua *reunião* é o conjunto

$$A \cup B = \{x \in X; x \in A \text{ ou } x \in B\};$$

a sua *intersecção* é o conjunto

$$A \cap B = \{x \in X; x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que A e B são *conjuntos disjuntos*.

2.6. Propriedades da reunião e da intersecção. Se A, B, C, D são subconjuntos de um conjunto X , então:

$$\begin{array}{ll} A \subseteq A \cup B & A \cap B \subseteq A \\ A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cup A = A & A \cap A = A \\ A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A & A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \\ A \subseteq B \text{ e } C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D & A \subseteq B \text{ e } C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{array}$$

2.7. Exercício. Demonstre as propriedades enunciadas.

2.8. Definição. Dados subconjuntos A e B de um conjunto X , a *diferença entre A e B* é o conjunto

$$A - B = \{x \in X; x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Chamamos *complementar de A* ao conjunto $X - A$, que também designamos por $X \setminus A$ ou A^c .

2.9. Propriedades do complementar. Se A e B são subconjuntos de X , então:

$$\begin{array}{ll} A^c = \emptyset \Leftrightarrow A = X & A^c = X \Leftrightarrow A = \emptyset \\ (A^c)^c = A & \\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \end{array}$$

2.10. Definição. Dados conjuntos X e Y , podemos formar o conjunto

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

A $X \times Y$ chama-se *produto cartesiano de X e Y* ; cada elemento (x, y) de $X \times Y$ chama-se *par ordenado*, sendo x a *primeira coordenada* e y a *segunda coordenada*.

Note-se que $(x, y) = (a, b)$ se e só se $x = a$ e $y = b$.

2.11. Observação. Se $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, então $X \times Y = \emptyset$.

3. Funções

3.1. Definição. Uma *função* $f : A \rightarrow B$ é constituída por:

- um conjunto A , a que se chama *domínio de f* , e que se designa habitualmente por D_f ,
- um conjunto B , a que se chama *conjunto de chegada de f* , e
- uma lei de correspondência, que permite associar a cada elemento x de A um (único) elemento $f(x)$ de B ; a $f(x)$ chama-se o *valor de f em x* .

Duas *funções* $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ são *iguais* se $A = C$, $B = D$ e

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x).$$

3.2. Definição. O *gráfico de $f : A \rightarrow B$* é o subconjunto do produto cartesiano de A e B

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\},$$

que também se costuma designar por $\Gamma(f)$.

3.3. Definições. Uma *função* $f : A \rightarrow B$ diz-se:

- *injectiva* se

$$\forall x \in A \quad \forall x' \in A \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x',$$

o que é equivalente a

$$\forall x \in A \quad \forall x' \in A \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x');$$

isto é, a elementos diferentes f atribui valores diferentes;

- *sobrejectiva* se

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad : \quad f(x) = y;$$

isto é, todo o elemento do conjunto de chegada é imagem por f de algum elemento do domínio;

- *bijectiva* se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva; isto é,

$$\forall y \in B \quad \exists^1 x \in A \quad : \quad f(x) = y.$$

3.4. Definições. Dada uma função $f : A \rightarrow B$, para cada subconjunto X de A podemos considerar o seguinte subconjunto de B

$$f(X) = \{f(x); x \in X\},$$

e para cada subconjunto Y de B podemos considerar o subconjunto de A

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}.$$

Estas correspondências definem duas funções entre os conjuntos de partes de A e de B :

$$\begin{array}{ccc} f() : \mathcal{P}(A) & \rightarrow & \mathcal{P}(B) & \text{e} & f^{-1}() : \mathcal{P}(B) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \\ X & \mapsto & f(X) & & Y & \mapsto & f^{-1}(Y). \end{array}$$

A $f()$ chamamos *função imagem directa de f* e a $f^{-1}()$ chamamos *função imagem inversa de f* .

3.5. **Propriedades das funções imagem directa e imagem inversa.** Se $f : A \rightarrow B$ é uma função e X, X' são subconjuntos de A e Y, Y' são subconjuntos de B , então:

$$\begin{array}{ll} f(\emptyset) = \emptyset & f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\ f(A) \subseteq B & f^{-1}(B) = A \\ X \subseteq X' \Rightarrow f(X) \subseteq f(X') & Y \subseteq Y' \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y') \\ f(X \cup X') = f(X) \cup f(X') & f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y') \\ f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X') & f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y') \\ & f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c. \end{array}$$

3.6. **Definição.** Se $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ são funções com $B = C$ (isto é, o domínio de g coincide com o conjunto de chegada de f), define-se a *função composição*

$$\begin{array}{l} g \circ f : A \rightarrow D \\ x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)). \end{array}$$

3.7. **Proposição.** *A composição de duas funções injectivas (respectivamente sobrejectivas; bijectivas) é uma função injectiva (respectivamente sobrejectiva; bijectiva).*

3.8. **Proposição.** *A atribuição das imagens directas e das imagens inversas preserva a composição de funções; isto é, se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, então a função imagem directa de $g \circ f$ é a composição das funções imagem directa de f e de g , e analogamente para as funções imagem inversa:*

$$(g \circ f)(\) = g(\) \circ f(\) \quad e \quad (g \circ f)^{-1}(\) = f^{-1}(\) \circ g^{-1}(\).$$

3.9. **Definições.**

1. Se X é um subconjunto de A , chama-se *restrição de $f : A \rightarrow B$ a X* à função $g : X \rightarrow B$ definida por $g(x) = f(x)$ para todo o $x \in X$. Denota-se por vezes por $f|_X$.
2. Se $f : A \rightarrow B$ e $g : X \rightarrow B$ são funções tais que $X \subseteq A$ e, para todo o $x \in X$, $f(x) = g(x)$, diz-se que f é uma *extensão de g* .

3.10. **Observação.** Note-se que a restrição de uma função a um subconjunto dado é única, enquanto que cada função tem diversas extensões a todo o conjunto que contém o domínio. Por exemplo, as funções

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & e \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 & x \mapsto 0 & x \mapsto \sin(\pi x) \end{array}$$

são diferentes extensões da função

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}. \\ x \mapsto 0 \end{array}$$

3.11. **Definições.** Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ duas funções.

1. A função g diz-se *inversa à esquerda de f* se $g \circ f = \text{id}_A$. Neste caso, f diz-se *inversa à direita de g* .
2. A função g diz-se *inversa de f* se $g \circ f = \text{id}_A$ e $f \circ g = \text{id}_B$.

3.12. **Proposição.** *Seja $f : A \rightarrow B$ uma função.*

1. *Se $A \neq \emptyset$, então f tem inversa à esquerda se e só se é injectiva.*
2. *A função f tem inversa à direita se e só se é sobrejectiva.*
3. *f tem função inversa se e só se é bijectiva. Nesse caso a inversa de f é única.*

4. Famílias

4.1. **Definição.** Dados conjuntos L e X , uma *família* de elementos de X indexada por L é uma função

$$\begin{aligned} x : L &\rightarrow X \\ \lambda &\mapsto x_\lambda, \end{aligned}$$

que habitualmente designamos por $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$.

4.2. **Exemplos.**

1. Famílias definidas por $L = \{1, 2\}$ não são mais do que *pares ordenados*. Podemos pois identificar $X \times X$ com o conjunto das famílias de elementos de X indexadas por $\{1, 2\}$.
2. Se $L = \{1, 2, \dots, n\}$, uma família $L \rightarrow X$ diz-se um *n -uplo de elementos de X* , e denota-se por (x_1, x_2, \dots, x_n) .
3. Para o caso de L ser infinito, obtemos como caso particular importante $L = \mathbb{N}$, sendo então uma família no conjunto X exactamente uma *sucessão* em X .

4.3. **Definições.** Dada uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X (isto é, uma função $a : L \rightarrow \mathcal{P}(X)$ com $a(\lambda) = A_\lambda$), podemos definir a sua *reunião*

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda := \{x \in X; \exists \lambda \in L : x \in A_\lambda\},$$

e a sua *intersecção*

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda := \{x \in X; \forall \lambda \in L \ x \in A_\lambda\}.$$

4.4. **Exercício.** Enuncie e demonstre as propriedades da reunião e intersecção de famílias tendo por base as propriedades enunciadas em 2.6.

4.5. **Definição.** Dada uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos, definimos o seu produto cartesiano

$$\prod_{\lambda \in L} A_\lambda := \{(a_\lambda)_{\lambda \in L}; \forall \lambda \in L \ a_\lambda \in A_\lambda\},$$

onde cada $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família; isto é,

$$\prod_{\lambda \in L} A_\lambda := \{a : L \rightarrow \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda; a \text{ é uma função e } \forall \lambda \in L \ a(\lambda) \in A_\lambda\}.$$

5. Relações de ordem

5.1. **Definição.** Dados conjuntos X e Y , uma *relação binária* de X em Y é um subconjunto de $X \times Y$. Dada uma relação $\rho \subseteq X \times Y$, escrevemos indiferentemente $(x, y) \in \rho$ ou $x\rho y$.

Se $X = Y$, dizemos apenas que ρ é uma *relação binária em X* . Isto é, uma relação binária em X é um subconjunto de $X \times X$.

5.2. **Exemplo.** Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função, então o gráfico de f (definido em 3.2.) é uma relação binária de X em Y .

5.3. **Exercício.** Identifique as relações binárias de X em Y que são gráficos de funções.

5.4. **Definições.** Se ρ é uma relação binária num conjunto X , diz-se que:

1. ρ é *reflexiva* se

$$\forall x \in X \quad x\rho x;$$

2. ρ é *simétrica* se

$$\forall x, y \in X \quad x\rho y \Rightarrow y\rho x;$$

3. ρ é *anti-simétrica* se

$$\forall x, y \in X \quad x\rho y \text{ e } y\rho x \Rightarrow x = y;$$

4. ρ é *transitiva* se

$$\forall x, y, z \in X \quad x\rho y \text{ e } y\rho z \Rightarrow x\rho z.$$

5.5. **Definição.** Uma relação binária que seja simultaneamente reflexiva, simétrica e transitiva diz-se uma *relação de equivalência*. Dados uma relação de equivalência ρ em X e um elemento x de X , chama-se *classe de equivalência de x , relativamente a ρ* , ao conjunto

$$\{x' \in X ; x\rho x'\}.$$

5.6. **Definições.**

1. Uma *relação de ordem* (ou *relação de ordem parcial*) é uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Se ρ é uma relação de ordem parcial no conjunto X , ao par (X, ρ) chama-se *conjunto parcialmente ordenado*.

2. Uma *relação de ordem* ρ em X diz-se *total* se

$$\forall x, y \in X \quad x\rho y \text{ ou } y\rho x.$$

O par (X, ρ) diz-se então um *conjunto totalmente ordenado* ou *cadeia*.

5.7. Exemplos.

1. Em $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, a relação definida por $x\rho y$ se $xy > 0$ é uma relação de equivalência.
2. Em \mathbb{Q} , a relação definida por $x\rho y$ se $[x] = [y]$, onde $[a]$ é o maior inteiro menor ou igual a a , é uma relação de equivalência.
3. O par (\mathbb{N}, \leq) é um conjunto totalmente ordenado, isto é, a relação \leq é uma relação de ordem total em \mathbb{N} .
4. De modo análogo, (\mathbb{Q}, \leq) é um conjunto totalmente ordenado.
5. Para todo o conjunto X , a relação de inclusão \subseteq é uma relação de ordem parcial no conjunto $\mathcal{P}(X)$. Note-se que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ não é em geral totalmente ordenado.
6. A relação

$$x\rho y \text{ se } x \text{ divide } y$$

é uma relação de ordem parcial em \mathbb{N} .

5.8. Definições. Sejam (X, \leq) um conjunto parcialmente ordenado, A um subconjunto de X e x um elemento de X . Diz-se que:

1. x é *minorante* de A se

$$\forall a \in A \quad x \leq a.$$

2. $x_0 \in X$ é *ínfimo* de A se for o maior dos minorantes de A ; isto é,

$$\forall x \in X \quad (x \text{ é minorante de } A \Leftrightarrow x \leq x_0),$$

ou ainda

$$\forall x \in X \quad ((\forall a \in A \quad x \leq a) \Leftrightarrow x \leq x_0).$$

3. x é elemento *mínimo* de A se for ínfimo de A e pertencer a A , ou, equivalentemente, se for minorante de A e pertencer a A .

De modo análogo, diz-se que:

1. x é *majorante* de X se

$$\forall a \in A \quad a \leq x.$$

2. $x_1 \in X$ é *supremo* de A se for o menor dos majorantes de A ; isto é,

$$\forall x \in X \quad (x \text{ é majorante de } A \Leftrightarrow x_1 \leq x),$$

ou ainda

$$\forall x \in X \quad ((\forall a \in A \quad a \leq x) \Leftrightarrow x_1 \leq x).$$

3. x é elemento *máximo* de A se for supremo de A e pertencer a A , o que é equivalente a ser majorante de A e pertencer a A .

Observação. Quando existe, o mínimo (respectivamente ínfimo; máximo; supremo) de A é único.

5.9. **Definição.** Um *conjunto* parcialmente ordenado (X, \leq) diz-se *bem ordenado* se todo o subconjunto não vazio de X tiver mínimo.

O Princípio da Boa Ordenação dos números naturais garante-nos que (\mathbb{N}, \leq) é bem ordenado.

6. Conjuntos finitos e infinitos

6.1. **Definição.** Dois *conjuntos* X e Y dizem-se *numericamente equivalentes* se existir uma bijecção $X \rightarrow Y$, e escreve-se $X \sim Y$.

6.2. **Definição.** Diz-se que o *conjunto* X é *numericamente inferior ou igual ao conjunto* Y , ou que o *cardinal de* X é *menor ou igual ao o cardinal de* Y se existir uma função injectiva de X em Y . Neste caso escreveremos $X \leq^{\#} Y$.

6.3. **Proposição.** *Se* X, Y e Z *são conjuntos, então:*

- (1) $X \leq^{\#} X$;
- (2) $X \leq^{\#} Y$ e $Y \leq^{\#} X \Rightarrow X \sim Y$;
- (3) $X \leq^{\#} Y$ e $Y \leq^{\#} Z \Rightarrow X \leq^{\#} Z$.

A propriedade (2) segue do seguinte resultado.

6.4. **Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder.** *Se existirem funções injectivas* $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$, *então existe uma bijecção* $X \rightarrow Y$.¹

6.5. **Definições.** Um *conjunto* X diz-se *finito* se for vazio ou for numericamente equivalente a $\{1, 2, \dots, n\}$ para algum número natural n . Diz-se então que X tem n elementos, ou que X tem cardinal n .

Um *conjunto* diz-se *infinito* se não for finito.

6.6. **Definição.** Um *conjunto* diz-se *numerável* se for finito ou numericamente equivalente a \mathbb{N} . Caso contrário, diz-se *não numerável*.

6.7. **Proposição.** *Se* $X \subseteq \mathbb{N}$, *então* X *é finito ou numericamente equivalente a* \mathbb{N} . *Logo, um conjunto é numerável se e só se é numericamente equivalente a uma parte de* \mathbb{N} .

6.8. **Proposição.** *Seja* $f : X \rightarrow Y$ *uma função.*

1. *Se* f *for injectiva e* Y *for numerável, então* X *é numerável.*
2. *Se* f *for sobrejectiva e* X *for numerável, então* Y *é numerável.*

6.9. **Corolário.**

1. *O conjunto* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *é numerável.*
2. *O produto cartesiano de dois conjuntos numeráveis é numerável.*
3. \mathbb{Q} *é numerável.*
4. *A reunião de uma família numerável de conjuntos numeráveis é numerável.*

¹Podem consultar a demonstração deste resultado no livro de P.R. Halmos, *Naive Set Theory*.

6.10. Teorema. *O cardinal de \mathbb{N} é menor ou igual ao cardinal de qualquer conjunto infinito.*

6.11. Proposição. Dado um conjunto X , o conjunto $\mathcal{P}(X)$ das suas partes é numericamente equivalente ao conjunto das funções de X em $\{0, 1\}$.

6.12. Corolário. Se X tem n elementos, então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^n elementos.

6.13. Teorema de Cantor. *Se X for um conjunto arbitrário e Y for um conjunto com pelo menos dois elementos, então o cardinal de X é estritamente inferior ao do conjunto $\mathcal{F}(X; Y)$ das funções de X em Y ; isto é, não existe uma função sobrejectiva de X em $\mathcal{F}(X; Y)$.*

6.14. Corolário. *O produto cartesiano de uma família indexada por \mathbb{N} de conjuntos infinitos numeráveis não é numerável.*

6.15. Corolário. *Todo o conjunto tem cardinal estritamente inferior ao cardinal do conjunto das suas partes.*

6.16. Corolário. *O conjunto das partes de \mathbb{N} não é numerável.*

6.17. Exercícios.

1. Prove que, se X é um conjunto infinito numerável, então o conjunto das partes finitas de X também é infinito numerável.
2. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pondo $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m \cdot (2n - 1)$. Prove que f é uma bijecção.
3. Defina uma função sobrejectiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $f^{-1}(n)$ seja infinito.

7. A recta real

7.1. Subconjuntos de \mathbb{R} . Seja X um subconjunto de \mathbb{R} .

1. X diz-se *limitado superiormente* se tiver um majorante em \mathbb{R} ; isto é, se existir $b \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in X$, $x \leq b$.
2. X diz-se *limitado inferiormente* se tiver minorante em \mathbb{R} ;
3. X diz-se *limitado* se for limitado superior e inferiormente;
4. X diz-se um intervalo se tiver a seguinte propriedade:

$$\forall a, b \in X \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad a \leq c \leq b \Rightarrow c \in X.$$

Um intervalo X pode escrever-se numa das formas, com $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} [a, b] & = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} &]a, b] & = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} \\ [a, b[& = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} & [a, +\infty[& = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \\]a, +\infty[& = \{x \in \mathbb{R}; a < x\} &]-\infty, b] & = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\} \\]-\infty, b[& = \{x \in \mathbb{R}; x < b\} &]-\infty, +\infty[& = \mathbb{R} \end{array}$$

7.2. Algumas propriedades de \mathbb{R} .

Completude: Todo o subconjunto não vazio de \mathbb{R} limitado superiormente tem supremo.

Propriedade Arquimediana: \mathbb{N} não é limitado superiormente em \mathbb{R} .

7.3. Proposição. *As seguintes condições equivalem-se:*

- (i) \mathbb{N} é ilimitado superiormente;
- (ii) para cada par a, b de números reais com $a > 0$, existe um número natural n tal que $na > b$;
- (iii) para cada $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

7.4. Teorema.

- 1. \mathbb{R} é numericamente equivalente a qualquer intervalo não degenerado.
- 2. \mathbb{R} é numericamente equivalente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

7.5. Definições. Sejam X um subconjunto de \mathbb{R} e $x \in \mathbb{R}$.

- 1. O ponto x diz-se *ponto interior* de X se existir um intervalo aberto $]a, b[$ tal que $x \in]a, b[\subseteq X$. O conjunto dos pontos interiores de X chama-se *interior* de X e denota-se por $\overset{\circ}{X}$.
- 2. x diz-se *ponto aderente* de X se todo o intervalo aberto ao qual x pertença intersectar X . Ao conjunto dos pontos aderentes de X chama-se *aderência* ou *fecho* de X e designa-se por \overline{X} .
- 3. O conjunto X diz-se *aberto* se todo o seu ponto for interior.
- 4. O conjunto X diz-se *fechado* se o seu complementar em \mathbb{R} for aberto.

7.6. Lema. *Sejam X um subconjunto de \mathbb{R} e $x \in \mathbb{R}$.*

- 1. x é ponto interior de X se e só se existir $\varepsilon > 0$ tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq X$.
- 2. x é ponto aderente de X se e só se, para todo o $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap X \neq \emptyset$.

7.7. Exemplos. Todo o intervalo aberto (resp. fechado) é um subconjunto aberto (resp. fechado) de \mathbb{R} ; nomeadamente, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, $]a, +\infty[$ é aberto e $[a, +\infty[$ é fechado.

Para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R} .

7.8. Lema.

- 1. A intersecção de dois abertos é um aberto.
- 2. A reunião de uma família qualquer de abertos é aberta.
- 3. Um subconjunto de \mathbb{R} é aberto se e só se é reunião de intervalos abertos.

7.9. Exercício. Prove que a reunião de dois fechados é fechada e que a intersecção de uma família qualquer de fechados é fechada.

7.10. Lema. *As únicas partes de \mathbb{R} que são simultaneamente fechadas e abertas são \emptyset e \mathbb{R} .*

- 7.11. **Proposição.** *Um subconjunto X de \mathbb{R} é fechado se e só se coincide com o seu fecho.*
- 7.12. **Definição.** *Um subconjunto X de \mathbb{R} diz-se denso se o conjunto dos seus pontos aderentes for \mathbb{R} , isto é, se $\overline{X} = \mathbb{R}$.*
- 7.13. **Proposição.** *\mathbb{Q} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são subconjuntos densos de \mathbb{R} .*
- 7.14. **Definição.** *Um ponto x diz-se ponto de acumulação de $X \subseteq \mathbb{R}$ se todo o intervalo aberto ao qual x pertença intersectar $X \setminus \{x\}$.*
- 7.15. **Lema.** *Se um subconjunto A de \mathbb{R} tiver supremo s tal que $s \notin A$, então s é ponto de acumulação de A .*
- 7.16. **Proposição.** *Dados $X \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações equivalem a x ser ponto de acumulação de X :*
- (i) *para todo o $\varepsilon > 0$, o conjunto $X \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contém algum ponto diferente de x ;*
 - (ii) *para todo o $\varepsilon > 0$, o conjunto $X \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ é infinito.*
- 7.17. **Corolário.** *Se A é um subconjunto finito de \mathbb{R} , então A não tem pontos de acumulação.*
- 7.18. **Teorema de Bolzano-Weierstrass.** *Todo o subconjunto infinito limitado de \mathbb{R} tem algum ponto de acumulação.*

CAPÍTULO II: LIMITES

Para o estudo de limites, recomenda-se a leitura de:

Capítulo 12 do livro de James Stewart, *Calculus*, Vol. II.

Capítulo 4, Parágrafos 1-6 e Capítulo 6, Parágrafos 1-4, do livro de Elon Lages Lima, *Curso de Análise*, vol. 1.

8. Limites de sucessões

8.1. **Definições.** Uma *sucessão* num conjunto X é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow X$; é habitual designar-se a imagem $x(n)$ por x_n – a que se chama *termo de ordem n da sucessão* – e a própria sucessão por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou apenas por (x_n) .

Chama-se *subsucessão* da sucessão $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ uma sucessão que se obtenha como composição de x com uma função $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que, para todo o par de números naturais j, k , se $j < k$ então $\varphi(j) < \varphi(k)$.

De agora em diante vamos falar apenas de sucessões de números reais, isto é, de sucessões em \mathbb{R} .

8.2. **Definição.** Uma sucessão (x_n) de números reais diz-se *limitada superiormente* (resp. *limitada inferiormente*, *limitada*) se o conjunto das suas imagens $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto limitado superiormente (resp. limitado inferiormente, limitado) em \mathbb{R} .

8.3. **Definições.** Uma sucessão (x_n) em \mathbb{R} diz-se:

1. *estritamente crescente* se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$;
2. *crescente (em sentido lato)* se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$;
3. *estritamente decrescente* se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n > x_{n+1}$;
4. *decrescente (em sentido lato)* se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq x_{n+1}$.

A sucessão (x_n) diz-se *monótona* se tiver uma das propriedades anteriores.

8.4. **Definição.** Diz-se que um número real a é *limite* da sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \ n \geq p \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Neste caso diz-se que (x_n) *converge para a* . Este limite é único (como se prova no teorem seguinte), logo, escrever-se-á $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ou $x_n \rightarrow a$ quando (x_n) convergir para a .

Em geral, se (x_n) tiver algum limite em \mathbb{R} , diz-se que (x_n) é uma *sucessão convergente*.

Se uma *sucessão* não for convergente, diz-se *divergente*.

8.5. **Teorema: Unicidade do limite.** *Uma sucessão de números reais tem no máximo um limite em \mathbb{R} .*

8.6. **Teorema.** *Uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a se e só se toda a sua subsucessão converge para a .*

8.7. **Proposição.** *Toda a sucessão convergente é limitada.*

8.8. **Teorema.** *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

8.9. **Proposição.** *Se (x_n) é uma sucessão que converge para $a > 0$, então*

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow x_n > 0.$$

8.10. **Proposição.** *Se (x_n) é uma sucessão limitada e (y_n) é uma sucessão que converge para 0, então a sucessão $(x_n y_n)$ converge para 0.*

8.11. **Lema.** *Se (x_n) é uma sucessão e $a \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ se e só se $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$.*

8.12. **Teorema.** *Se (x_n) e (y_n) são sucessões convergentes, para a e b respectivamente, então:*

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b;$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b;$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab;$$

$$(4) \quad \text{se } (y_n) \text{ não tiver termos nulos e } b \neq 0, \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

8.13. **Teorema das sucessões enquadradas.** *Se (x_n) , (y_n) e (z_n) são sucessões tais que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n \leq z_n,$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

8.14. **Corolário.** *Se (x_n) e (y_n) são sucessões convergentes e tais que $x_n \leq y_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Em particular, se (x_n) é uma sucessão convergente que só toma valores iguais ou inferiores a um número real a , então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a$.*

8.15. **Definições.** *Seja (x_n) uma sucessão divergente.*

1. Diz-se que (x_n) *tende para* $+\infty$ (ou *diverge para* $+\infty$), e escreve-se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, se

$$\forall r > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow x_n > r.$$

2. Diz-se que (x_n) *tende para* $-\infty$ (ou *diverge para* $-\infty$), e escreve-se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, se

$$\forall r > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow x_n < -r.$$

3. Diz-se que (x_n) *tende para* ∞ (ou *diverge para* ∞) se a sucessão $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ divergir para $+\infty$, e escreve-se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$; isto é, se

$$\forall r > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow |x_n| > r.$$

8.16. Teorema. *Sejam (x_n) e (y_n) sucessões de números reais.*

- (1) *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$.*
- (2) *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente por um número real $c > 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = +\infty$.*
- (3) *Se (x_n) não tiver nenhum termo igual a 0, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ se e só se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.*

8.17. Definição. Um número real a diz-se *valor de aderência* (ou *ponto de acumulação*) da sucessão (x_n) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : m \geq n \wedge x_m \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

8.18. Proposição. *Se (x_n) é uma sucessão e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes condições equivalem-se:*

- (i) *a é valor de aderência de (x_n) ;*
- (ii) *existe uma subsucessão de (x_n) que converge para a .*

8.19. Proposição. *Toda a sucessão limitada tem um valor de aderência.*

8.20. Teorema: Critério de convergência de Cauchy. *Uma sucessão (x_n) de números reais é convergente se e só se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N} \quad m \geq p \wedge n \geq p \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

8.21. Teorema. *Seja X um subconjunto de \mathbb{R} . As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *X é fechado e limitado;*
- (ii) *Todo o subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação que pertence a X ;*
- (iii) *Toda a sucessão com valores em X tem um valor de aderência que pertence a X .*

9. Limites de funções

Ao longo deste parágrafo $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função cujo domínio X é um subconjunto de \mathbb{R} e a é um ponto de acumulação de X . (De agora em diante denotaremos o conjunto de pontos de acumulação de X por X' .)

9.1. Definição. Se $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X , dizemos que o número real L é o *limite de $f(x)$ quando x tende para a* , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(Note-se que, tal como para sucessões, o limite de $f(x)$ quando x tende para um ponto a , quando existe, é único.)

9.2. **Proposição.** *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $Y \subseteq X$, a um ponto de acumulação de Y e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. A restrição de f a Y , $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, com $g(y) = f(y)$ para todo o $y \in Y$, ainda tem limite L quando y tende para a .*

9.3. **Observação.** Note que o recíproco da proposição anterior não é válido, embora a existência de limite possa ser garantida à custa da existência de limite para uma restrição, desde que o domínio desta contenha $X \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ para algum $\varepsilon > 0$.

9.4. **Teorema.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *O limite de $f(x)$ quando x tende para a é L .*

(ii) *Qualquer que seja a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $X \setminus \{a\}$ com limite a , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.*

9.5. **Teorema.** *Se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então f é limitada numa vizinhança de a ; isto é,*

$$\exists A > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < A.$$

9.6. **Teorema.** *Sejam $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções e $a \in X'$. Se, para todo o elemento x de X diferente de a , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.*

9.7. **Proposição.**

(1) *Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > 0$.*

(2) *Se $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in X \setminus \{a\}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então $L \leq M$.*

9.8. **Teorema.** *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então:*

(1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M;$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = LM;$

(3) *Se $M \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.*

Além disso, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e g for uma função limitada, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

9.9. **Teorema: Critério de Cauchy para funções.** *Se $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.*

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \text{ e } 0 < |y - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

9.10. **Teorema.** *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(X) \subseteq Y$, $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in Y' \cap Y$ e $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b)$, então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(b)$.*

9.11. Definições.

- Um ponto a de \mathbb{R} diz-se um *ponto de acumulação à direita* de um conjunto X se for ponto de acumulação do conjunto $X \cap]a, +\infty[$. Analogamente, a diz-se um *ponto de acumulação à esquerda* de X se for ponto de acumulação de $X \cap]-\infty, a[$. Denotamos o conjunto dos pontos de acumulação à direita (respectivamente à esquerda) de X por X'_+ (respectivamente por X'_-).
- Se $a \in X'_+$, dizemos que o número real L é o *limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a* , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Analogamente se define *limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a* , que se denota por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

9.12. Teorema. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Seja $Y = X \cap]a, +\infty[$ e $g = f|_Y$. Então $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ se e só se $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L$.*

9.13. Teorema. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'_+ \cap X'_-$. Então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se e só se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.*

9.14. Definições. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se:

- estritamente crescente* se, para todo o par $x, y \in X$, $x < y$ implica $f(x) < f(y)$;
- crescente (em sentido lato)* se, para todo o par $x, y \in X$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$;
- estritamente decrescente* se, para todo o par $x, y \in X$, $x < y$ implica $f(x) > f(y)$;
- decrescente (em sentido lato)* se, para todo o par $x, y \in X$, $x \leq y$ implica $f(x) \geq f(y)$;
- monótona* se verificar alguma das propriedades anteriores, isto é, se for crescente ou decrescente.

9.15. Teorema. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ monótona e limitada, $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$. Então existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.*

9.16. Definições. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, com $X \subseteq \mathbb{R}$ ilimitado superiormente, e $L \in \mathbb{R}$. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x \in X \ x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Define-se de modo análogo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

9.17. Teorema. *Se X for ilimitado superiormente e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ for monótona limitada, então existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.*

9.18. Definições. Dados $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$, diremos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ se

$$\forall A > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

De igual modo, diz-se que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ se}$$

$$\forall A > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ se}$$

$$\forall A > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > A.$$

De forma análoga, definem-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, -\infty, \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty (-\infty, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty (-\infty, \infty)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty (-\infty, \infty)$.

9.19. Resultados que envolvem limites infinitos.

- (1) Se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, este limite é único, independentemente de ser real ou infinito.
- (2) Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ é a restrição de f a Y e $a \in Y'$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
- (3) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty (-\infty, \infty)$, então a função f não é limitada.
- (4) Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in X$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
Logo, se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, então $\exists \delta > 0 : \forall x \in X \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$.

(5) As seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
 - (ii) para toda a sucessão (x_n) em X , se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$.
- (6) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = L$ (ou $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = +\infty$), então $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L$ (ou $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = +\infty$).
- (7) Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona e $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$, então existem (sendo possivelmente infinitos) os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

CAPÍTULO III: CONTINUIDADE

Para este capítulo, recomenda-se a leitura de:

Capítulo 4 (4.1 e 4.2) do livro de Philip Gillet, *Calculus and Analytic Geometry*.

Capítulo 7 (Parágrafos 1-4) do livro de Elon Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1*.

10. Funções contínuas

10.1. Definições. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *contínua em* $a \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

A função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos de X .

Se f não for contínua em a , então f diz-se *descontínua em* a e a diz-se um *ponto de descontinuidade de* f . A função f diz-se *descontínua* se for descontínua nalgum ponto do domínio.

10.2. Observações. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

1. Repare-se que, contrariamente à situação do estudo do limite de f num ponto a , só faz sentido falar de continuidade de f em a se a pertencer ao domínio de f .
2. Se a pertencer a X , mas não for ponto de acumulação de X , então f é contínua em a .
3. Se $a \in X \cap X'$, então f é contínua em a se e só se existir o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e for igual a $f(a)$.

10.3. Proposição. *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição de f a um subconjunto Y de X e $a \in Y$.*

- (1) *Se f for contínua em a , então g é contínua em a .*
- (2) *Se $Y = X \cap I$, onde I é um intervalo aberto, então f é contínua em a desde que g o seja.*

10.4. Proposição. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a , então f é limitada em $X \cap I$, onde I é um intervalo aberto contendo a .*

10.5. Teorema. *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$. As seguintes condições equivalem-se:*

- (i) *f é contínua em a ;*
- (ii) *se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em X que converge para a , então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.*

10.6. Teorema. *Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$, então as funções $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas no ponto a . Se $g(a) \neq 0$, então também $\frac{f}{g}$ é contínua em a .*

10.7. Exemplos.

1. Toda a função constante é contínua.
2. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x$ é contínua.
3. Pelo Teorema anterior, todo o polinómio

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

é contínuo.

4. Ainda pelo Teorema anterior, toda a função racional

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)}, \end{aligned}$$

onde p e q são polinómios e $X = \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$, é uma função contínua.

10.8. Teorema. *A composta de duas funções contínuas é contínua.*

10.9. Definições. Seja $a \in X$ um ponto de descontinuidade da função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$; isto é,

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in X : |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Diz-se que f tem:

1. uma *descontinuidade removível* em a se existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e for um número real for diferente de $f(a)$.
2. um *pólo* em a se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (isto é, $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$);
3. uma *descontinuidade essencial* em a se não for removível nem pólo.

As descontinuidades essenciais dividem-se em dois tipos:

- (a) *descontinuidade essencial de 1ª espécie*, se existirem os limites laterais em a (reais) e forem diferentes;
- (b) *descontinuidade essencial de 2ª espécie*, se não existir o limite à esquerda de f em a , sendo a um ponto de acumulação à esquerda de X , ou se não existir o limite à direita de f em a , sendo a um ponto de acumulação à direita de X .

10.10. Teorema. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ for monótona e descontinua em $a \in X'_- \cap X'_+$, então f tem uma descontinuidade essencial de 1ª espécie em a .*

10.11. Corolário. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona e $f(X)$ é um intervalo, então f é contínua.*

11. Funções contínuas em intervalos

11.1. Lema. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a , $d \in \mathbb{R}$ e $f(a) > d$, então*

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > d.$$

11.2. **Teorema do Valor Intermédio.** *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = d$.*

11.3. **Observação.** O resultado ainda é válido se se tiver $f(a) > d > f(b)$. Resulta imediatamente da aplicação do Teorema à função contínua $-f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

11.4. **Corolários.**

- (1) *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*
- (2) *Sejam I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $a, b \in I$ e $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$.*
- (3) *Se I é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é um intervalo.*

11.5. **Teorema.** *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e injectiva, definida num intervalo I . Então f é monótona, com imagem $J = f(I)$ um intervalo, e a sua função inversa $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

12. Funções contínuas em subconjuntos fechados e limitados de \mathbb{R}

12.1. **Teorema.** *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se X é um subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R} , então $f(X)$ é também um subconjunto de \mathbb{R} fechado e limitado.*

12.2. **Teorema de Weierstrass.** *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e X é um subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R} , então f tem máximo e mínimo.*

12.3. **Observação.** A hipótese de X ser fechado e limitado é essencial no Teorema de Weierstrass. De facto:

1. Se X não for limitado, então a função

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

é contínua mas não tem máximo, se X for ilimitado superiormente, ou não tem mínimo, se X for ilimitado inferiormente.

2. Se X não for fechado e a for um ponto aderente de X que não pertence a X , então a função

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x-a} \end{aligned}$$

é contínua mas não tem máximo, se a for um ponto de acumulação à direita de X , ou não tem mínimo, se a for um ponto de acumulação à esquerda de X .

CAPÍTULO IV: CÁLCULO DIFERENCIAL

13. Conceito de derivada

Para este capítulo, recomenda-se a leitura de:

Capítulo 2 (2.4 e 2.5), 3, 4 e 5 do livro de Philip Gillet, *Calculus and Analytic Geometry*.

Capítulo 8 (Parágrafos 1-3) do livro de Elon Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1*.

13.1. Definições.

1. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Diz-se que f é derivável (ou diferenciável) no ponto a se existir $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, que se designa habitualmente por $f'(a)$. Note-se que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

2. Para cada função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, define-se a *função derivada de f* , que tem como domínio o conjunto Y dos pontos de $X \cap X'$ onde f é diferenciável:

$$\begin{aligned} f' : Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \end{aligned}$$

13.2. **Proposição.** *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em a , então f é contínua em a .*

13.3. **Aproximação linear da função f .** *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $a \in X \cap X'$, então, para todo $x \in X$,*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x)$$

com $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x - a} = 0$. Reciprocamente, se $f(x) = f(a) + L(x - a) + s(x)$, para todo $x \in X$, com

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{s(x)}{x - a} = 0$, então f é derivável em a e $f'(a) = L$.

14. Cálculo de derivadas

14.1. **Teorema: Derivação da soma, do produto e do quociente de funções.** *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in X \cap X'$. Então as funções $f + g$, $f - g$, $f \times g$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(a) \neq 0$) são diferenciáveis em a , e*

1. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$,
3. $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

14.2. Corolário. Se f é derivável em a e $c \in \mathbb{R}$, então

1. $(cf)'(a) = cf'(a)$,
2. $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$, se $f(a) \neq 0$.

14.3. Teorema: Derivada da função composta. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(X) \subseteq Y$, $a \in X \cap X'$ e $b = f(a) \in Y \cap Y'$. Se existirem $f'(a)$ e $g'(b)$, então a função $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a). \quad ^2$$

14.4. Corolário: Derivada da função inversa. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui inversa $g : Y = f(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Se f é derivável em $a \in X \cap X'$ e g é contínua em $b = f(a)$, então g é derivável em b se e só se $f'(a) \neq 0$. Nesse caso, tem-se

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

14.5. Derivada da função implícita. Suponhamos que queremos obter a derivada de uma função f que nos é apresentada, não na sua forma explícita, mas como solução de uma equação dada (em $f(x)$ e na variável x). Dizemos então que a equação define implicitamente a função f .

A equação estabelece uma igualdade entre funções (as definidas pelo primeiro e segundo membros da equação). Derivando essas funções, obtemos uma igualdade entre as suas derivadas, e que é uma equação que envolve a função derivada. A este processo chama-se *derivação implícita da função f* .

Este cálculo é por vezes muito útil. Por exemplo, se quisermos calcular a derivada da função $f(x) = x^\alpha$, com α número real não nulo fixo, fazendo $y = y(x) = f(x)$, se $x \neq 0$ a função é solução da equação

$$\ln |y| = \alpha \ln |x|.$$

Derivando implicitamente y , obtemos

$$\frac{y'}{y} = \alpha \frac{1}{x} \Leftrightarrow y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

E é óbvio que esta fórmula é também válida quando $x = 0$ e $\alpha \geq 1$.

14.6. Método de Newton. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ for derivável no seu domínio, com derivada limitada, $x_1 \in X$ e a sucessão definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

convergir para $a \in X$, então $f(a) = 0$.³

²Recomenda-se a consulta da demonstração em: Michael Spivak, *Calculus*, terceira edição, páginas 176-177.

³Para melhor compreensão da eficácia do método, ver: J.Lewin/M. Lewin, *An Introduction to Mathematical Analysis*, páginas 216-217.

15. Uso da derivada no estudo de máximos e mínimos de funções

15.1. Definições. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Se $a \in X \cap X'_+$, definimos a *derivada à direita da função f no ponto a* como

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando este limite existir.

2. De igual modo, se $a \in X \cap X'_-$, definimos a *derivada à esquerda de f em a* por

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando este limite existir.

15.2. Definições. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$.

1. Diz-se que f possui um *máximo local* no ponto a se

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad x \in]a - \delta, a + \delta[\Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

Se se tiver $f(x) < f(a)$ para todo o elemento x , diferente de a , do intervalo $]a - \delta, a + \delta[$, diz-se que f possui um *máximo local estrito* em a .

2. De modo análogo definem-se *mínimo local* e *mínimo local estrito*.

15.3. Lema.

1. Se f é crescente e derivável em a , então $f'(a) \geq 0$.
2. Se f é decrescente e derivável em a , então $f'(a) \leq 0$.

15.4. Observação. Note-se que, de $f'(a) \geq 0$, não se pode concluir que f é crescente: a função

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

tem derivada em 0, igual a $\frac{1}{2}$, mas não é crescente em nenhum intervalo aberto contendo 0.

15.5. Teorema. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$. Se $f'_+(a) > 0$, então

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) < f(x).$$

15.6. Corolário. Se $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em a e possui um máximo ou mínimo local em a , então $f'(a) = 0$.

16. Funções deriváveis em intervalos

Ao longo deste parágrafo I é um intervalo.

16.1. **Definição.** Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em I e a sua função derivada $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, a função f diz-se *de classe \mathcal{C}^1* (ou *continuamente derivável*).

16.2. **Observações.**

1. Uma função pode ser derivável em todo o seu domínio e não ser de classe \mathcal{C}^1 (veja, por exemplo, a função h definida em 15.4.).
2. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for de classe \mathcal{C}^1 , o Teorema do Valor Intermédio aplicado à função $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diz-nos que f' toma todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$. O próximo resultado diz-nos que esta afirmação é válida mesmo quando f' não é contínua.

16.3. **Teorema de Darboux.** *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $[a, b]$. Se $f'(a) < d < f'(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = d$.*

16.4. **Corolário.** *Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em I e $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é descontínua em $c \in I$, então essa descontinuidade é essencial de segunda espécie.*

16.5. **Teorema de Rolle.** *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em $]a, b[$, então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

16.6. **Teorema do Valor Médio de Lagrange.** *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em $]a, b[$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

16.7. **Corolários do Teorema de Lagrange.**

1. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de $]a, b[$, então f é uma função constante.*
2. *Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, deriváveis em $]a, b[$ e $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in]a, b[$, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo o $x \in [a, b]$.*
3. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I . Se existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo o $x \in I$, então, quaisquer que sejam $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.*
4. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, então existe $f'(a)$ ($= f'_+(a)$), e é igual a L .*
5. *Seja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $]a, b[$ e derivável em $]a, b[\setminus \{c\}$, com $c \in]a, b[$. Se $\lim_{x \rightarrow c} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, então existe $f'(c)$ e é igual a L .*
6. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I .*
 - (a) *Tem-se $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$ se e só se f for crescente em I .*
 - (b) *Se $f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente em I . Neste caso, f possui inversa $g : f(I) = J \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em J , com $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$, para todo o $y = f(x) \in J$.*

7. Sejam $c \in]a, b[\subseteq X$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $]a, b[$ e derivável em $]a, b[\setminus\{c\}$.

- (a) $\forall x \in X (a < x < c \Rightarrow f'(x) > 0) \wedge (c < x < b \Rightarrow f'(x) < 0) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(c)$ é máximo local de f .
- (b) $\forall x \in X (a < x < c \Rightarrow f'(x) < 0) \wedge (c < x < b \Rightarrow f'(x) > 0) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(c)$ é mínimo local de f .
- (c) Se f' não muda de sinal em c , então $f(c)$ não é extremo local de f .

16.8. Teorema do Valor Médio de Cauchy. Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$, e se g' não se anula em $]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

16.9. Regra de Cauchy.

1. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[\setminus\{c\}$, com $c \in]a, b[$. Se g' não se anula em $]a, b[\setminus\{c\}$, se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ e se existe o $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. Sejam $f, g :]a, b[\setminus\{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis em $]a, b[\setminus\{c\}$, com $c \in]a, b[$. Se g' não se anula, se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty$ e se existe o $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. Se $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ são deriváveis no intervalo I , ilimitado superiormente, se g' não se anula em I e se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e existe o $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

17. Fórmula de Taylor

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima derivada de uma função f designa-se por $f^{(n)}$ e é definida por $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$; denotamos neste caso f por $f^{(0)}$.

17.1. Definições. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que:

- f é n vezes derivável no intervalo I se existir $f^{(n)}(x)$ para todo o $x \in I$;
- f é n vezes derivável no ponto $a \in I$ se existir um intervalo aberto J contendo a tal que $f|_{I \cap J}$ seja $(n-1)$ vezes derivável em J e se existir $f^{(n)}(a)$ (isto é $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}$);
- f é de classe \mathcal{C}^n se f for derivável n vezes e $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua;
- f é de classe \mathcal{C}^∞ se for de classe \mathcal{C}^n para todo o $n \in \mathbb{N}$.

17.2. Exemplos.

1. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|x^n$ é de classe \mathcal{C}^n mas não é de classe \mathcal{C}^{n+1} .
2. A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é de classe \mathcal{C}^∞ , sendo $g^{(n)}(0) = 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

17.3. Observação. Um polinómio de grau n

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

é completamente determinado pelas suas derivadas, até à ordem n , no ponto 0: $a_0 = p(0)$, $a_1 = p'(0)$, $a_2 = \frac{p^{(2)}(0)}{2}$, $a_3 = \frac{p^{(3)}(0)}{3 \cdot 2}$, \dots , $a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$.

17.4. Definição. Dada uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto a , chama-se *polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto a* ao polinómio

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Note-se que a diferença entre a função f e o seu polinómio de Taylor é uma função que tem derivadas nulas, até à ordem n , no ponto a .

17.5. Lema. Para uma função $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável ($n \geq 1$) no ponto $0 \in I$, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $r(0) = r'(0) = \cdots = r^{(n)}(0) = 0$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$.

17.6. Teorema: Fórmula de Taylor. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. Para todo o $x \in I$, tem-se

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x),$$

onde $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

17.7. Teorema: Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^n , ($n+1$) vezes derivável no intervalo $]a, b[$ e seja $x \in]a, b[$. Então existe $c \in]a, x[$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1};$$

equivalentemente, para todo o $h \in]0, b-a[$, existe $\theta \in]0, 1[$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

17.8. **Observação.** O resultado ainda é válido para $x \in]d, a[\subseteq I$, quando a função f é $(n + 1)$ vezes derivável em $]d, a[$. Assim, para cada $x \in]d, a[$, existe $c \in]x, a[$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

18. Aplicações da Fórmula de Taylor ao estudo de funções

18.1. **Teorema: Estudo de máximos e mínimos de funções.** *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável num ponto a , que pertence ao interior do domínio de f . Suponhamos que $f^{(j)}(a) = 0$, para $j = 1, \dots, n - 1$, e que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Então:*

1. *Se n for ímpar, f não atinge um extremo local em a ;*

2. *Se n for par:*

$$f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f \text{ tem um máximo local em } a,$$

$$f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f \text{ tem um mínimo local em } a.$$

18.2. **Definição.** Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo I , diz-se *convexa* (resp. *côncava*) se, sempre que $x \in]a, b[\subseteq [a, b] \subseteq I$, o ponto $(x, f(x))$ está situado abaixo (resp. acima) da recta que liga $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

18.3. **Observação.** Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se e só se,

$$(\forall a, x, b \in I) \quad a < x < b \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

18.4. **Teorema.** *Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ for duas vezes derivável em I , f é convexa (resp. côncava) se e só se $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) para todo o $x \in I$.*

18.5. **Estudo completo de uma função real de variável real.** Dada uma função real de variável real f , para procedermos ao seu estudo, devemos percorrer as seguintes etapas:

1. calcular o domínio;
2. verificar se é par, ímpar ou periódica (o que permitirá reduzir o domínio a estudar);
3. calcular a primeira derivada;
4. estabelecer o quadro de variação da função;
5. calcular valores limite, que permitirão completar o quadro de variação (e.g., os limites laterais em pontos de descontinuidade, ou que não pertençam ao domínio, e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$).
6. calcular o contradomínio;
7. determinar (caso existam) as assíntotas ao gráfico de f ;
8. calcular a segunda derivada;
9. estudar a concavidade e os pontos de inflexão;
10. calcular os pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados;

11. esboçar o gráfico da função.

CAPÍTULO V: ESTUDO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS

Recomenda-se a leitura de:

Capítulo 9 do livro de Philip Gillet, *Calculus and Analytic Geometry*.