Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 Folha 10

CAPÍTULOS III e IV: Continuidade e Diferenciabilidade

132. (a) Mostre que a equação $x^3 - x - 1 = 0$ tem uma solução em $\mathbb{R}$.
   (b) Mostre que qualquer polinómio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real. Conclua que, para cada $a \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$ ímpar, existe pelo menos um número real b tal que $b^p = a$.

133. Seja $f(x) = \tan x$. Verifique que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ e $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$. Pode concluir que existe $c \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ tal que $f(c) = 0$?

134. Considere a função definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
   (a) Calcule $f(0)$ e $f(3)$.
   (b) Mostre que existe pelo menos um $c \in [0, 3]$ tal que $f(c) = 0$.
   (c) Explique porque é que esta situação não contradiz o Teorema do Valor Intermédio.

135. (a) Seja f uma função contínua em $[0, 1]$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$. Mostre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. (A um ponto x tal que $f(x) = x$ chama-se *ponto fixo* da função f.)
   (b) Dê um exemplo de uma função contínua $f : [0, 1[\to [0, 1[$ que não tenha nenhum ponto fixo.

136. Seja f uma função contínua em $[0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Prove que existe $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $f(c) = \cos c$.

137. Verifique se a função f indicada em seguida é limitada e determine os seus extremos, caso existam.
   (a) $f : [-1, 2[\to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2 - 1$;
   (b) $f(x) = \tan x$, com $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$;
   (c) $f :]0, 2] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{4}{x^2}$;
   (d) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$.

138. Indique os extremos da função $f : [0, 2] \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. A função toma todos os valores entre eles? Justifique a sua resposta.

139. Calcule, usando a definição, a derivada da função f no ponto a indicado:
   (a) $f(x) = 9 - x^2$, $a = 1$;
   (b) $f(t) = 3t^2 - t$, $a = -1$;
   (c) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$, $a = 1$;
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$, $a = 1$.

140. Usando a definição, determine a função derivada das seguintes funções:
   (a) $f(x) = a$, com $a \in \mathbb{R}$; explique como pode concluir imediatamente o resultado a partir do gráfico de f;
   (b) $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$; explique como pode concluir imediatamente o resultado a partir do gráfico de f;
   (c) $f(x) = x|x|$;

(d) $f(x) = \cos x$ (sabendo que $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$);

(e) $f(x) = e^x$ (sabendo que $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$);

(f) $f(t) = t^2 - 1$;

(g) $f(x) = x - x^2$;

(h) $g(u) = \frac{1}{u^2}$;

(i) $f(x) = (x - a)^n$, com $a \in \mathbb{R}$.

*141. Mostre que, se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in X'_- \cap X \cap X'_+$, então

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Será a recíproca verdadeira?

142. Determine a função derivada de cada uma das funções seguintes:

(a) $f(x) = \tan x - 3 \sec x$; (b) $f(x) = \cot x + 2 \csc x$; (c) $f(x) = \sin x \cos x$;

(d) $f(x) = \sqrt[4]{x}(x^2 + 1)$; (e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^3+1}$; (f) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cos x - x^{-\frac{1}{3}} \sin x$.

143. Usando o Teorema da derivada da função composta, determine a derivada das funções definidas por:

(a) $f(x) = \sin \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (c) $f(x) = \log x$

(d) $f(x) = 4^x$ (e) $f(x) = 4^{\sqrt{x^2-1}}$ (f) $f(x) = \sin(\log x)$

(g) $f(x) = \log(\sin x)$ (h) $f(x) = \log(\sin x^{\cos x})$ (i) $f(x) = \sin x^{\cos x}$

(j) $f(x) = g(x)^{h(x)}$ (k) $f(x) = \sqrt{\log \sqrt{x}}$ (l) $f(x) = \log \sqrt{\log \sqrt{x}}$.

*144. Mostre que, caso f seja derivável em $\mathbb{R}$ e, para um dado $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfaça a condição $\forall t \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(tx) = t^\alpha f(x)$, então $xf'(x) = \alpha f(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

145. Determine as funções derivadas das funções seguintes:

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ -5 & \text{se } x = 0 \\ \tan x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x + \log(2 - x) & \text{se } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ (d) $1 + |\sin x|,\ x \in [0, 2\pi]$

146. Determine o máximo e o mínimo absolutos das seguintes funções nos intervalos indicados:

(a) $f(x) = 3x^2 - 10x + 7,\ X = [-1, 3]$; (b) $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3,\ X = [-3, 1]$;

(c) $f(x) = x^3 + 1,\ X = [-1, 1]$; (d) $f(x) = \sin x \cos x,\ X = [0, \pi]$.