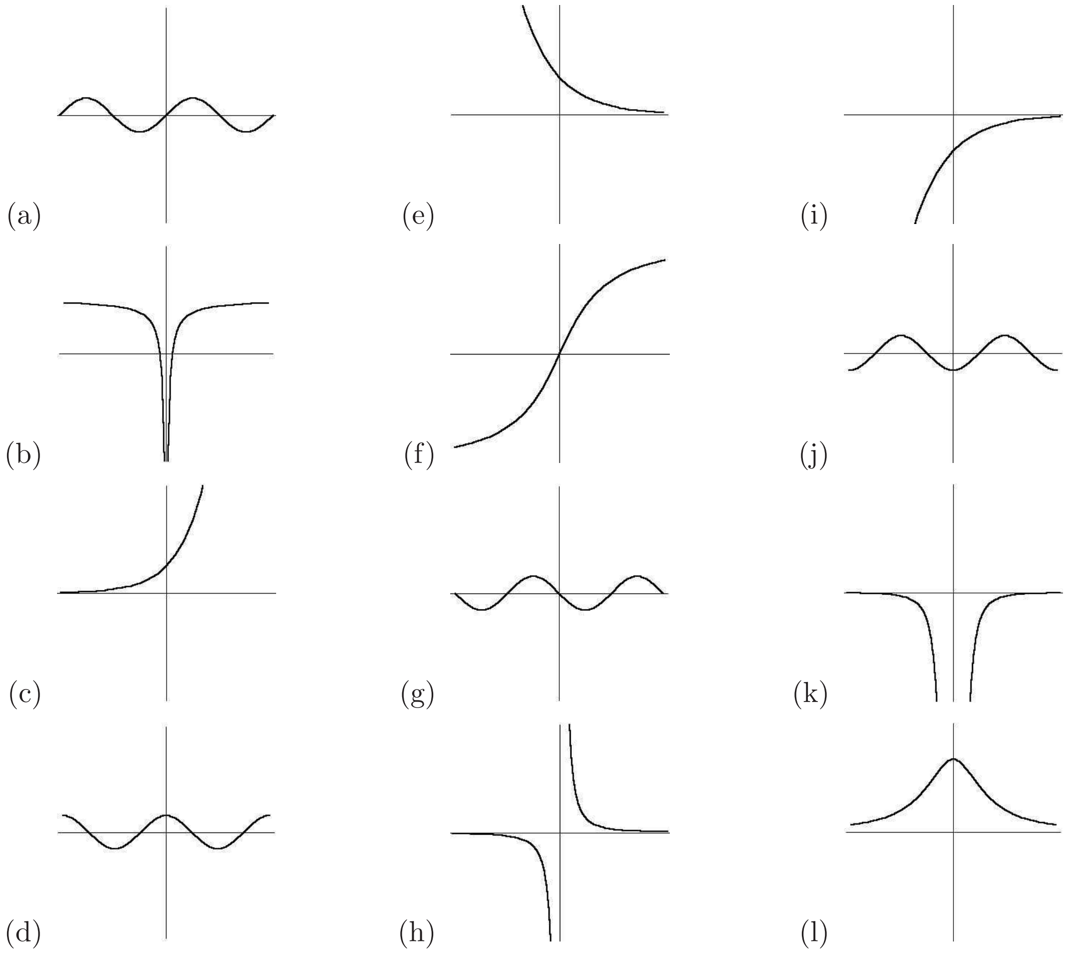
CAPÍTULO IV: Diferenciabilidade

160. Considere as funções cujos gráficos estão esboçados em seguida. Ponha em correspondência funções e respectivas derivadas.



161. Calcule os limites das funções seguintes, nos pontos indicados:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\tan\frac{1}{x}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$; (h) $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi}\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{2\pi-x}\right)$; (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin^2 x}{x^4}\right)$.

162. Usando a Regra de Cauchy, prove que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\log x}=+\infty$, qualquer que seja o número real positivo α;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$, qualquer que seja o número natural n.

163. Usando o exercício 162, conclua que $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$, qualquer que seja $\alpha\in\mathbb{R}$.

164. Verificando que não se pode aplicar a Regra de Cauchy, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x+4}{5x^2+6x+7}$; (b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}$; (c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$;

(d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$; (e) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; (f) $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

165. (a) Determine $\lim_{n\to\infty}x_n$, onde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão definida por $x_n=\left(1+\frac{1}{e^n}\right)^{n^2}$.

(b) Existe alguma função $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ tal que exista $\lim_{n\to\infty}f(n)$ não existindo $\lim_{x\to+\infty}f(x)$?

166. Será que a função $f:]\frac{\pi}{2},\pi[\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ atinge um máximo ou um mínimo local? Justifique.

167. Determine, caso existam, os extremos locais das seguintes funções:

(a) $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+1$, $x\in[-2,3[$;

(b) $f(x)=\frac{x}{\log x}$, $x\in]1,+\infty[$;

(c) $f(x)=\begin{cases}-x & \text{se } x<3,\\ -2 & \text{se } x=3,\\ (x-2)^2-5 & \text{se } x>3;\end{cases}$

(d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{|x|}$ se $x\neq 0$ e $f(0)=4$.

168. Gera-se um cilindro circular recto pela rotação de um rectângulo de perímetro P em torno de um dos seus lados. Quais as dimensões do rectângulo que gerará um cilindro de volume máximo?

169. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

170. Prove que, para a e b positivos, se tem $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, estudando a função $f(x)=\frac{a+x}{\sqrt{ax}}$.

171. Mostre que, entre os rectângulos com base no eixo dos XX e dois vértices na curva de equação $y=e^{-x^2}$, o que tem área máxima tem esses vértices situados nos pontos de inflexão da curva.

172. Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

173. Numa sala de cinema com chão horizontal, a base do écran está 2 metros mais alta que as cabeças dos espectadores, sendo a altura do écran de 4 metros. Onde se deve sentar um espectador que pretenda um ângulo de visão máximo?