Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 Folha 2

CAPÍTULO I: Fundamentos

16. O Artur, o Bernardo e o Carlos, suspeitos de terem assaltado uma loja de chocolates, fazem os seguintes depoimentos:

    Artur: "Bernardo é culpado, mas Carlos é inocente".
    Bernardo: "Se Artur é culpado então Carlos é culpado".
    Carlos: "Estou inocente, mas um dos outros dois é culpado".

    (a) Os três depoimentos são compatíveis?

    (b) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

    (c) Supondo que todos disseram a verdade, quem é inocente e quem é culpado?

    *(d) Supondo que os inocentes disseram a verdade e os culpados mentira, quem é inocente e quem é culpado?

17. De entre as seguintes frases assinale as que são proposições atribuindo-lhe o respectivo valor de verdade.

    (a) Para todo o x real, $x^2 = x$.
    (b) Para exactamente um x real, $x^2 = x$.
    (c) Para algum $x \in \mathbb{R}$ verifica-se $x^2 = x$.
    (d) $x^2 = x$.
    (e) $xy = xz$ implica $y = z$.
    (f) Para x, y, z reais $xy = xz$ implica $y = z$.

18. Para cada uma das expressões seguintes determine uma interpretação onde a proposição seja verdadeira e outra onde seja falsa.

    (a) $(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow q(y,x))$
    (b) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow (\exists y)q(x,y))$.

19. (a) Qual destas proposições é a negação de: "Algumas pessoas gostam de matemática"?

        i. Algumas pessoas não gostam de matemática.
        ii. Todas as pessoas gostam de matemática.
        iii. Ninguém gosta de matemática.

    (b) Qual destas proposições é a negação de: "Todas as pessoas gostam de gelados"?

        i. Ninguém gosta de gelados.
        ii. Todas as pessoas não gostam de gelados.
        iii. Existe alguém que não gosta de gelados.

20. Determine a negação de cada uma das seguintes expressões numa forma que não contenha o conectivo $\sim$ como conectivo principal.

    (a) $(\forall x)(p(x) \vee \sim p(x))$
    (b) $(\exists x)(p(x) \Rightarrow (q(x) \vee r(x)))$
    (c) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \Leftrightarrow p(y,x))$
    (d) $(\exists y)(\forall x)(p(x,y) \Rightarrow (q(x) \Rightarrow r(y)))$.

21. Escreva expressões equivalentes às do exercício anterior utilizando apenas o quantificador $\exists$ e os conectivos lógicos $\sim$ e $\vee$.

22. Para cada um dos seguintes pares de expressões, indique qual delas é consequência da outra e apresente, se possível, uma interpretação onde sejam não equivalentes:

(a) $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ e $(\exists y)(\forall x)p(x,y)$

(b) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$ e $((\exists x)p(x)) \wedge ((\exists x)q(x))$

(c) $((\forall x)p(x)) \wedge ((\forall x)q(x))$ e $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$

(d) $(\forall x)p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x)$ e $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$.

23. Apresente, se possível, uma interpretação onde sejam falsas as seguintes expressões:

(a) $(\forall x)p(x) \Leftrightarrow \sim (\exists x)(\sim p(x))$

(b) $((\forall x)p(x)) \vee ((\forall x)q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$

(c) $[(\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)p(x)] \Rightarrow (\exists x)q(x)$

(d) $(\forall z)(\forall y)[(\forall x)(p(y) \Rightarrow q(x,y)) \Rightarrow (p(y) \Rightarrow (\forall x)q(x,y))]$

*(e) $(\forall z)(\forall y)[(\forall x)(p(x,y) \Rightarrow q(x,y)) \Rightarrow (p(z,y) \Rightarrow (\forall x)q(x,y))]$.

24. Verifique que

(a) $\{x \in \mathbb{N};\ x^2 < 15\} = \{x \in \mathbb{N};\ 2x < 7\}$

(b) $\{x \in \mathbb{Q};\ x^2 = 2\} = \{x \in A;\ x$ é tigre e x é cor-de-rosa$\}$,

onde A é o conjunto dos animais terrestres conhecidos até 3/10/2005.

25. Considere os conjuntos

$R = \{1, 3, \pi, 4.1, 9, 10\}$ $S = \{\{1\}, 3, 9, 10\}$ $T = \{1, 3, \pi\}$ $U = \{\{1, 3, \pi\}, 1\}$.

Indique, de entre as seguintes proposições, as que são falsas (justifique a sua resposta).

(a) $1 \in R$ (b) $1 \in S$ (c) $T \subseteq R$

(d) $S \subseteq R$ (e) $T \subseteq U$ (f) $\emptyset \subseteq S$

(g) $\{1\} \subseteq S$ (h) $T \in U$ (i) $T \not\subseteq R$.

26. Para A, B e C conjuntos arbitrários, indique quais as afirmações verdadeiras.

(a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$ (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(c) $\{\emptyset\} \subseteq A$ (d) $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

(e) Se $A \not\subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \not\subseteq C$ (f) Se $A \in B$ e $B \not\subseteq C$ então $A \notin C$.

27. Para $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 4, 7\}$, $C = \{x;\ x \in \mathbb{Z}$ e $2 \leq x < 5\}$ subconjuntos de $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ determine:

(a) $A \cup B$ (b) $A \cap C$ (c) $A - B$

(d) $S - A$ (e) $A - S$ (f) $(A \cap B)^c$

(g) $(B - A)^c \cap (A - B)$ (h) $(C \cap B) \cup A^c$ (i) $(C^c \cup B)^c$.

28. Sendo A e B subconjuntos arbitrários de um conjunto X, indique as igualdades verdadeiras.

(a) $A \cup A = A$ (b) $B \cap B = B$

(c) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ (d) $(A^c)^c = A$

(e) $A - B = (B - A)^c$ (f) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

(g) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A = B^c$ (h) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.