Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 Folha 3

CAPÍTULO I: Fundamentos

29. Para cada uma das seguintes proposições, indique condições a impor aos conjuntos A e B para que as proposições sejam verdadeiras.
(a) $A \cup B = A$ (b) $A \cup \emptyset = \emptyset$ (c) $A \cap B = A$ (d) $B - A = \emptyset$ (e) $(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$.

30. Mostre que para conjuntos arbitrários A, B e C se tem

    (a) Se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ então $A \subseteq B \cap C$.

    (b) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ também $A \cup B \subseteq C$.

31. Para A e B subconjuntos arbitrários de X, prove que $A \subseteq B$ se e só se $X \setminus B \subseteq X \setminus A$.

32. Prove ou refute que, sendo A, B e C subconjuntos arbitrários de X, se verificam as seguintes propriedades:
(a) $A - (B - C) = (A - B) - C$; (b) $(A \cap B) - C = A \cap (B - C)$;
(c) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$; (d) $(A - B)^c = A^c - B^c$;
(e) $A \cup (B - A) = A \cup B$; (f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
(g) $A - B = A \cap B^c$; (h) $A \cup B = A \cup (B \cap C)$ se e só se $B \subseteq C$.

*33. Considere a operação Δ (diferença simétrica) definida, entre subconjuntos de um conjunto X, por $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que, para subconjuntos arbitrários A, B e C de X, se tem:
(a) $A\Delta \emptyset = A$; (b) $A\Delta B = B\Delta A$;
(c) $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$; (d) $A\Delta B = A\Delta C$ se e só se $B = C$.

34. Sejam A e B conjuntos arbitrários.

    (a) Prove que, se $A \subseteq B$ então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

    (b) Prove que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

    (c) Quando é que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$?

35. Sejam A, B, C e D conjuntos arbitrários. Prove ou refute as seguintes afirmações:
(a) $A \times B = B \times A$; (b) $A \subseteq C$, $B \subseteq D \Leftrightarrow A \times B \subseteq C \times D$;
(c) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$; (d) $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$.

36. Quando é que, para A e B subconjuntos de um conjunto X, se tem $A^c \times B^c = (A \times B)^c$?

37. Determine x, y e z tais que
(a) $((x, y + 2), z + 3) = ((3, 5), 6)$; (b) $\{x, y + 2, z + 3\} = \{3, 5, 6\}$.

38. Sejam A e B conjuntos arbitrários, x e a elementos de A e y e b elementos de B. Prove que $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{b, a\}\}$ se e só se $(x, y) = (a, b)$.

39. Considere a função $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & m \times n \end{array}$.

   (a) Verifique se a função f é injectiva.

   (b) Verifique se a função f é sobrejectiva. É bijectiva?

   (c) Calcule $f(A)$, quando:

      i. $A = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\,;\, n+m \leq 5\}$; ii. $A = \{2\} \times \mathbb{N}$;

      iii. $A = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\,;\, n$ e m pares$\}$.

   (d) Calcule $f^{-1}(B)$, quando:

      i. $B = \{1,2,3,4\}$; ii. $B = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n$ é par$\}$; iii. $B = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n$ é ímpar$\}$.

40. Sejam $f : X \to Y$ uma função e A e B subconjuntos de X. Prove que:

   (a) $f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)$;

   (b) Se f é injectiva, então $f(A - B) = f(A) - f(B)$;

   (c) f é injectiva se e só se $f(X - C) = f(X) - f(C)$ para qualquer $C \in \mathcal{P}(X)$.

41. Dada uma função, $f : X \to Y$, prove que:

   (a) $\forall A \subseteq X \;\; A \subseteq f^{-1}(f(A))$; (b) f é injectiva $\Leftrightarrow$ $\forall A \subseteq X \;\; A = f^{-1}(f(A))$;

   (c) $\forall B \subseteq Y \;\; f(f^{-1}(B)) \subseteq B$; (d) f é sobrejectiva $\Leftrightarrow$ $\forall B \subseteq Y \;\; f(f^{-1}(B)) = B$;

   (e) $\forall B_1, B_2 \subseteq Y \;\; f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$.

42. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas funções. Prove que:

   (a) Se f e g são injectivas, então $g \circ f$ é injectiva.

   (b) Se f e g são sobrejectivas, então $g \circ f$ é sobrejectiva.

   (c) Se $g \circ f$ é injectiva, então f é injectiva.

   (d) Se $g \circ f$ é sobrejectiva, então g é sobrejectiva.

43. Entre as funções seguintes, indique as que são injectivas, sobrejectivas e bijectivas. Quando for possível, indique uma inversa à esquerda, uma inversa à direita ou a inversa para a função dada.

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + 1$; (b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $g(x) = \frac{1}{x}$;

   (c) $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $h(z,n) = \frac{z}{n+1}$; (d) $f : \{1,2,3\} \to \{p,q,r\}$, $G(f) = \{(1,q),(2,r),(3,p)\}$;

   (e) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2^x$; (f) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = (y+1, x+1)$.

44. Denotando por $\mathcal{F}(X;Y)$ o conjunto das funções de X em Y, dados conjuntos X, Y e Z estabeleça uma bijecção entre os conjuntos $\mathcal{F}(X \times Y; Z)$ e $\mathcal{F}(X; \mathcal{F}(Y;Z))$.