Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 Folha 4

CAPÍTULO I: Fundamentos

45. Prove que, se $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto X e $(B_\mu)_{\mu\in M}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto Y, então:

(a) $X \setminus (\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in L}(X \setminus A_\lambda)$;

(b) $X \setminus (\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in L}(X \setminus A_\lambda)$;

(c) $(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$;

(d) $(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda) \cup (\bigcap_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$.

46. Demonstre que, se $f : X \to Y$ é uma função e $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ e $(B_\mu)_{\mu\in M}$ são famílias de subconjuntos de X e Y, respectivamente, então:

i. $f(\bigcup A_\lambda) = \bigcup f(A_\lambda)$;

ii. $f(\bigcap A_\lambda) \subseteq \bigcap f(A_\lambda)$;

iii. $f^{-1}(\bigcup B_\mu) = \bigcup f^{-1}(B_\mu)$;

iv. $f^{-1}(\bigcap B_\mu) = \bigcap f^{-1}(B_\mu)$.

*47. Sendo $(A_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ uma família arbitrária de conjuntos com índices em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, verifique se é sempre verdade que $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i,j}\right)$.

48. Mostre que $\bigcup_{\lambda\in L} \mathcal{P}(A_\lambda) \subseteq \mathcal{P}\Big(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\Big)$ e que $\bigcap_{\lambda\in L} \mathcal{P}(A_\lambda) = \mathcal{P}\Big(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\Big)$, onde $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto X, e apresente um exemplo em que a primeira inclusão seja estrita.

49. (a) Determine, se possível, uma extensão sobrejectiva para a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & xy. \end{array}$

(b) Determine, se possível, uma extensão bijectiva para a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} \\ & x & \mapsto & \frac{2}{3}x. \end{array}$

(c) Prove que toda a função é a composta, por esta ordem, de uma função sobrejectiva com uma função injectiva.

*(d) Prove que toda a função é a composta, por esta ordem, de uma função injectiva com uma função sobrejectiva.

*(e) Prove que toda a função injectiva tem uma extensão bijectiva.

50. Indique quais das seguintes relações são gráficos de funções, indicando nesse caso o seu domínio.

(a) $\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,3)\}$;

(b) $\{(1,2),(2,2),(2,3),(4,3)\}$;

(c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ x^2+y=1\}$;

(d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ x+y^2=1\}$.

51. Teste a reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade da relação ρ em X, quando:

   (a) $X = \mathbb{N}$, $x\rho y$ se $x + y$ for um número par;
   (b) $X = \mathbb{N}$, $x\rho y$ se xy for um número ímpar;
   (c) $X = \mathbb{N}$, $x\rho y$ se $x = y^2$;
   (d) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x, y)\rho(x', y')$ se $x + y' = x' + y$;
   (e) X conjunto das linhas do plano e $x\rho y$ se x for paralela a y ou x coincidir com y;
   (f) $X = \{1, 2, 3\}$ e $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (1, 3)\}$.

52. Seja $f : X \to Y$ uma função.

   (a) Prove que ρ, definida em X por $x\rho y$ se $f(x) = f(y)$, é uma relação de equivalência. (ρ diz-se a equivalência núcleo de f.)
   (b) Para $X = Y = \mathbb{Z}$ e $f(x) = 3x^2$ determine a classe de equivalência do elemento 4 pela relação de equivalência núcleo de f.

53. Considere a relação de inclusão $\subseteq$ no conjunto das partes do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$.

   (a) Mostre que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, mas não uma cadeia.
   (b) Determine, caso existam, os minorantes, mínimo, majorantes e supremo dos conjuntos:
      i. $A = \{S \subseteq X\,;\, 1 \in S\}$;
      ii. $B = \{S \subseteq X\,;\, 2 \notin S\}$;
      iii. $C = \{S \subseteq X\,;\, S$ é um conjunto singular$\}$.

54. Considere o conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, onde X é um conjunto arbitrário.

   (a) Indique, se existirem, o elemento mínimo e o elemento máximo de $\mathcal{P}(X)$.
   (b) Para que conjuntos X é que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é totalmente ordenado?
   (c) Sejam A e B subconjuntos arbitrários de X. Prove que o ínfimo e o supremo de $\{A, B\}$ existem. Indique esses elementos.

55. Em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ considere a relação binária ρ definida por $(a, b)\rho(c, d)$ se $a < c$ ou $a = c$ e $b \leq d$.

   (a) Mostre que ρ é uma relação de ordem em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. É total?
   (b) Determine, caso existam, os minorantes, mínimo, ínfimo, majorantes, máximo, supremo, dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
      i. $X = \{1\} \times \mathbb{N}$; ii. $Y = \mathbb{N} \times \{1\}$; iii. $Z = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\,;\, n + m = 10\}$.

56. Seja ρ_1 uma relação binária em X reflexiva e transitiva.

   (a) Mostre que a relação ρ_2, definida por $a\rho_2 b$ se e só se $a\rho_1 b$ e $b\rho_1 a$, é uma relação de equivalência.
   *(b) Denotando por [a] a classe de equivalência $\{a' \in X;\ a\rho_2 a'\}$, mostre que a relação ρ, definida por $[a]\rho[b]$ se e só se $a\rho_1 b$, é uma relação de ordem no conjunto das classes de equivalência definidas em X por ρ_2.