Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 Folha 5

CAPÍTULO I: Fundamentos

*57. Seja $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ uma família de elementos de um conjunto parcialmente ordenado, X, tal que para todo o $j \in J$ existe $\sup\{x_{ij};\ i \in I\}$. Mostre que, no caso de existir, $\sup\{\sup\{x_{ij};\ i \in I\};\ j \in J\}$ é igual a $\sup\{x_{ij};\ (i,j) \in I \times J\}$.

58. Prove que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é limitado se e só se $\exists b \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in A\ |x| \leq b$.

59. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e α um majorante de A.

   (a) Mostre que as seguintes afirmações se equivalem:

      (i) α é o supremo de A;

      (ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A\ :\ x > \alpha - \varepsilon$;

   (b) Formule a correspondente caracterização de ínfimo de A.

60. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   (a) Suponha que $A \subseteq B$. Prove que:

      i. Se α é um majorante de B, também é um majorante de A.

      ii. Se A for não vazio e B for limitado superiormente, então $\sup A \leq \sup B$.

   (b) Mostre que, se α é um majorante de A e β é um majorante de B, então $\max\{\alpha,\beta\}$ é um majorante de $A \cup B$ e $\min\{\alpha,\beta\}$ é um majorante de $A \cap B$.

   (c) Se A e B forem não vazios e limitados superiormente, então

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

61. Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que: $\forall x \in A\ \forall y \in B\ x < y$. Prove que:

   (a) $\sup A \leq \inf B$;

   (b) pode ocorrer $\sup A = \inf B$;

   (c) $\sup A = \inf B$ se e só se $\forall \delta > 0\ \exists x \in A\ \exists y \in B\ :\ x + \delta > y$.

62. Seja $-A = \{-x;\ x \in A\}$, onde A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. Mostre que $\inf(-A) = -\sup A$.

63. Seja $A \cdot B = \{ab;\ a \in A \text{ e } b \in B\}$, onde A e B são conjuntos limitados de números reais positivos. Mostre que $\sup A \cdot B = (\sup A)(\sup B)$. O que aconteceria no caso de A e B conterem números negativos?

64. Sejam $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ e $(y_\lambda)_{\lambda\in L}$ famílias limitadas de números reais positivos indexadas por L.

   (a) Mostre que $\sup\{x_\lambda y_\lambda; \lambda \in L\} \leq (\sup\{x_\lambda; \lambda \in L\})(\sup\{y_\lambda; \lambda \in L\})$ e apresente um exemplo em que a desigualdade anterior seja estrita.

   (b) Mostre que $\sup\{x_\lambda^2; \lambda \in L\} = (\sup\{x_\lambda; \lambda \in L\})^2$.

*65. (a) Prove que todo o subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é reunião de intervalos abertos dois a dois disjuntos.

(b) Prove que todo o subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é reunião de uma família numerável de intervalos abertos.

(c) Mostre que se I é um intervalo aberto então não existem conjuntos abertos disjuntos e não vazios, A_1 e A_2, tais que $I = A_1 \cup A_2$.

66. (a) Prove que a intersecção de uma família finita de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

(b) Dê exemplos de famílias de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ cuja intersecção seja, respectivamente,

i. um conjunto aberto;

ii. um conjunto fechado que não seja aberto;

iii. um conjunto que não seja aberto nem fechado.

67. Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são abertos e/ou fechados:

(a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{R}$ (e) $\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ (f) $\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

(g) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$ (h) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$ (i) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}, n\geq 2} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.

68. Determine o interior e o fecho de cada um dos conjuntos do exercício anterior.

69. Mostre que, para X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, se tem,

(a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

(b) $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$;

(c) nalguns casos, $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$;

70. Verifique que, para A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$,

(a) se A é aberto então A é vazio ou A não é numerável;

(b) se A é aberto e B é finito então $A - B$ é aberto;

(c) se A é aberto e B é numerável infinito então $A - B$ pode ser ou não ser aberto.

71. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que $\mathbb{R} \setminus \operatorname{int}(A) = \overline{\mathbb{R} \setminus A}$ e $\mathbb{R} \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus A)$.

(b) Mostre que, em alguns casos, $\operatorname{int}(\overline{A}) \not\subseteq \overline{\operatorname{int}(A)}$ e $\overline{\operatorname{int}(B)} \not\subseteq \operatorname{int}(\overline{B})$.

*(c) Quando é que $\overline{\operatorname{int}(A)} = \operatorname{int}(\overline{A})$?

*72. Mostre que uma família numerável de intervalos fechados e limitados não vazios, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que verifique $\forall n \in \mathbb{N} \;\; F_{n+1} \subseteq F_n$, tem intersecção não vazia.