Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 Folha 7

CAPÍTULO II: Limites

86. Diga, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:
    (a) Toda a sucessão convergente é limitada.
    (b) Toda a sucessão limitada é convergente.
    (c) Toda a sucessão convergente é monótona.
    (d) Toda a sucessão de termos positivos que tende para 0 é monótona decrescente (a partir de certa ordem).
    (e) Para que uma sucessão seja limitada basta que possua uma subsucessão limitada.
    (f) Uma sucessão monótona é convergente se e só se possui uma subsucessão limitada.
    (g) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < 0$, então tem-se $u_n < 0$ a partir de uma certa ordem.
    (h) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq 0$, então tem-se $u_n \leq 0$ a partir de uma certa ordem.
    (i) Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente e se $u_n < 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < 0$.
    (j) Se uma sucessão convergente é soma de duas sucessões, então cada uma das sucessões parcelas também é convergente.

87. Verifique as igualdades do problema 85 utilizando álgebra dos limites.

88. Mostre, usando a definição, que:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-n^2) = -\infty$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+(-1)^n n) = +\infty$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+1)^n}{n} = +\infty$.

89. Indique, quanto à convergência, o comportamento da sucessão $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $a \in \mathbb{R}$.

90. Diga, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:
    (a) Toda a sucessão superiormente ilimitada tende para $+\infty$.
    (b) Toda a sucessão que tende para $+\infty$ é crescente (a partir de uma certa ordem).
    (c) Toda a sucessão monótona e não limitada inferiormente tende para $-\infty$.
    (d) Toda a sucessão crescente tende para $+\infty$.

91. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as subsucessões definidas por $u_n = x_{2n}$ e $v_n = x_{2n+3}$. Mostre que:
    (a) Se $a \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$, então também $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
    (b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$, então também $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

92. Estude a convergência das sucessões de termo geral

    (a) $u_n = \begin{cases} 1-\frac{4}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{n^2-3n-2}{n^2+n} & \text{se } n \text{ par;} \end{cases}$ (b) $u_n = \begin{cases} (-1)^n+\frac{2}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \cos((n-1)\pi) & \text{se } n \text{ par;} \end{cases}$

    (c) $u_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 3k,\ k\in\mathbb{N} \\ (-1)^n\frac{1}{n} & \text{se } n = 3k+1,\ k\in\mathbb{N} \\ (\frac{1}{\pi})^n & \text{se } n = 3k+2,\ k\in\mathbb{N}; \end{cases}$ (d) $u_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{\sin n}{n} & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$

93. Usando o Teorema das Sucessões Enquadradas, determine o limite das sucessões:

(a) $u_n = \dfrac{\cos^2(n)}{n+1},\ n \in \mathbb{N};$ (b) $u_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 7^n},\ n \in \mathbb{N};$

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^2},\ n \in \mathbb{N};$ (d) $u_n = \displaystyle\sum_{i=4}^{n+6} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+i}},\ n \in \mathbb{N}.$

94. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+1};$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + (-3n) + 1}{\sqrt{n^4+1}};$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1)} - n$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n-1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+5} - \sqrt{4n+1}}$ $(n \geq 3);$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2 - 3\sqrt{n+1} + n}{\sqrt{n^3} - n^2}$ $(n \geq 2);$ (f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(3n+19)}{\log n}$ $(n \geq 2);$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}};$ (h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3n}\right)^3;$

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} -n(16 + \cos(\log n));$ (j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(1 + \sin^2 n);$

(k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 \sin^2 \frac{1}{n};$ (l) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}.$

95. Indique sucessões (x_n) e (y_n) de números reais que tendam para $+\infty$ e tais que:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = +\infty;$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a$, sendo a um número real qualquer, previamente fixado;

(c) $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada mas não diverge para ∞.

96. Dê exemplos de sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que tendam para $+\infty$ e 0, respectivamente, e tais que:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$, sem ser $+\infty$ e $-\infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n y_n = a$, sendo a um número real qualquer, previamente dado;

(c) $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente mas limitada.

97. (a) Mostre que se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(b) Se $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, encontre os primeiros oito termos da sucessão (a_n).

(c) Use a alínea (a) para provar que (a_n) é convergente.

98. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e seja $c \in]0,1[$. Prove que

(a) Se para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem $0 < \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq c$ então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

*(b) Se para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$ então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. (Sugestão: provar que (x_n) satisfaz o Critério de Convergência de Cauchy).