Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 Folha 8

CAPÍTULO II: Limites

99. Foram investidos 1000 euros a uma taxa de juros de 6%, compostos anualmente.
    (a) Indique o valor v_n do investimento ao fim de n anos.
    (b) Verifique se a sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

100. Sejam a e b números positivos, com $a > b$. Denotemos por a_1 a sua média aritmética, e por b_1 a sua média geométrica; isto é,
$$a_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$
Iterando este processo, obtemos duas sucessões, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sendo, para todo o $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{e} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$
    (a) Use o Princípio da Indução Matemática para provar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$
    (b) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
    (A este limite Gauss chamou *média aritmética-geométrica* dos números a e b.)

101. Esboce o gráfico das funções seguintes e indique o seu domínio e o seu contradomínio.
    (a) $a(x) = 1 + |x|$ (b) $b(x) = |\sin x|$ (c) $c(x) = \sin|x|$
    (d) $d(x) = \begin{cases} |\log|x|| & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$ (e) $e(x) = \begin{cases} -x-5 & \text{se } x \geq 1 \\ -1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$
    (f) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq -1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < -1 \end{cases}$ (g) $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
    (h) $h(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa a *característica* de x, isto é, o maior inteiro menor ou igual a x.

102. Indique a expressão da função cujo gráfico é uma recta que passa nos pontos de coordenadas $(1,3)$ e $(3,4)$.

103. Sendo $f(x) = kx^2 + 5x + k$, determine k de modo que $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

104. Sendo $f(x) = kx^2 + 3x + 2k + 1$, determine k de modo que $\sqrt{f(x)+2}$ tenha domínio $\mathbb{R}$.

105. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c constantes reais. Analise a representação gráfica de f, consoante o valor dos parâmetros a, b e c.

106. Determine o domínio das seguintes funções:
    (a) $f(x) = \sqrt{x^2-3}$ (b) $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ (c) $h(x) = \sqrt{-2x} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$
    (d) $l(x) = \log\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ (e) $o(x) = e^{\sqrt{x+1}} - \sin x$ (f) $p(x) = \log(1 - \sqrt{x^2-1})$.

107. Sendo $f : A \to B$, identifique as propriedades descritas pelas condições:

(a) $(\forall x \in A\ \exists y \in B\ :\ f(x) = y)\ \wedge\ (\forall x_1, x_2 \in A\ x_1 = x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) = f(x_2))$.

(b) $(\forall x_1, x_2 \in A\ x_1 \neq x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2))\ \wedge\ (\forall y \in B\ \exists x \in A\ :\ f(x) = y)$.

(c) $(\forall x \in A)\ (-x \in A\ \wedge\ f(-x) = f(x))$.

(d) $(\forall x \in A)\ (-x \in A\ \wedge\ f(-x) = -f(x))$.

108. Verifique quais das seguintes funções são pares e quais são ímpares:

(a) $f(x) = \log \dfrac{2+x}{2-x}$; (b) $g(x) = \dfrac{2}{3}(e^x + e^{-x})$;

(c) $h(x) = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2}$; (d) $l(x) = \sin^2 x - \cos(x + \pi)$.

109. Diga quais dos seguintes conjuntos são gráficos de funções e, para esses casos, indique quais das funções são injectivas, pares ou ímpares.

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 = 4\}$; (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 \leq 3\ \wedge\ y = -\sqrt{3 - x^2}\}$;

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ xy = 1\}$; (d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ |x| + |y| = 1\}$;

(e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 4\}$; (f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 4\}$.

110. Determine em que casos a função é invertível e, quando o for, determine a sua inversa e faça a representação gráfica de ambas as funções.

(a) $f(x) = \sin x$; (b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$; (c) $h(x) = x|x|$;

(d) $i(x) = 3x^2 - 2$; (e) $j(x) = e^{x+1}$; (f) $l(x) = \log(x^3)$.

111. Considere as funções:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Indique o domínio e a expressão analítica das funções

(a) $h = f + g$, (b) $j = f \cdot g$, (c) $k = f/g$, (d) $l = g/f$, (e) $m = \sqrt{f}$.

112. Determine o domínio e a expressão analítica de $g \circ f$, sendo:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

(b) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \sqrt{2x + 3}$;

(c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = x^2 - 1$;

113. Demonstre, usando a definição, que:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{1}{2}(3x - 2) = 5$; (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$; (c) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$.