Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 Folha 9

CAPÍTULOS II e III: Limites e Continuidade

114. (a) Mostre que, se $\lim_{x\to a} f(x)$ existir e for L, então também existe $\lim_{x\to a} |f(x)|$ e é igual a $|L|$.
   (b) Dê exemplos que mostrem que $\lim_{x\to a} |f(x)|$ pode existir não existindo $\lim_{x\to a} f(x)$.
   (c) Mostre que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ se e só se $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.

115. Use o Teorema das Funções Enquadradas para provar que:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^4+4x^2+7}} = 0$;
   (b) $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$, se existir $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $0 \le f(x) \le c$;
   (c) Se f e g são funções com domínio $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ e f é limitada numa vizinhança de a, então $\lim_{x\to a} g(x)f(x) = 0$.

116. Demonstre, usando a definição, que:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x^2} = 1$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{7+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$;
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x^2-2) = +\infty$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (-x^2+4) = -\infty$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{2}{(x-4)^2} = +\infty$.

117. Mostre que não existem os seguintes limites:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{9-x^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sin x$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

118. Seja p um polinómio real de grau n, isto é, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Estude $\lim_{x\to +\infty} p(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} p(x)$.

119. Seja $a \in X'$. Dê exemplos de funções, f e g, definidas em X, para as quais não existam $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ mas existam $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ e $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$.

120. Determine, se possível, os seguintes limites:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2+x\sin\frac{1}{x}}{(x+3)^2}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3^x-2^x}{3^{x+1}+2^{x-3}}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+3})$;
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x^4-3}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-7x+6}{x^3-x}$;
   (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)^x$; (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

121. Sejam $a \in X'$ e f e g funções definidas em X. Mostre que, se existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e não existe $\lim_{x\to a} g(x)$, então não existe $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ mas pode existir $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$.

122. Estude a existência de limite, nos pontos indicados, das funções definidas por:
   (a) $\displaystyle f(x) = \frac{x+2+|x+2|}{x^2-4}$, $a=2$, $a=-2$; (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{7+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} & \text{se } x \ge 1 \\ \frac{-7+2\sqrt{1-x}}{4\sqrt{1-x}} & \text{se } x < 1 \end{cases}$, $a = 1$.

*123. Seja f uma função monótona em $]a,b[$. Mostre que $\{c \in \,]a,b[\; ; \; \lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)\}$ é um conjunto numerável.

124. Sejam $X = Y \cup Z \subseteq \mathbb{R}$, $a \in Y' \cap Z'$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Mostre que

$$\lim_{x\to a} f|_Y(x) = \lim_{x\to a} f|_Z(x) = L \text{ se e só se } \lim_{x\to a} f(x) = L.$$

125. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função de Dirichlet, que é definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$
Mostre que f não tem limite em nenhum ponto.

126. Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x \text{ racional} \\ \sin x & \text{se } x \text{ irracional.} \end{cases}$. Determine os pontos de acumulação de $[0, 2\pi]$, domínio de f, para os quais existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

127. Determine $k \in \mathbb{R}$ de forma a que a função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{kx-2} & \text{se} & x > 1 \\ 0 & \text{se} & x = 1 \\ \frac{1}{k^2x-4} & \text{se} & x < 1 \end{cases}$ tenha, em $a = 1$:

(a) uma descontinuidade removível;
(b) um pólo;
(c) uma descontinuidade essencial de 1ª espécie;
(d) uma descontinuidade essencial de 2ª espécie.

128. Estude a continuidade das funções seguintes, indicando, nos pontos de descontinuidade, o tipo de descontinuidade que ocorre:

(a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = [x]$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2+|x+2|}{x^2-4} & \text{se } x \neq 2 \text{ e } x \neq -2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{se } x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \, ; \, k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & \text{se } x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \, ; \, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{\log(\sin x)} & \text{se } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ (x-1)^2 - 2 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

129. Encontre uma bijecção $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todos os pontos.

130. Prove que a equação $x^3 - 9x^2 + 7 = 0$ tem três soluções, uma em cada um dos intervalos abertos $]-1, 0[$, $]0, 1[$ e $]6, 9[$. Melhore o resultado aproximando-as até às décimas.

131. Prove que existe um número real c tal que:

(a) $0 < c < \dfrac{\pi}{2}$ e $\sin c = 0,7$;

(b) $\dfrac{\pi}{2} < c < \pi$ e $\cos c = -\dfrac{3}{4}$;

(c) $c^3 = 2$;

(d) $c > 0$ e $c^2 = 3$.