Aula 11: Composições
Distribuir bolas iguais por caixas distintas

oazenhas

março 12, 2015

Composições

Definição Uma composição de $n > 0$ é uma maneira de exprimir n como uma soma ordenada de inteiros positivos. Ou seja, é uma partição ordenada do número n.
$n = 3$

$$1 + 1 + 1, \;\; 1 + 2, \;\; 2 + 1, \;\; 3$$

Uma composição de n com comprimento k é uma composição de n com k partes,

$$n = a_1 + \cdots + a_k, \; a_i > 0, \; i = 1, \ldots, k.$$

$1 + 1 + 1$ é uma composição de comprimento 3.

Definição Uma composição fraca é uma maneira de exprimir $n \geq 0$ como uma soma ordenada de inteiros não negativos.
$n = a_1 + \cdots + a_k, \; a_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, k$, é uma composição fraca de n de comprimento k.

- **Proposição** *Existem 2^{n-1} composições de n. Existem $\binom{n-1}{k-1}$ composições de n com comprimento k.*

  Prova Escreva $n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$, uma composição de n em n partes. Temos n, $1's$, e $n-1$, $+$'s. Qualquer outra composição de n resulta de selecionar algumas posições com, $+$'s, apagar esses " $+$ ", e, em seguida, agrupar, numa parte, os 1's consecutivos. O número de 1's agrupados constitui essa parte.

  Essa selecção de posições com " $+$ " é o mesmo que seleccionar um subconjunto de um conjunto de $n-1$ elementos. No total, podemos formar 2^{n-1} subconjuntos.

  Exemplo: $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ é uma composição de 6 com 6 partes. Apagando o primeiro e os dois últimos $'+'$, ficamos com $11 + 1 + 111$, ou seja, $2 + 1 + 3$. Apagando todos os " $+$ ", obtemos 111111, dando origem à partição de 6 apenas com uma parte, 6. Não selecionar nehum " $+$ ", ficamos com a partição de 6 em 6 partes.

  Uma composição com k partes (tem $k-1$, $+$'s), resulta de apagar $n-k$, $+$'s, em $n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$

  $n - 1 - x = k - 1, \ \ x = (n-1) - (k-1) = n - k$

  O número de maneiras de o fazer é igual a

$$\binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{n-1-(n-k)} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Composições fracas

- **Proposição** *Existem* $\binom{n+k-1}{k-1}$ *composições fracas de* n *com comprimento* k*.*

  Prova. Seja $n = a_1 + \cdots + a_k$ com $a_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$.

  $$n = a_1 + \cdots + a_k \Leftrightarrow n + k = (a_1 + 1) + \cdots + (a_k + 1)$$

  $$\Leftrightarrow n + k = b_1 + \cdots + b_k,\ b_i \geq 1,\ i = 1, \ldots, k$$

  Contar composições facas de n com comprimento k é o mesmo que contar composições de $n + k$ de comprimnto k.

  Quantas composições de $n + k$ de comprimento k existem?

  Pela proposição anterior existem

  $$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Contar soluções em inteiros não negativos de equações lineares diofantinas /distribuir bolas iguais por caixas distintas

- Número de solucões em inteiros não negativos da equação linear diofantina $x_1 + \cdots + x_k = n$ é igual ao número de composições fracas de comprimento k, e ainda é igual ao número de maneiras de distribuir n bolas iguais em k caixas distintas (podendo deixar caixas vazias), ou seja, $\binom{n+k-1}{k-1}$.

  As soluções em inteiros não negativos da equação linear diofantina $x_1 + \cdots + x_k = n$ são todas as composições fracas de n com comprimento k. As distribuições de n bolas iguais por k caixas distintas (podendo deixar caixas vazias) estão em correspondência, um a um, com as composições fracas de n com comprimento k.

- Número de solucões em inteiros positivos da equação $x_1 + \cdots + x_k = n$ é igual ao número de composições de comprimento k, e ainda é igual ao número de maneiras de colocar n bolas iguais em k caixas distintas *sem deixar caixas vazias*, ou seja $\binom{n-1}{k-1}$.

- O conjunto das sequências binárias de n uns e $k-1$ zeros, o conjunto das soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, e o conjunto das composições fracas de n com comprimento k, estão em bijecção entre si.
- $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é uma solução em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, se e só se $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, isto é, $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ é uma partição fraca de n em k partes.
- Consideremos a correspondência

$$\begin{array}{c} + \longleftrightarrow 0 \\ a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \longleftrightarrow \underbrace{11\cdots 1}_{a} \end{array}$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \to a_1 + \cdots + a_k = n \to \underbrace{\underbrace{11\cdots 1}_{a_1}0\underbrace{11\cdots 1}_{a_2}0\cdots 0\underbrace{11\cdots 1}_{a_k}}_{\text{palavra binária com } k-1 \text{ zeros e } n \text{ uns}}.$$

- $n = 8,\ k = 4$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$,

  $(3, 4, 0, 1) \longleftrightarrow 3 + 4 + 0 + 1 = 8 \longleftrightarrow 11101111001$

- *O número de soluções em inteiros não negativos da equação* $x_1 + \cdots + x_k = n$ *é*

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

igual ao número de composições fracas de comprimento k de n e, por sua vez, igual ao número de sequências binárias de n uns e $k-1$ zeros.

- *Existe uma bijecção entre as diferentes maneiras de colocar k bolas iguais em n caixas distintas e o conjunto das sequências binárias de k zeros e $n-1$ uns.*
- Utilizando $n-1$ separadores $|$ para separar as n caixas, podemos representar uma colocação de bolas do seguinte modo

$$\underbrace{k_1 \ bolas | k_2 \ bolas | \cdots | k_n \ bolas}_{k=k_1+\cdots+k_n \ bolas} \longrightarrow \underbrace{0\cdots0}_{k_1}1\underbrace{0\cdots0}_{k_2}1\cdots1\underbrace{0\cdots0}_{k_n}$$

  e produzir uma sequência binária de k zeros e $n-1$ uns.

$$\text{separador} \leftrightarrow 1$$

$$bola \leftrightarrow 0$$

- a sequência binária 000110 dá-nos uma maneira de colocar quatro bolas iguais em três caixas distintas: 3 bolas na primeira caixa, zero bolas na segunda e 1 bola na terceira.
- O número de maneiras de colocar k bolas iguais em n caixas distintas é $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

Combinações com repetição
Algumas perguntas com a mesma resposta

- Quantas
- sequências binárias existem de $k-1$ zeros e n uns?
- palavras existem com n N's e $(k-1)$ E's?
- sequências binárias existem com n 1's e $(k-1)$ $+$'s?
- soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ existem?
- maneiras existem de colocar n bolas iguais em k caixas distintas?
- maneiras existem de distribuir n laranjas por k crianças?
- maneiras existem de escolher n peças de fruta de k tipos diferentes?
- maneiras existem de escolher, com repetição permitida, n objectos de k objectos distinguíveis?

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

- Se seleccionarmos 3 peças de fruta, com repetição permitida, de laranjas, bananas, pêras e maças, podemos seleccionar 3 laranjas, ou 1 laranja, 1 banana, e 1 pêra, ou etc. No total

$$20 = \binom{3+4-1}{3}$$

- Número de maneiras de retirar 5 cartas de um baralho (52 cartas), repondo a carta após cada extração,

$$\binom{5+52-1}{5}$$