Aula 12: Multiconjuntos e função geradora de todos os multiconjuntos do conjunto $[n]$

oazenhas

março 16, 2015

Multiconjuntos

Definição de multiconjunto.

- Informalmente um multiconjunto é um "conjunto" com possíveis repetições de elementos. Isto é, no conjunto cada objecto pode ter várias cópias.

  Exemplo: Um conjunto de 4 laranjas l, l, l, l, 3 bananas b, b, b. Este multiconjunto tem cadinal 7,

  $$X = \{l, l, l, l, b, b, b\}$$

- Formalmente um multiconjunto M num conjunto finito $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ é um par (S, ν) onde $\nu : S \to \mathbb{Z}_0^+$ é uma função tal que $\sum_{i=1}^n \nu(s_i) = |M|$. Entendemos $\nu(s_i)$ como o número de repetições (cópias) de s_i.

  No exemplo anterior, X é um multiconjunto no conjunto $S = \{l, b\}$ onde $\nu : \{l, b\} \to \mathbb{Z}_0^+$ é definida por $\nu(l) = 4$ e $\nu(b) = 3$.

Multiconjuntos

- Quantos multiconjuntos de 3 elementos existem em $S = \{l, b\}$?

  Quantas maneiras existem de escolher 3 elementos em S podendo repetir à vontade?

  Quantas maneiras existem de escolher três objectos de dois tipos, podendo repetir à vontade?

  Quantas partições fracas de 3 de comprimento dois existem?

  Quantas soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 = 3$ existem?

$$\binom{3+2-1}{2-1}$$

$\{l, l, l\} \quad 3|0, \; \{l, l, b\} \quad 2|1, \; \{l, b, b\} \quad 1|2, \; \{b, b, b\} \quad 0|3$

Multiconjuntos

- Seja S um conjunto de n objectos distintos. Quantos multiconjuntos de k elementos podemos formar no conjunto S? Quantas maneiras existem de escolher k objectos de n tipos, podendo repetir?

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

Proposição. O número de multiconjuntos de cardinal k que podemos formar no conjunto $[n]$ é igual a

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Prova. Seja $S = [n]$ e A um multiconjunto formado em $[n]$, de cardinal k. Então, para cada $i = 1, \ldots, n$, existem $a_i \geq 0$ cópias de i em A tais que $a_1 + \cdots + a_n = k$. Quantas composições fracas de k com comprimento n existem? Tantas quantas as soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$,

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Conjuntos e Multiconjuntos

Sejam n e k inteiros não negativos.

- Recordemos

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &:= \#\text{ subconjuntos de } k \text{ elementos de um conjunto de } n \text{ elementos} \\ &= \#\text{ maneiras de escolher } k \text{ objectos distintos de } n \text{ objectos distintos} \end{aligned}$$

Introduzimos o número

- **Definição.**

$$\begin{aligned} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) &:= \#\text{ multiconjuntos de } k \text{ elementos que podemos formar num conjunto} \\ &\quad\ \text{de } n \text{ elementos} \\ &= \#\text{ maneiras de escolher } k \text{ objectos de } n \text{ tipos diferentes, podendo repetir} \end{aligned}$$

Então

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{k+n-1}{k}.$$

Exercício

- Quantas soluções em inteiros não negativos tem a inequação $x_1 + \cdots + x_n \leq k$?

O número de soluções em inteiros não negativos da inequação $x_1 + \cdots + x_n \leq k$ é igual ao número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = k$, o qual é precisamente

$$\binom{k+n}{k} = \binom{k+n}{n}.$$

- $(1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \cdots)$ função geradora dos multiconjuntos de $[1]$

O termo x_1^i nesta expressão indica que temos i cópias de 1 que constituem o multiconjunto $\{1, \ldots, 1\}$ de cardinal i.

- função geradora dos multiconjuntos de $[2]$

$(1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \cdots)(1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \cdots) = 1$ (multiconjunto de cardinal 0)
$+x_1 + x_2$ (multiconjuntos de cardinal 1)
$+x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$ (multiconjuntos de cardinal 2)
$+x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2^2 + x_1^2x_2$ (multiconjuntos de cardinal 3)
$+x_1x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1^4 + x_2^4$ (multiconjuntos de cardinal 4)
$+\cdots$
O termo $x_1^ix_2^j$ nesta expressão indica que temos i cópias de 1 e j cópias de 2 que constituem o multiconjunto $\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{j}\}$ de cardinal $i + j$.

$\left(\binom{2}{0}\right) = 1 \quad \left(\binom{2}{1}\right) = 2 \quad \left(\binom{2}{2}\right) = 3 \quad \left(\binom{2}{3}\right) = \binom{2+3-1}{2-1} = 4$

$\left(\binom{2}{4}\right) = \binom{2+4-1}{2-1} = 5$

- $x_1 = x_2 = x$

função geradora dos multiconjuntos de $[2]$ com respeito ao cardinal
$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$

$$\underbrace{(1+x_1^1+x_1^2+\cdots)(1+x_2^1+x_2^2+\cdots)\cdots(1+x_n^1+x_n^2+\cdots)}_{n} = \sum_{\nu:[n]\to\mathbb{N}_0} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\nu(i)}$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$

$$\sum_{\nu:[n]\to\mathbb{N}_0} x^{\nu(1)+\cdots+\nu(n)} = (1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$$

$$\sum_{\text{M multiconjunto de } [n]} x^{|M|} = (1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$$

$$\sum_{k\geq 0} \sum_{\substack{\text{M multiconjunto de } [n] \\ |M|=k}} x^k = (1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$$

Para cada $k \geq 0$,

$$\sum_{\substack{\text{M multiconjunto de } [n] \\ |M|=k}} x^k = \left(\binom{n}{k}\right) x^k$$

$$\sum_{k\geq 0} \left(\binom{n}{k}\right) x^k = (1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$$

Extensão dos coeficientes binomiais a $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

- Para k inteiro não negativo, consideremos o polinómio

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

As raízes deste polinómio são $0, 1, 2, \ldots, k-1$. Ou seja, $\binom{x}{k} = 0$ para $x = n$ inteiro não negativo tal que $0 \leq n < k$. Equivalentemente, $\binom{n}{k} = 0$ para $n < k$, como já tínhamos visto da definição enumerativa de $\binom{n}{k}$ onde n é inteiro não negativo.
Para $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), temos

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Em particular, se k e n inteiros não negativos

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n}{k!} \\
&= (-1)^k \binom{k+n-1}{k} = (-1)^k \left(\!\binom{n}{k}\!\right).
\end{aligned}$$

Obtemos a chamada reciprocidade combinatorial

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = (-1)^k \binom{-n}{k}.$$

Coeficiente multinomial

- **Definição:** Seja $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são inteiros não negativos.
  $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ é o número de maneiras de partir o conjunto $[n]$ numa lista ordenada de k subconjuntos A_1, $A_2, \ldots, A_k$ (partição ordenada de $[n]$) com cardinalidades a_1,a_2, $\ldots$, a_k, respectivamente, onde $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

  Este número é chamado coeficiente multinomial.

  Observação. No caso $k = 2$, temos o coeficiente binomial. O número de maneiras de partir o conjunto $[n]$ numa lista ordenada de dois conjuntos de cardinais a_1 e $a_2 = n - a_1$ é igual ao número de maneiras de seleccionar um subconjunto de cardinal a_1 $(n - a_1)$ em $[n]$,

$$\binom{n}{n - a_1, a_1} = \binom{n}{a_1, n - a_1} = \binom{n}{a_1} = \binom{n}{n - a_1}$$

Coeficiente multinomial

Proposição. Seja $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são inteiros não negativos. Então

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!}.$$

Prova. Vamos determinar o número de maneiras de partir $[n]$ numa lista ordenada de k conjuntos de cardinalidades $a_1, \ldots, a_k$. Podemos começar por escolher a_1 elementos de entre os elemento de $[n]$. Existem $\binom{n}{a_1}$ possibilidades. A seguir escolhemos a_2 elementos dos restantes $n - a_1$ elementos. Existem $\binom{n-a_1}{a_2}$ possibilidades, etc. Pelo princípio do produto generalizado obtém-se

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} =$$

$$= \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\binom{n-a_1-a_2}{a_3}\cdots\binom{n-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!},$$

possibilidades de partir $[n]$ numa lista de k subconjuntos de cardinalidades a_1,a_2, $\ldots, a_k$ respectivamente.

Simetrias do coeficiente multinomial

Se $b_1, b_2, \ldots, b_k$ é um rearranjo de $a_1, a_2, \ldots, a_k$, então

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \binom{n}{b_1, b_2, \ldots, b_k}$$

Note-se que $a_1! \cdots a_k! = b_1! \cdots b_k!$ e então $\frac{n!}{a_1! \cdots a_k!} = \frac{n!}{b_1! \cdots b_k!}$.