Aula 14: Princípio da inclusão-exclusão

oazenhas

Abril 7, 2015

Princípio da inclusão-exclusão

Recorde o exercício 37.

- Quantos números existem com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ e que contêm o algarismo 5?

  `Respondemos anteriormente a esta pergunta usando o princípio da soma o qual exige que decomponhamos o conjunto dos objectos que queremos enumerar em subconjuntos dois a dois disjuntos.`

  $9^3 + 8.9^2 + 8^2.9 + 8^3$

  `Em alternativa podemos responder à seguinte pergunta que é mais simples.`

- Quantos números existem com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ sem o algarismo 5 ?

Princípio da inclusão-exclusão

- Quantos números existem com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ sem o algarismo 5 ?

  X: conjunto de todos os números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

  A: conjunto de todos os números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ sem o algarismo 5$=$ conjunto de todos os números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{5\}$.

  $X \setminus A$: conjunto de todos os números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ e que contêm o algarismo 5.

$$|X \setminus A| = |X| - |A| = 9^4 - 8^4 = 9^3 + 8.9^2 + 8^2.9 + 8^3$$

Princípio da inclusão-exclusão

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de um conjunto X. Então o número de elementos no universo X que não estão em nenhum dos suconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, é

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| -$$

$$- \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| + \cdots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots +$$

$$+ (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

- O número de elementos em um ou mais dos conjuntos A_1, $A_2, \ldots, A_n$, é

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \cdots +$$

$$+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

- *Quantas funções sobrejectivas existem de um conjunto R com r elementos para um conjunto N com n elementos?*

  `Já respondemos a esta pergunta usando os números de Stirling de segunda espécie:`

  \# partições ordenadas de R em n partes não vazias $= n!S_{r,n}$.

  Seja $N = \{1, \ldots, n\}$. Queremos enumerar o conjunto

  $$\{f : R \to N; 1, \ldots, n \in f(R)\} = \{f : R \to N;\ N = f(R)\}.$$

- *Quantas funções há de R para N cuja imagem contém todos os elementos de N?*
- *Quantas funções há de R para N cuja imagem não contém todos os elementos de N?*

  $$A_i = \{f : R \to N; i \notin f(R)\} = \{f : R \to N \setminus \{i\}\} \quad i = 1, \ldots, n$$

  $$X = \{f : R \to N\}, \quad |X| = n^r$$

  $$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{f : R \to N; 1, \ldots, n \in f(R)\} = \{f : R \to N;\ N = f(R)\}$$

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = n^r - \sum_{k=1}^{n} |A_i| + \cdots$$

$$|A_i| = |\{f : R \to N \setminus \{i\}\}| = (n-1)^r$$

$$\sum_{k=1}^{n} |A_i| = n(n-1)^r$$

$$|A_i \cap A_j| = |\{f : R \to N \setminus \{i,j\}\}| = (n-2)^r$$

$$\sum_{\{i,j\} \subseteq [n]} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2}(n-2)^r$$

$$\vdots$$

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = |\{f : R \to N \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}\}| = (n-k)^r$$

$$\sum_{\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [n]} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k}(n-k)^r.$$

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| =$$

$$= n^r - n(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r - \binom{n}{3}(n-3)^r + \cdots$$

$$+(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^r + \cdots + \binom{n}{n}(n-n)^r.$$

$$= \binom{n}{0} n^r - \binom{n}{1}(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r - \binom{n}{3}(n-3)^r + \cdots$$

$$+(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^r + \cdots + \binom{n}{n}(n-n)^r$$

#funções sobrejectivas de R para $N = |X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r =$

transformação de índices $k \to n-k$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^r.$$

Uma fórmula para os números de Stirling de segunda espécie

$$S_{r,n} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^r.$$

- Quantas palavras há de 10 letras que contêm todas as cinco vogais?
- Quantas palavras há de 10 letras que não contêm todas as cinco vogais? (Use o alfabeto com 26 letras.)
- $S_a = \{$palavras de 10 letras sem a vogal $a\}$
  $S_e = \{$palavras de 10 letras sem a vogal $e\}$
  $S_i = \{$palavras de 10 letras sem a vogal $i\}$
  $S_o = \{$palavras de 10 letras sem a vogal $o\}$
  $S_u = \{$palavras de 10 letras sem a vogal $u\}$
- $$|S_a \cup S_e \cup S_i \cup S_o \cup S_u| = (|S_a| + |S_e| + |S_i| + |S_o| + |S_u|)$$
  $$- \sum_{\{f,j\} \subseteq \{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j|$$
  $$+ \sum_{\{f,j,k\} \subseteq \{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j \cap S_k|$$
  $$- \sum_{\{f,j,k,l\} \subseteq \{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j \cap S_k \cap S_l|$$
  $$+ |S_a \cap S_e \cap S_i \cap S_o \cap S_u|$$

Princípio da inclusão-exclusão

- $$\sum_{\{f\}\subseteq\{a,e,i,o,u\}} |S_f| = \binom{5}{1}.25^{10}$$

  $$\sum_{\{f,j\}\subseteq\{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j| = \binom{5}{2}.24^{10}$$

  $$\sum_{\{f,j,k\}\subseteq\{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j \cap S_k| = \binom{5}{3}.23^{10}$$

  $$\sum_{\{f,j,k,l\}\subseteq\{a,e,i,o,u\}} |S_f \cap S_j \cap S_k \cap S_l| = \binom{5}{4}.22^{10}$$

  $$|S_a \cap S_e \cap S_i \cap S_o \cap S_u| = \binom{5}{5}.21^{10}$$

  Número de palavras com dez letras, num alfabeto com 26 letras, que não contêm uma ou mais vogais: $|S_a \cup S_e \cup S_i \cup S_o \cup S_u| =$

  $$= \binom{5}{1}.25^{10} - \binom{5}{2}.24^{10} + \binom{5}{3}.23^{10} - \binom{5}{4}.22^{10} + \binom{5}{5}.21^{10} =$$

  $$\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k+1}\binom{5}{k}(26-k)^{10}.$$

Bibliografia

- Martin Aigner, A course in Enumeration, Springer, 2010.
- Keneth Bogart, Combinatorics Through Guided Discovery.
- Miklós Bóna, A Walk through Combinatorics, World Scientific, 2002.
- Richard Brualdi, Introductory Combinatorics, Pearson/Prentice Hall, 2010.
- Domingos M. Cardoso, Jerzy Szymanski, Mohammad Rostami, Matemática Discreta, Combinatória, Teoria dos grafos, Algoritmos, Escolar Editora, 2009.
- George E. Martin, Counting: The Art of Enumertive Combinatorics, Springer, 2001.
- J. M. Simões Pereira, Matemática Discreta: Tópicos de Combinatória. Editora Luz da Vida. 2006.