Aula 18: Partições com restrições

oazenhas

Abril 14, 2015,

Partições com a parte maior prescrita

O número de partições de r em que a parte maior é k é igual ao número de partições de r em k partes, $p(r,k)$.

$$p(r,k) = \#\text{ partições de } r \text{ em que a maior parte é } k$$

O número de partições de r onde cada parte é $\leq k$ é igual ao número de partições de r em k ou menos partes.

$$p(r,\leq k) = \#\text{partições de } r \text{ em partes de tamanho} \leq k$$

- $p(r,r-1)$ é igual ao número de partições de r onde a parte maior é $r-1$. As partições de r onde a parte maior é $r-1$ consiste apenas da partição de r com uma parte igual a 1 e a outra igual a $r-1$,

$$p(r,r-1) = p(r,r) = p(r,1) = 1.$$

- $p(r,r-2)$ é igual ao número de partições de r onde a parte maior é $r-2$. As partições de r onde a parte maior é $r-2$: se $r \geq 4$, consiste da partição de r com uma parte igual a $r-2$ e a outra igual a 2, ou as outras duas iguais a 1; se $r=3$, consiste da partição de 3 com todas as partes iguais a 1.

$$p(r,r-2) = \begin{cases} 2 & \text{, se } r \geq 4 \\ 1 & \text{, se } r = 3. \end{cases}$$

Partições com restrição

- $p(r, r-3)$ é igual ao número de partições de r onde a maior parte é $r-3$. As partições de r onde a maior parte é $r-3$: se $r \geq 6$, consiste da partição de r com uma parte igual a $r-3$ e a outra igual a 3, ou as outras duas iguais a 2 e a 1, ou as outras três iguais a 1.

$$p(r, r-3) = \begin{cases} 3 & , \text{se } r \geq 6 \\ 2 & , \text{se } r = 5 \\ 1 & , \text{se } r = 4 \end{cases}$$

  Nota: $p(r, r-4) \neq 4$ para $r = 8$. Tem-se $p(8,4) = 5$.

- Partições com duas partes

$$p(n,2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \text{se } n \text{ par} \\ \frac{n-1}{2} & , \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

  partições de n em duas partes

$$1 + (n-1), \quad 2 + (n-2), \ldots, \frac{n}{2} + \frac{n}{2}, \quad \text{se } n \text{ par}$$

$$1 + (n-1), \quad 2 + (n-2), \ldots, \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 1, \quad \text{se } n \text{ ímpar}$$

- $p(n, \leq 2) = p(n,2) + p(n,1) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$

- Número de composições fracas de r de comprimento k é igual ao número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + \cdots + x_k = r$, dado por $\binom{r+k-1}{r}$.
- Número de composições de r de comprimento k é igual ao número de soluções em inteiros positivos da equação $x_1 + \cdots + x_k = r$, dado por $\binom{r-1}{r-k}$.
- Número de partições de r, $p(r)$, é o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + rx_r = r$.