Aula 7: Função geradora de $2^{[n]}$
Binómio de Newton/ Teorema binomial
Identidades binomiais

2015

Função geradora de $2^{\{1,2\}}$

- Notação: dado o inteiro positivo $n \geq 1$ escrevemos $[n] := \{1, \ldots, n\}$.
- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. Consideremos o polinómio constante 1.
- $2^{[1]} = \{\emptyset, \{1\}\}$. Consideremos a variável x_1 e o polinómio $1 + x_1$.
- $2^{[2]} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

  Sejam x_1, x_2 duas variáveis independentes,

  $$(1 + x_1)(1 + x_2) = (1 + x_1) + (1 + x_1)x_2 = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2$$

  $$\prod_{i \in \emptyset} x_i = 1 \quad \prod_{i \in \{j\}} x_i = x_j,\ j = 1, 2, \quad \prod_{i \in \{1,2\}} x_i = x_1x_2$$

- $$(1 + x_1)(1 + x_2) = \prod_{i \in \emptyset} x_i + \prod_{i \in \{1\}} x_i + \prod_{i \in \{2\}} x_i + \prod_{i \in \{1,2\}} x_i = \sum_{A \subseteq [2]} \prod_{i \in A} x_i$$

Função geradora de $2^{\{1,2,3\}}$

- $2^{[3]} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3,\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- Sejam x_1, x_2, x_3 variáveis independentes

$$
\begin{aligned}
(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) &= (1+x_1)(1+x_2) + (1+x_1)(1+x_2)x_3 \\
&= 1 + x_1 + x_2 + x_3 \\
&\quad + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\
&\quad + x_1x_2x_3 \\
&= \sum_{A \subseteq [3]} \prod_{i \in A} x_i
\end{aligned}
$$

- Consideremos $2^{[n]} = \{\text{todos os subconjuntos de [n]}\}$, $n \geq 0$.
  - A função geradora de n variáveis para os subconjuntos de $[n]$ é

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n).$$

Pois

$$\begin{aligned}
& (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) = \\
= \; & \underbrace{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{n-1})} + (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{n-1})x_n \\
= \; & \sum_{A\subseteq[n-1]}\prod_{i\in A} x_i + \sum_{A\subseteq[n-1]}\prod_{i\in A\cup\{n\}} x_i \\
= \; & \sum_{A\subseteq[n]}\prod_{i\in A} x_i
\end{aligned}$$

  - Façamos $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$

$$\prod_{i\in A} x_i = x^{|A|} \quad e \quad (1+x)^n = \sum_{A\subseteq[n]} x^{|A|}$$

- $$(1+x)^n = \sum_{A\subseteq[n]} x^{|A|}.$$

- No segundo membro desta igualdade, agrupemos as parcelas da soma, segundo o cardinal de A,

$$\sum_{A\subseteq[n]} x^{|A|} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A\subseteq[n]\\ |A|=k}} x^{|A|}$$

- Quantos subconjuntos de $[n]$ existem com cardinal k? Quantas vezes é que o termo x^k aparece na soma $\sum_{A\subseteq[n]} x^{|A|}$?

$$\sum_{\substack{A\subseteq[n]\\ |A|=k}} x^{|A|} = \binom{n}{k} x^{|A|} = \binom{n}{k} x^k$$

Função geradora de $2^{[n]}$ com respeito ao cardinal (peso), teorema binomial e coeficientes binomiais

- A função geradora de $2^{[n]}$ com respeito ao cardinal (peso) é

$$(1+x)^n.$$

Pois,

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{A\subseteq[n]} x^{|A|} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A\subseteq[n] \\ |A|=k}} x^{|A|} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\end{aligned}$$

Algumas identidades binonmiais e o rectângulo de Pascal

- **Teorema binomial** Para todo o $n \geq 0$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

  - Várias identidades são consequência desta expansão

- *Soma da linha n do rectângulo de Pascal*. Para todo o $n \geq 0$,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

  $x = 1$

- *Soma alternada da linha n do rectângulo de Pascal*. Para todo o $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

  $x = -1$

Soma alternada dos coeficientes binomiais de uma linha do rectângulo de Pascal

- Para todo o $n \geq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$
Ou seja,
$$\sum_{\substack{k \text{ par} \\ 0 \leq k \leq n}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k \text{ ímpar} \\ 0 \leq k \leq n}} \binom{n}{k}.$$
- Concluímos que o número de subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ que têm um número ímpar de elementos é igual ao número de subconjuntos que têm um número par de elementos. Seja esse número s, então
$$2s = 2^n, \quad e \quad s = 2^{n-1}.$$

- Para todo o $n > 0$, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.
- Derivando ambos os membros em ordem a x e fazendo em seguida $x = 1$, tem-se
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n.2^{n-1}, \quad n > 0.$$
- Derivando $k \geq 0$ vezes ambos os membros em ordem a x, e fazendo em seguida $x = 0$,tem-se
$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx}\left((1+x)^n\right)_{\big|x=0} &= \\ = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}{}_{\big|x=0} & \\ = n(n-1)\cdots(n-k+1) & \\ = \frac{d^k}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)_{\big|x=0} &= k!\binom{n}{k}. \end{aligned}$$

  Logo,
$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = k!\binom{n}{k} \quad e \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Combinações simples

- Quantas
- maneiras existem de seleccionar r objectos distinguíveis de n objectos distinguíveis?
- sequências binárias de comprimento n existem com r 1's e $(n-r)$ 0's?

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

O número destas sequências binárias de comprimento n é igual ao número de escolhas de r posições (distinguíveis) para os r dígitos 1 (equivalentemente $n-r$ posições para os $n-r$ dígitos 0) de entre as n (distinguíveis) posições.

Pelo exercício 42, existe uma bijecção entre os subconjuntos de $[n]$ eas palavras binárias de comprimento n tal que a cada $A \subseteq [n]$ com $|A| = r$ corresponde uma palava binária de comprimento n com r entradas iguais a 1. Logo, pelo princípio da bijeção a resposta'ás duas perguntas é a mesma $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

- **Teorema** Para todo o $n \geq 0$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

  Prova. Consideremos o produto dos n factores

  $$\underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n}.$$

  Quando calculamos a expansão do produto, escolhemos em cada um dos n factores um x ou um y. Registando cada escolha de x com 1, e cada escolha de y com 0, formamos uma palavra binária de comprimento n: quando escolhermos x no j-ésimo factor do produto, 1 é a j-ésima letra da palavra, e quando escolhemos y a j-ésima letra será 0. Temos então uma bijecção entre as ocorrências dos monómios na expansão do produto e as palavras binárias de comprimento n. Como num monómio as variáveis comutam, obtemos monómios em x e y de grau n, $x^k y^{n-k}$, que correspondem à escolha de k termos com x e $n-k$ termos com y, $0 \leq k \leq n$. O coeficiente de $x^k y^{n-k}$ é então igual ao número de palavras binárias de comprimento n com k $1'$s e $n-k$ $0'$s. Ou seja, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

- **Proposição.** Para todo $r \geq 0$, $s \geq 0$ e $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Prova No exercício 64 demonstrámos esta igualdade apresentando um argumento combinatório de contar de duas maneiras. Faremos agora uma demostração baseada no teorema binomial. Consideremos a igualdade $(1+x)^r(1+y)^s = (1+x)^{r+s}$. Usando o teorema binomal, tem-se

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} x^i\right) \left(\sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} x^j\right) &= (1+x)^r(1+x)^s \\
&= (1+x)^{r+s} \\
&= \sum_{n=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n
\end{aligned}$$

- Qual é o coeficiente de x^n em $\left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} x^i\right) \left(\sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} x^j\right)$?

- $$\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}x^j\right)=\sum_{n=0}^{r+s}\binom{r+s}{n}x^n$$

- para cada $n = 0, 1, 2, \ldots, r+s$, temos

$$\binom{r}{k}x^k\binom{s}{n-k}x^{n-k}=\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}x^n,\ 0 \le k \le n$$

Somando todos os termos em x^n, obtém-se

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}\right]x^n$$

- Como consequência da multiplicação de dois polinómios resulta que,

$$\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}x^j\right)=\sum_{n=0}^{r+s}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}\right]x^n$$

- Dois polinómios são iguais se e só se os coeficientes dos termos do mesmo grau são iguais. Da igualdade

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}x^j\right) &= \sum_{n=0}^{r+s}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}\right]x^n \\ &= \sum_{n=0}^{r+s}\binom{r+s}{n}x^n\end{aligned}$$

resulta a chamada *identidade de Vandermonde*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n},$$

para todo $r \geq 0$, $s \geq 0$ e $0 \leq n \leq r+s$. Para $n > r+s$ a igualdade também é válida porque neste caso ambos os lados da igualdade são iguais a zero, por definição de coeficiente binomial.