Aula 16: Bolas iguais em caixas iguais
Partições de um número

oazenhas

Abril 9, 2015

Bolas iguais em caixas iguais

- *De quantas maneiras podem ser colocadas r bolas iguais em n caixas iguais podendo deixar caixas vazias? E sem caixas vazias?*

  Quando distribuimos bolas iguais por caixas iguais a única coisa que interessa é o número delas por caixa.

  Estamos então interessados em determinar o número de maneiras de escrever um inteiro positivo r como soma de inteiros positivos, onde a ordem das parcelas não interessa.

  Não distinguimos $4 = 1 + 3$ de $4 = 3 + 1$. Contam uma única maneira de escrever 4 como soma de dois inteiros positivos, neste caso, 3 e 1.

  Partições de r:

  $r = 1 : \quad 1$

  $r = 2 : \quad 2,\ 1 + 1$

  $r = 3 : \quad 3,\ 2 + 1,\ 1 + 1 + 1$

  $r = 4 : \quad 4,\ 3 + 1,\ 2 + 2,\ 2 + 1 + 1,\ 1 + 1 + 1 + 1$

Partições de um número

- $$r = 5: \quad 5,\ 4{+}1,\ 3{+}2,\ 3{+}1{+}1,\ 2{+}2{+}1,\ 2{+}1{+}1{+}1,\ 1{+}1{+}1{+}1{+}1$$

$$r = 7: \quad 7,\ 6{+}1,\ 5{+}2,\ 4{+}3, 5{+}1{+}1,\ 4{+}2{+}1,\ 3{+}2{+}2,\ 3{+}3{+}1,$$

$$4+1+1+1,\ 3+2+1+1,\ 2+2+2+1,$$

$$2{+}2{+}1{+}1{+}1,\ 3{+}1{+}1{+}1{+}1,\ 2{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1,\ 1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1$$

Partições de números

- **Definição.** *Uma partição do número r é uma maneira de escrever r como uma soma de inteiros positivos onde a ordem das parcelas não interessa.*

  Como a ordem das parcelas não interessa, ao contrário das composições de r, uma partição do número r pode também ser definida do modo que se segue, onde uma certa ordem é preferida:

  Sejam $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 1$ inteiros positivos tais que $a_1 + \cdots + a_n = r$. A sequência $(a_1, \ldots, a_n)$ é chamada uma partição de de r. O número de todas as partições de r é denotado por $p(r)$. O número de partições de r em exactamente n partes é denotado por $p(r, n)$.

  $p(1) = 1$, (1)

  $p(2) = 2$, (2), $(1, 1)$

  $p(3) = 3$, (3), $(2, 1)$, $(1, 1, 1)$

  $p(4) = 5$, (4) $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$

  $p(5) = 7$, (5) $(4, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$

  $p(7) = 15$

  $p(5, 1) = 1$, $p(5, 2) = 2$, $p(5, 3) = 2$, $p(5, 4) = 1$, $p(5, 5) = 1$

Partições de números

- **Proposição** *O número de maneiras de colocar r bolas iguais em n caixas iguais, sem caixas vazias, é $p(r, n)$.*

  Prova Distribuir r bolas iguais em n caixas iguais, sem caixas vazias, é o mesmo que escrever r como a soma de n números positivos onde a ordem das parcelas não interessa.
- Como $p(r, i)$ é o número de maneiras de escrever r como a soma de i parcelas positivas, onde a ordem não interessa. O número total de partições de r é $p(r) = \sum_{i=1}^{r} p(r, i)$.
- $p(r)$ é também o número de maneiras de colocar r bolas iguais em r caixas iguais, podendo deixar caixas vazias.

Partições de números

Proposição *O número de maneiras de colocar r bolas iguais em n caixas iguais, podendo deixar caixas vazias, é $p(r+n,n)$. Além disso,*

$$p(r+n,n)=\sum_{i=1}^{n} p(r,i).$$

Prova. Pedimos emprestado n bolas iguais e pomos 1 bola em cada caixa. Obtemos n caixas não vazias todas iguais. Em seguida distribuimos as r bolas iguais como nos apetecer. O número de maneiras de colocar $n+r$ bolas iguais pelas n caixas iguais, sem caixas vazias, é $p(r+n,n)$, e é equivalente ao procedimento anterior. Por outro lado, se em cada uma destas distribuições retirarmos uma bola de cada uma das n caixas para devolvermos as n bolas emprestadas, obtemos uma distribuição de r bolas iguais por n caixas iguais podendo haver caixas vazias.

- Sejam r e n inteiros positivos. Então $p(r, n) = 0$ se $n > r$, $p(r, r) = p(r, 1) = 1$ e

$$p(r, n) = \sum_{k=1}^{n} p(r - n, k), \quad r > n > 1.$$

Prova. Sabemos que $p(r, n)$ é o número de maneiras de distribuir r bolas iguais por n caixas iguais sem deixar nenhuma vazia. Como $r > n$ e não podem ficar caixas vazias, distribuimos n bolas, uma por cada uma das n caixas, e sobram $r - n$ bolas para serem distribuídas ou por 1 caixa de $p(r - n, 1) = 1$ maneiras, ou por 2 caixas não deixando caixas vazias, de $p(r - n, 2)$ maneiras, ou por 3 caixas não deixando caixas vazias, de $p(r - n, 3)$ maneiras, ..., ou por n caixas sem deixar caixas vazias, de $p(r - n, n)$ maneiras.

- Sejam n e r inteiros positivos. Então $p(r, n) = 0$ se $n > r$, $p(r, r) = p(r, 1) = 1$ e

$$p(r, n) = p(r-1, n-1) + p(r-n, n), \quad \text{se } r > n > 1.$$

- **Prova** Recordemos que $p(r, n)$ é o número de maneiras de colocar r bolas em n caixas sem caixas vazias. Temos dois casos a considerar.

  Existe uma caixa com exactamente uma bola, havendo $r-1$ bolas iguais para serem distribuidas por $n-1$ caixas de tal modo que não fiquem caixas vazias. Temos $p(r-1, n-1)$ maneiras de o fazer.

  Não existe nenhuma caixa com exactamente uma bola, ou seja, não havendo caixas vazias, cada caixa tem pelo menos duas bolas, o que significa que $r \geq 2n$. Podemos retirar n bolas e guarda-las à parte, em seguida distribuir as restantes $r-n$ bolas pelas n caixas de modo a não ficar nenhuma vazia, havendo $p(r-n, n)$ maneiras de o fazer, e por fim colocar as n bolas guardadas, uma por cada caixa.

$$p(6, 3) = p(5, 2) + p(3, 3) = 2 + 1$$

Problema: Se uma matriz A, 5×5, tem o valor próprio λ repetido com multiplicidade 5, quantas possibilidades tem para a forma normal de Jordan de A? Quais são os possíveis tamanhos dos blocos?

$$p(5) = 7$$

$$(5);\ (4,1),\ (3,2),\ (3,1,1),\ (2,2,1),\ (2,1,1,1),\ (1,1,1,1,1)$$

Problema: Se uma matriz A, 5×5, tem os valores próprios λ, repetido com multiplicidade 4, e β com multiplicidade 1, quantas possibilidades tem para a forma normal de Jordan de A? Quais são os possíveis tamanhos dos blocos?

$$p(4) = 5$$

$$(4,1),\ (3,1,1),\ (2,2,1),\ (2,1,1,1),\ (1,1,1,1,1)$$