Aula 21:Aspectos enumerativos do grupo simétrico: Permutações, ciclos e números de Stirling de primeira espécie

oazenhas

Abril 22, 2015

Quantos ciclos de comprimento n podemos formar no conjunto $[n]$?
Quantas permutações de n elementos existem com exactamente 1 ciclo?

$$(n-1)!$$

Quantas permutações de n elementos existem com exactamente k ciclos?

Definição. *$c_{n,k}$ denota o número de permutações de n elementos com precisamente k ciclos na sua decomposição cíclica.*

Alguns valores: $c_{n,k} = 0$, $k > n$, $c(n,0) = 0$, $c(n,n) = 1$, $c(n,1) = (n-1)!$, $c_{n,n-1} = \binom{n}{2}$.

Exemplo

$$c_{n,n-2} = 2\binom{n}{3} + 1/2\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$$

Existem duas maneiras de ter uma permutação de n elentos con $n-2$ ciclos. Pode ter um ciclo de comprimento 3 e $n-3$ pontos fixos, ou pode ter dois ciclos de comprimento dois e $n-4$ pontos fixos. No primeiro caso, para cada escolha de três elementos temos dois ciclos distintos o que dá $2\binom{n}{3}$ permutações distintas. No segundo caso, para cada escolha de dois elementos, de entre n elementos, para formar um ciclo de comprimento dois, escolhemos ainda dois dos restantes $n-2$ elementos para formar o outro ciclo de comprimento dois. Temos no total $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$ pares de ciclos de comprimento dois. Como os ciclos comutam a ordem dos dois ciclos não interessa e temos que dividir por 2!, o que dá $1/2\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$ permutações distintas. No total dá $2\binom{n}{3} + 1/2\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$ permutações de n elementos.

- Classificando as permutações de acordo com seu número de ciclos, como o número de ciclos de uma permutação de n elementos varia entre 1 e n, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = n!$$

- *Relação de recorrência*

$$c_{n,k} = c_{n-1,k-1} + (n-1)c_{n-1,k}, \quad n > 1.$$

- *Relação de recorrência*

$$c_{n,k} = c_{n-1,k-1} + (n-1)c_{n-1,k}, \quad n > 1.$$

O lado esquerdo desta igualdade conta o número de permutações de n elementos com k ciclos. Vamos ver que o lado esquerdo também. Consideremos uma dessas permutações com k ciclos. Então nessa permutação ou n forma um ciclo por si próprio (n) ou não.

No primeiro caso, os restantes $n-1$ elementos formam $k-1$ ciclos e $c_{n-1,k-1}$ conta precisamente essas permutações.

No segundo caso, n pertence a um ciclo de comprimento pelo menos dois e, portanto, os restantes $n-1$ elementos formam k ciclos onde se acrescenta n de alguma maneira. Esses k ciclos podem ser formados de $c_{n-1,k}$ maneiras.

Em cada um dessas maneiras, o elemento n pode ser acrescentado à frente de cada um dos $n-1$ elementos que constituem esses k ciclos. Isto multiplica o número de possibilidades por $n-1$ o que explica a segunda parcela do lado direito da igualdade.

$n=6,\ k=2 \quad (24)(351); \quad (264)(351) \quad (246)(351) \quad (24)(3651)$

$$(24)(3561) \quad (24)(3516) = (24)(6351)$$

Tipo de uma permutação

- Uma permutação σ de $\mathfrak{S}_n$ diz-se do tipo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $1.a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + \cdots + n.a_n = n$, se tem a_i ciclos de comprimento i, para $i = 1, \ldots, n$.
- $n = 9$

  $\sigma = (35146)(879)(2)$ é do tipo $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$,

  $\sigma = (351468)(7)(9)(2)$ é do tipo $(3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$,

  $\sigma = (351468792)$ é do tipo $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$,

  $id = (3)(5)(1)(4)(6)(8)(7)(9)(2)$ é do tipo $(9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
- Quando a permutação de $\mathfrak{S}_n$ só é constuituída por ciclos de comprimento 1 é do tipo $(n, 0, \ldots, 0)$ e temos a permutação identidade.
- Uma permutação de $\mathfrak{S}_n$ do tipo $(0, \ldots, 0, 1)$ é um ciclo de comprimento n.

Fórmula para o número de permutações de um dado tipo

Quantas permutações de n elementos do tipo $(0, 0, \ldots, 0, 1)$, isto é, que constituem um ciclo de comprimento n, existem?

$$(n-1)!$$

Proposição O número de permutações de n elementos do tipo

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, isto é, com a_1 ciclos de comprimento 1, a_2 ciclos de comprimento 2, $\ldots$, a_n ciclos de comprimento n, é

$$\frac{n!}{a_1! 1^{a_1} a_2! 2^{a_2} \ldots a_n! n^{a_n}}.$$

Contar permutações de um tipo dado

- Escrevamos os números de 1 até n numa linha por uma odem qualquer, em seguida, indo da esquerda para a direita inserimos pares de parenteses de acordo com o tamanho requerido dos ciclos: primeiro a_1 pares de parenteses para criar a_1 ciclos de comprimento 1; depois a_2 pares de parenteses para criar a_2 ciclos de comprimento 2, etc. Deste modo obtemos uma permutação do tipo requerido em que os comprimentos dos ciclos são crescentes da esquerda para a direita.

  Existem $n!$ maneiras de fazer isto – o número de maneiras de escrever os números de 1 até n numa linha, e existe uma só maneira de inserir os parenteses de modo a obter a sucessão de comprimentos descrita.

  Contudo existem diversas maneiras de escrever os n inteiros que conduzem à mesma permutação depois de inseridos os partenteses.

  Quantas?

$$n = 9, \quad (2, 2, 1, 0, 0, 0) \quad 342615798$$

$$(3)(4)(26)(15)(789) = (4)(3)(62)(15)(897)$$

Contar permutações de um tipo dado

- Contudo existem diversas maneiras de escrever os n inteiros que conduzem a mesma permutação depois de inseridos os parenteses.

  Quantas?

  Os elementos de um mesmo ciclo de comprimento i podem ser ordenados de i diferentes maneiras e ainda conduzem ao mesmo ciclo. Como existem a_i ciclos de comprimento i, toda a permutação pode ser obtida de pelo menos

$$\prod_{i=1}^{n} i^{a_i}$$

  maneiras.

Contar permutações de um tipo dado

- Além disso, se existem duas maneiras de escrever os n inteiros que resultam em permutações de n inteiros que têm exactamente os mesmos ciclos de comprimento i, e apenas diferem entre si na ordem por que estes ocorrem, então novamente elas conduzem à mesma permutação. Os a_i ciclos podem ser permutados de $a_i!$ diferentes maneiras, e a permutação dos ciclos pode ser feita independentemente da ordem dos elementos dentro de cada ciclo.

  Acabámos de mostrar que cada permutação pode ser obtida de

$$\prod_{i=1}^{n} i^{a_i} a_i! = a_1! 1^{a_1} a_2! 2^{a_2} \dots a_n! n^{a_n}.$$

  maneiras.

  O número de permutações do tipo $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é então

$$\frac{n!}{a_1! 1^{a_1} a_2! 2^{a_2} \dots a_n! n^{a_n}}.$$

Observação. Repare que $a_1 1 + a_2 2 + \cdots + a_n n = n$ e que

$$\frac{n!}{a_1! 1^{a_1} a_2! 2^{a_2} \ldots a_n! n^{a_n}} \neq \frac{\binom{n}{a_1, a_2 \ldots, a_n}}{1^{a_1} 2^{a_2} \ldots n^{a_n}},$$

porque no segundo membro temos $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ o que não é o caso no primeiro membro.

Seja n um inteiro positivo. $c_{n,k} = \#$ permutações do conjunto $[n]$ com k ciclos. Se agruparmos as permutações em $\mathfrak{S}_n$ com o mesmo número de ciclos, temos

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} x^{\#\text{ciclos de } \pi} = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k.$$

Exemplo

$$\mathfrak{S}_1 = \{(1)\} \quad \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_1} x^{\#\text{ciclos de } \pi} = x^1 = \sum_{k=0}^{1} c_{1,k} x^k = x$$

$$\mathfrak{S}_2 = \{\pi_1 = (12), \pi_2 = (1)(2)\} \quad \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_2} x^{\#\text{ciclos de } \pi} = x^1 + x^2$$

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_2} x^{\#\text{ciclos de } \pi} = x^1 + x^2 = \sum_{k=0}^{2} c_{2,k} x^k = x(x+1) = (x+1) \sum_{k=0}^{1} c_{1,k} x^k$$

$$\mathfrak{S}_3 = \{(123), (132); (12)(3), (13)(2), (23)(1); (1)(2)(3)\}$$

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} x^{\#\text{ciclos de } \pi} = 2x^1 + 3x^2 + x^3 = \sum_{k=0}^{3} c_{3,k} x^k = x(x+1)(x+2)$$

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} x^{\#\text{ciclos de } \pi} = (x+2) \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_2} x^{\#\text{ciclos de } \pi}$$

Multiplicando ambos os membros da relação de recorrência

$$c_{n,k} = c_{n-1,k-1} + (n-1)c_{n-1,k}, \quad n > 1$$

por x^k e somando para todo o k de 0 até n, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k = \sum_{k=0}^{n} c_{n-1,k-1}x^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n} c_{n-1,k}x^k$$

$$= x\sum_{k=0}^{n} c_{n-1,k-1}x^{k-1} + (n-1)\sum_{k=0}^{n} c_{n-1,k}x^k, \quad c_{n-1,n} = 0$$

$$= x\sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k}x^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k}x^k = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k}x^k$$

Iterando

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k}x^k = (x+n-1)(x+n-2)\sum_{k=0}^{n-2} c_{n-2,k}x^k =$$

$$\ldots = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\sum_{k=0}^{1} c_{1,k}x^k = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x.$$

Função geradora do número de permutações de $\mathfrak{S}_n$ com respeito ao número de ciclos. Números de Stirling de primeira espécie

Os números $c_{n,0},\ c_{n,1},\ \ldots, c_{n,n}$ podem ser facilmente gerados como coeficientes de um certo polinómio,

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x.$$

Ou seja, $c_{n,k}$ é o coeficiente de x^k em $(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x$. Pondo $c_{0,0} := 1$, podemos estender este resultado a $n=0$ ($\sum_{k=0}^{0} c_{0,k} x^k = 1$).

Substitua x por $-x$ na igualdade acima e multiplique ambos os membros por $(-1)^n$, obtém-se

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} c_{n,k} x^k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Note que $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}(-1)^{2k} = (-1)^{n-k}$.
Definição Seja $s_{n,k} := (-1)^{n-k} c_{n,k}$. Este número é chamado Stirling de primeira espécie. A $c_{n,k}$ também se chama o número de Stirling de primeira espécie sem sinal.