Aula 3: Princípios elementares de contagem

oazenhas

2015

- Numa lista de 10 números $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, onde $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, há pelo menos três iguais.

$$\left\lceil \frac{10}{4} \right\rceil = 3$$

- Se n é um inteiro positivo talque $n/3 > 5$, e a, b, c são inteiros não negativos tais que $a + b + c = n$, então $a \geq 6$ ou $b \geq 6$ ou $c \geq 6$.

  princípio da média aritmética

$$\frac{a + b + c}{3} = \frac{n}{3} > 5$$

$\lceil n/3 \rceil = 6$

- Consideremos o K_{10} colorido a azul e a vermelho. Cada vértice tem nove arestas adjacentes. Então em cada vértice existem pelo menos 4 arestas a vermelho ou pelo menos 6 arestas a azul

Forma forte do princípio da gaiola dos pombos

$4 + 6 - 2 + 1$ arestas distribuídas por duas cores: vermelho e azul.

Em alternativa podemos pensar do seguinte modo:

Se colorirmos i arestas a vermelho então $9 - i$ arestas estão a azul. Para $4 \leq i \leq 9$ arestas a vermelho a conclusão é verdadeira.

Para $0 \leq i \leq 3$ arestas a vermelho temos $9 - i \geq 9 - 3 = 6$ arestas a azul e a conclusão tamabém é verdadeira.

- **Definição.** *Sejam m e n inteiros positivos ≥ 2. O número de Ramsey, $R(m, n)$, é o menor número R tal que se tivermos R pessoas numa sala então existe sempre um conjunto com pelo menos m pessoas que se conhecem mutuamente ou um conjunto com pelo menos n pessoas que se desconhecem mutuamente.*

  Equivalentemente
  Sejam m e n inteiros positivos ≥ 2. O número de Ramsey $R(m, n)$, é o menor número R tal que se colorirmos as arestas de K_R a vermelho ou azul, então podemos sempre encontrar na nossa figura um K_m com as a arestas todas a azul ou um K_n com as arestas todas as a vermelho.

- $R(3, 3) = 6$
- $R(2, 2) = 2$

  K_1 tem 0 arestas, K_2 tem a sua única aresta a azul ou a vermelho.

- $R(2, n) = n$, para todo o $n \geq 2$.

  K_n tem todas as arestas a vermelho ou existe pelo menos uma aresta a azul, ou seja, existe um K_2 a azul.

  K_{n-1} com as arestas todas a vermelho não tem pelo menos duas a azul, nem n arestas a vermelho.

- *Sejam m e n inteiros positivos ≥ 2. O número de Ramsey $R(m, n)$, é o menor número R tal que se colorirmos as arestas de K_R a vermelho ou azul, então podemos sempre encontrar na nossa figura um K_m com as a arestas todas a azul ou um K_n com as arestas todas as a vermelho.*
- $R(2, n) = n$, para todo o $n \geq 2$.

  K_n tem todas as arestas a vermelho ou existe pelo menos uma aresta a azul, ou seja, existe um K_2 a azul.

  K_{n-1} com as arestas todas a vermelho não tem pelo menos duas a azul, nem n arestas a vermelho.
- $R(n, 2) = n$, para todo o $n \geq 2$.

  Basta trocar as cores na resposta anterior
- $R(m, n) = R(n, m)$, $m, n \geq 2$.
- O número de Ramsey existe sempre?

- **Regra da soma.** *Se* $S = S_1 \cup \cdots \cup S_t$ *é a união disjunta dos conjuntos* S_i, $i = 1, \ldots, t$, *então* $|S| = \sum_{i=1}^{t} |S_i|$.
- *Nota.* Se $|S_1| = |S_2| = \ldots = |S_t| = m$ então $|S| = tm$.

- Sejam $n, k \geq 0$ inteiros. Dado um conjunto X com n elementos, consideremos todos os seus subconjuntos com k elementos. Quantos são?

- Dados os inteiros não negativos $n, k \geq 0$, definimos o número

$$\binom{n}{k} := \text{ número de subconjuntos com } k \text{ elementos}$$
$$\text{de um conjunto com } n \text{ elementos.}$$

Em particular, $\binom{n}{k} = 0$, se $k > n$, e $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, para todo o $n \geq 0$.

Se $k = 0$, como só há um conjunto vazio, $\binom{n}{0} = 1$.

Nota: Este número é dito um coeficiente binomial como veremos mais adiante.

- Exemplo. Vamos provar que a *regra da soma* produz a relação recorrência de Pascal dos coeficientes binomiais

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad n \geq k \geq 1,$$

com a condição inicial $\binom{n}{0} = 1$, $n \geq 0$.

Nota. A relação anterior é trivial para $k > n \geq 1$. Neste caso, temos $0 = 0$.

- **Prova.** Seja X um conjunto com $n \geq 1$ elementos. Seja S o conjunto de todos os subconjuntos com k elementos de X, onde $k \geq 1$,

$$S = \{A \subseteq X : |A| = k\} \quad \text{e} \quad |S| = \binom{n}{k}.$$

Fixemos $\mathbf{a} \in X$ (arbitrariamente). Vamos classificar os subconjuntos com k elementos de X, com respeito ao elemento $\mathbf{a}$, do seguinte modo: um subconjunto de X com k elementos, ou tem $\mathbf{a}$ como elemento ou não,

$$S_1 = \{A \subseteq X : |A| = k, \mathbf{a} \in A\}, \quad S_2 = \{A \subseteq X : |A| = k, \mathbf{a} \notin A\}.$$

É claro que $S = S_1 \cup S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ (S_1 e S_2 não têm conjuntos em comum).

Vamos calcular o cardinal de S_1 e S_2.

S_2 é formado por todos os subconjuntos com k elementos de $X \setminus \{\mathbf{a}\}$, portanto,

$$|S_2| = \binom{n-1}{k}.$$

- Consideremos $X \setminus \{\mathbf{a}\}$.

  Se acrescentarmos o elemento **a** a todos os subconjuntos com $k-1$ elementos de $X \setminus \{\mathbf{a}\}$, obtemos todos os conjuntos em S_1. Ou seja, $A \in S_1$ se e só se existe um subconjunto B com $k-1$ elementos de $X \setminus \{\mathbf{a}\}$ tal que $A = B \cup \{a\}$, donde

  $$|S_1| = \binom{n-1}{k-1}.$$

  A regra da soma produz então $|S| = |S_1| + |S_2|$, isto é,

  $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad n \geq k \geq 1,$$

- **Produto cartesiano de dois conjuntos**. Se S_1 e S_2 são dois conjuntos não vazios e finitos, então

$$S_1 \times S_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in S_1, a_2 \in S_2\}$$

é o conjunto dos pares ordenados (a_1, a_2), onde $a_i \in S_i$, $i = 1, 2$.

- Mais geralmente, para $t \geq 1$, se S_1, $S_2, \ldots, S_t$ são t conjuntos não vazios e finitos,

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_t = \{(a_1, \ldots, a_t) : a_i \in S_i, 1 \leq i \leq t\},$$

é o conjunto dos t-uplos $(a_1, \ldots, a_t)$, onde $a_i \in S_i$, para $1 \leq i \leq t$.

Regra do produto

- **Regra do produto.** Se $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_t$, onde S_1, $S_2, \ldots, S_t$ são t conjuntos não vazios e finitos, então

$$|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|.$$

- Nota: Se $|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_t| = m$ então $|S| = m^t$.
- **Exemplo**. Uma sequência de 0's e 1's é chamada uma *palavra* no *alfabeto* $\{0, 1\}$. O número de total de 0's e 1's é chamado o *comprimento* da palavra.

$$0111001100001$$

tem comprimento 13

- *Quantas palavras de comprimento n podemos formar no alfabeto $\{0, 1\}$?*

  Temos de determinar o conjunto S de todos os n-uplos $(a_1, \ldots, a_n)$ onde $a_i \in \{0, 1\}$, para $i = 1, \ldots, n$,

$$S = \underbrace{\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}}_{n},$$

$$|S| = 2^n.$$

- O número de palavras de comprimento n que podemos formar no alfabeto $\{1, \ldots, k\}$ é

$$k^n.$$

- O número de arestas de K_n é $\binom{n}{2}$, para todo o $n \geq 1$.
  Seja $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ o conjunto dos vértices de K_n. Então o conjunto E das arestas de K_n é definido por todos os subconjuntos de dois elementos distintos de V,
  $$E = \{\{x_i, x_j\} : 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$
  Portanto,
  $$|E| = \binom{n}{2},\ n \geq 1.$$

- O número de arestas de K_n é igual ao número de arestas de K_{n-1} mais $n-1$, para todo o $n \geq 2$. O K_n obtém-se de K_{n-1} adicionando-lhe um vértice e em seguida unindo este vértice aos restantes $n-1$ vértices de K_{n-1}. Ou seja, acrescentamos 1 vértice e $n-1$ arestas unindo este vértice aos restantes $n-1$ vértices de K_{n-1}. Então
  $\binom{n}{2} = n - 1 + \binom{n-1}{2},\ n \geq 2.$
  Por indução sobre n, podemos concluir,
  $\binom{n}{2} = (n-1) + \cdots + 2 + 1,\ n \geq 2$

- O número total de subconjuntos de um conjunto com $n \geq 0$ elementos é 2^n. Então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \ n \geq 0$$

  O lado direito da igualdade é o número de subconjuntos de um conjunto com $n \geq 0$ elementos. Esse número, pelo princípio da soma, pode ser calculado contando o número de subconjuntos de cardinanal i, $\binom{n}{i}$, para $i = 1, \ldots, n$, e, em seguida, somar tudo. É precisamente o que temos no lado esquerdo da igualdade.

- O lado esquerdo da igualdade acima é a soma da n-ésima linha do rectângulo de Pascal para $n \geq 0$.
- Soma da coluna 1 do rectângulo de Pascal até à linha n é igual ao elemento na linha $n + 1$ e coluna 2 do rectângulo de Pascal,

$$\binom{n+1}{2} = n + \cdots + 2 + 1.$$