Aula 5: Bijecções
Permutações, Arranjos
Combinações simples

oazenhas

2015

- **Proposição.** O número de subconjuntos com 2 elementos de $X = \{0, 1, \ldots, n\}$ é igual a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$.
- **Prova.** Por definição o número de subconjuntos com 2 elementos de um conjunto com $n+1$ elementos é $\binom{n+1}{2}$. Já mostrámos, por indução sobre n, que $\displaystyle\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$, e, do resultado anterior temos então
$$\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$
Vamos agora fazer uma demonstração por classificação dos subconjuntos com dois elemento de X de acordo com o maior elemento do subconjunto, e onde se usa seguidamente o princípio da soma.
Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, seja
$$S_i = \{\{i, x\} \subseteq X : 0 \leq x < i\} = \{\{0, i\}, \{\{1, i\}, \ldots, \{\{i-1, i\}\}$$
$$|S_i| = i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad S_i \cap S_j = \emptyset,\ i \neq j$$

$$S_i = \{\{i, x\} \subseteq X : 0 \leq x < i\} = \{\{0, i\}, \{\{1, i\}, \ldots, \{\{i - 1, i\}\}$$

$$|S_i| = i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \ i \neq j$$

Pelo princípio da soma e do resultado anterior

$$\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} |S_i| = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

- **Definição.** Dado $n \geq 1$, uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$ é uma palavra no alfabeto $\{1, \ldots, n\}$ de comprimento n com as letras todas distintas.
- $n = 1$, permutações de $\{1\}$: 1 $\qquad 1! = 1$ permutação.
  $n = 2$, permutações de $\{1, 2\}$: 12, 21, $\qquad 2! = 2.1$ permutações
  $n = 3$, permutações de $\{1, 2, 3\}$:
  123,132, 312;
  213, 231, 321, $\qquad 3! = 3.2.1 = 3.2!$ permutações
  $n = 4$ permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$:
  1234,1243, 1423, 4123,
  1324, 1342, 1432, 4132,
  3124, ...
  $\vdots$
- Denotamos por $\mathfrak{S}_n$ o conjunto de todas as permutações de $\{1, \ldots, n\}$.

  $\mathfrak{S}_n :=$ { palavras de comprimnto n, com letras distintas, no alfabeto $\{1, \ldots, n\}$}

  , $\quad |\mathfrak{S}_n| = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)\cdots 2.1$

Nota. Por convenção escrevemos $0! = 1$. Porquê?

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1},\ n > 0$$

Para $n = 0$ também faz sentido, $0! = 1$.

Outra explicação. Para $n = 0$, temos $\mathfrak{S}_0$ como o conjunto de todas as palavras sem letras, ou seja, no alfabeto $\emptyset$. Há apenas uma palavra sem letras, chamada a palavra vazia.

Configurações: Arranjos com repetição

- Dados n tipos de objectos podemos formar diferentes configurações de k objectos por vezes assumindo que essas configurações podem conter mais do que um objecto do mesmo tipo.
- Dados n tipos de objectos, as configurações de k objectos que dependem da ordem e podem conter mais do que um objecto do mesmo tipo são chamadas *arranjos com repetição de n elementos k a k*.
- O número de arranjos com repetição de um conjunto com n elementos k a k, pelo princípio da multiplicação, é

$$n^k.$$

O número de palavras de comprimento k que podemos formar com n símbolos.

Arranjos sem repetição

- Se na definição de arranjo não permitirmos repetição de qualquer elemento, dizemos que temos um arranjo simples ou arranjo sem repetição. Pelo princípio da multiplicação generalizada, o número de arranjos sem repetição de n elementos k a k é

  $$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

  chamado *coeficiente factorial.*

- *Número de palavras de comprimento k no alfabeto $\{1,\ldots,n\}$ sem repetição de letras*

  Número de maneiras de colocar em fila k objectos de um conjunto de n objectos distintos.

- Quando $n=k$ obtemos $n(n-1)\cdots 2.1$ e os arranjos são designados por *permutações.*

Combinações simples

- Dado um conjunto X com n elementos, as escolhas de k elementos sem repetição e sem que a ordem segundo a qual os elementos são escolhidos tenha qualquer importância, isto é a escolha de conjuntos de cardinalidade k, designam-se por combinações simples ou combinações de n, k a k
- *Quantas maneiras temos de seleccionar k objectos distintos de um conjunto de n objectos distintos?*
- Queremos seleccionar um comité de k pessoas de um grupo de n das quais o José. Quantos comités temos com o José? E sem o José?

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Alguma terminologia

- $\binom{n}{k}$ lê-se habitualmente:
  - número de k-conjuntos de um n-conjunto; ou
  - combinações de n elementos, k a k; ou
  - n, k a k; ou
  - n escollhe k (em inglês *n choose k*); ou
  - coeficiente binomial de n sobre k.

Uma propriedade

- **Proposição.** Para todo $0 \leq k \leq n$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- **Prova.** Vamos fazer uma prova bijectiva. O lado esquerdo da igualdade conta o número de subconjuntos com k elementos de $X = \{1, \cdots, n\}$, e o lado direito o número de subconjuntos com $n-k$ elementos de X.

  Consideremos a bijecção f do conjunto $\mathcal{S}$ de todos subconjuntos com k elementos de $X = \{1, \cdots, n\}$ para o conjunto $\mathcal{S}'$ de todos subconjuntos com $n-k$ elementos de X,
$$f : \mathcal{S} = \{S \subseteq X : |S| = k\} \longrightarrow \mathcal{S}' = \{S' \subseteq X : |S'| = n{-}k\},\ f(S) = X \backslash S$$
$$|X \setminus S| = |X| - |S| = n - k$$
  Pelo princípio da bijecção,
$$|\mathcal{S}| = \binom{n}{k} = |\mathcal{S}'| = \binom{n}{n-k}.$$

- Exercício: provar que f é uma bijecção.

- **Proposição.** Dados os inteiros $n \geq k \geq 0$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

- **Prova.** Já provámos esta fórmula por indução sobre n. Essa demonstração não nos dá nenhum significado enumerativo para a fórmula. Faremos agora uma demonstração onde essa explicação está presente.

  Queremos contar todos os subconjuntos de k elementos que podemos formar no conjunto $X = \{1, \ldots, n\}$.

- Vamos contar de uma maneira errada.

  Para formar o conjunto $\{b_1, \ldots, b_k\}$ no conjunto X

  - podemos escollher b_1 de n maneiras
  - podemos escollher b_2 de $n-1$ maneiras - todas excepto b_1
  - podemos escollher b_3 de $n-2$ maneiras - todas excepto b_1 e b_2

$\vdots$

  - podemos escollher b_k de $n-k+1$ maneiras - todas excepto $b_1, \ldots, b_{k-1}$

  O número total de escolhas é $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

- O que nós contámos foram k-subconjuntos ordenados, isto é, formados por elementos ordenados, pois não distinguimos conjuntos que diferem entre si apenas pela ordem em que os elementos estão neles dispostos.

$$\{1,2\} = \{2,1\}, \ \ \{1,2,3\} = \{2,1,3\} = \{3,2,1\}$$

  Acabámos então de mostrar que o número de k-subconjuntos ordenados em X é igual a $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

- Vamos agora contar de outra maneira os k-subconjuntos ordenados de X.

  Sabemos que existem $\binom{n}{k}$ maneiras e escolher um k-conjunto de X. Dado um k-conjunto de X, existem $k!$ maneiras de o ordenar.

  Portanto, o número de k-conjuntos ordenados de X é $k!\dbinom{n}{k}$.

- Como contámos os mesmos objectos de duas maneiras diferentes, temos

  $\#$ k-conjuntos ordenados de $X = k!\dbinom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

  Donde,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$