Aula 9: Contar funções
Bolas distintas em caixas distintas
Partições de um conjunto
Números de Stirling de segunda espécie

oazenhas

Março 5, 2015

Bolas distintas em caixas distintas/funções

- *De quantas maneiras podem ser colocadas r bolas distinguíveis em n caixas distinguíveis?*

  Uma distribuição de r bolas distintas por n caixas distintas, podendo haver caixas vazias, fica caracterizada dizendo para cada objecto qual a caixa onde ele vai ficar. Como há r objectos e cada um tem n escolhas possíveis, o número de distribuições é

$$n^r$$

- *Se $|R| = r$ e $|N| = n$, quantas funções existem de R para N?*

  Uma função $f : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, n\}$ fica caracterizada pela lista $(f(1), f(2), \ldots, f(r))$. Como qualquer elemento desta lista pode tomar qualquer valor em $\{1, \ldots, n\}$, então o número total de listas distintas é n^r,

$$|\{f : R \to N\}| = n^r = |N|^{|R|}$$

funções injectivas/no máximo uma bola por caixa

$$|\{f : R \to N\}| = n^r = |N|^{|R|}.$$

- Quantas destas funções são injectivas?

  $$n(n-1)\cdots(n-r+1) = \prod_{i=1}^{r}(n-i+1).$$

- Quando $n = r$ temos $n!$ funções bijectivas.

Bolas distintas em caixas distintas sem caixas vazias/funções sobrejectivas

- *De quantas maneiras podem ser colocadas r bolas distintas em n caixas distintas com nenhuma vazia?*
- *Quantas funções sobrejectivas existem de um conjunto R com r elementos para um conjunto N com n elementos?*

Partições (ordenadas) de conjuntos

- Se R é a união disjunta dos conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, dizemos que $A_1, \ldots, A_n$ é uma partição de A podendo haver partes vazias. Chamamos a $A_1, \ldots, A_n$ os blocos de R, e às respectivas cardinalidades os tamanhos dos blocos.

  $|R| = |A_1| + \ldots + |A_n|$
- Seja $f : R \to N$, uma função de R para N, onde $N = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Consideremos

  $A_1 = \{x \in R : f(x) = y_1\}$

  $A_2 = \{x \in R : f(x) = y_2\}$

  $\vdots$

  $A_n = \{x \in R : f(x) = y_n\}$
- A função f fica caracterizada pela lista ordenada $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ de n subconjuntos de R (as pré-imagens de $y_1, y_2, \ldots, y_n$), podendo alguns deles ser o conjunto vazio, no caso em que a função não é sobrejectiva. Então $R = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e dizemos que $(A_1, \ldots, A_n)$ forma uma partição *ordenada*, podendo haver partes vazias, do conjunto R.

- Se $f : R \to N$ for sobrejectiva então os blocos da partição são não vazios, e $(A_1, \ldots, A_n)$ forma uma partição *ordenada* de conjuntos não vazios de R.
- *Quantas funções sobrejectivas existem de R para N ?*

  É igual ao número de partições ordenadas de R em n conjuntos não vazios $=$ número de maneiras de colocar r bolas distintas em n caixas distintas sem deixar caixas vazias

Partições (não ordenadas) de conjuntos e números de Stirling

- Os nossos objectos combinatórios de estudo são agora *as partições (não ordenadas) dum conjunto em conjuntos não vazios,*

  $R = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ união disjunta de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ não vazios.

- $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tem 15 ($2^4 - 1$, exercício 46) partições em 2 conjuntos

1234|5	123|45	145|23
1235|4	124|35	234|15
1345|2	125|34	235|14
1245|3	134|25	245|13
2345|1	135|24	345|12

Partições (não ordenadas) de conjuntos e números de Stirling

- **Definição** O número de Stirling $S_{r,n}$ (de segunda espécie) é o número de partições em n partes de um conjunto de r elementos.

$$S_{r,n} = 0,\ n > r, \quad S_{r,1} = 1 = S_{r,r},\ r \geq 1$$

$$S_{r,2} = 2^{r-1} - 1$$

  Por convenção escrevemos $S_{0,0} := 1$.

  • Número de Bell. O número de todas as partições (em partes não vazias) de um conjunto com r elementos é o número de Bell $Bell(r)$,

$$Bell(r) = \sum_{k=1}^{r} S_{r,k}$$

$$Bell(0) := 1$$

- **Proposição.** O número de funções sobrejectivas de R para N,
  $|\{f : R \to N, f \text{ sobrejectiva}\}| =$
  $=$ número de partições ordenadas de R em n partes não vazias
  $= n! S_{r,n}$