Exercícios

1.1. Mostre que num domínio de integridade D:

(a) $\langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle$ sse $b \mid a$.

(b) $\langle a\rangle = \langle b\rangle$ sse $a \sim b$.

(c) $\langle a\rangle = D$ sse $a \in D^*$.

(d) $D[x]^* = D^*$.

1.2. Mostre que num domínio de integridade D:

(a) $u \in D^*$ sse $u \mid d$ para todo o $d \in D$.

(b) Qualquer associado de uma unidade é uma unidade.

(c) Qualquer associado de um elemento irredutível é irredutível.

1.3. Demonstre a Proposição 1.2.

1.4. Verifique que um anel (comutativo com identidade) A é um domínio de integridade se e só $ab \in \langle 0\rangle \Rightarrow a \in \langle 0\rangle$ ou $b \in \langle 0\rangle$.

1.5. (a) Determine as unidades do *anel dos inteiros de Gauss* $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Verifique que $1 \pm i$ são elementos irredutíveis de $\mathbb{Z}[i]$. Observe que $2 \in \mathbb{Z}[i]$ não é irredutível em $\mathbb{Z}[i]$ apesar de o ser em $\mathbb{Z}$.

1.6. Seja D um domínio de integridade onde é possível definir uma função $N\colon D \to \mathbb{N}_0$ (chamada *norma*) com as seguintes propriedades:

(1) $N(a) = 0$ sse $a = 0$.

(2) $N(a) = 1$ sse $a \in D^*$.

(3) $N(ab) = N(a)N(b)$ para quaisquer $a, b \in D \setminus \{0\}$.

Mostre que todo o elemento de $D \setminus D^*$ não nulo admite uma factorização como produto de elementos irredutíveis.

1.7. Considere o anel $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ onde $d \neq 0, 1$ é *livre de quadrados*, isto é, para qualquer primo $p \in \mathbb{Z}$, $p^2 \nmid d$.

(a) Mostre que $a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d}$ se e só se $a = a'$ e $b = b'$.

(b) Prove que a aplicação $N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{N}_0$ definida por $N(a + b\sqrt{d}) = |a^2 - db^2|$ é uma norma (recorde o exercício anterior).

(c) Conclua que em $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ os elementos 3 e $2 \pm \sqrt{-5}$ são irredutíveis.

(d) Mostre que em $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ todos os elementos admitem factorizações em irredutíveis, mas a decomposição não é, em geral, única.

1.8. Seja C um corpo. Verdadeiro ou falso?

(a) Se $a, b, c \in C^*$ então $a \in \text{mdc}(b, c)$.

(b) C é um DFU.

1.9. Seja D um DIP e $a, b \in D$. Prove que:

(a) $d \in \text{mdc}(a, b)$ se e só se $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$.

(b) $m \in \text{mmc}(a, b)$ se e só se $\langle m \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$.

(c) Se $d \in \text{mdc}(a, b)$ então existem $p, q \in D$ tais que $d = pa + qb$ (*Relação de Bézout*).

1.10. Seja D um domínio de integridade e $a_1, \ldots, a_n \in D$.

(a) Defina $\text{mdc}(a_1, \ldots, a_n)$ e $\text{mmc}(a_1, \ldots, a_n)$.

(b) Mostre que se $d' \in \text{mdc}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ e $d \in \text{mdc}(d', a_n)$ então $d \in \text{mdc}(a_1, \ldots, a_n)$.

(c) Enuncie e demonstre o resultado análogo para mmc's.

1.11. Seja D um DFU e C o seu corpo de fracções. Mostre que é possível escrever qualquer elemento de C como a/b com $a, b \in D$ elementos *coprimos* (ou *primos entre si*, isto é, tais que $\text{mdc}(a, b) = D^*$).

1.12. Seja $A = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \colon p(x) \text{ não tem monómio de grau } 1\}$.

(a) Verifique que A é um anel (subanel de $\mathbb{R}[x]$).

(b) Verifique que todos os polinómios de grau 2 ou 3 são irredutíveis em A.

(c) Verifique que os polinómios $x^2(x^2 + x)^2$ e $x^3(x^2 + x)$ não têm mdc em A. Que pode dizer do mmc?

(d) Prove que todo o elemento de A se factoriza como produto de irredutíveis, mas esta factorização nem sempre é única.

(**Observação:** este exercício mostra que um subanel de um DFU não é necessariamente um DFU.)

1.13. Prove que uma família não vazia de ideais de um DIP tem elemento maximal.

1.14. Seja D um domínio de integridade.

(a) Verifique que se $p(x) \in D[x]$ é primitivo e $q(x) \mid p(x)$, então $q(x)$ é primitivo.

(b) Mostre que todo o polinómio primitivo de $D[x]$ admite factorizações em irredutíveis em $D[x]$.

1.15. Seja D um DFU, $a \in D$, com $a \neq 0$, e $p(x), q(x) \in D[x]$ tais que $q(x) \mid ap(x)$ e $q(x)$ é primitivo. Prove que $q(x) \mid p(x)$.

1.16. Seja D um DFU. Mostre que se $1 \in \mathrm{mdc}(c, d)$ e $c \mid ad$ então $c \mid a$.

1.17. Prove que $\mathbb{Z}[i]$ é um domínio euclidiano. Calcule $\mathrm{mdc}(9 - 5i, -9 + 13i)$.

1.18. Seja D um domínio euclidiano com função euclidiana δ.

(a) Prove que $a \in D$ é uma unidade se $\delta(a)$ for um mínimo do conjunto $\{\delta(x) \mid x \in D, x \neq 0\}$. Mostre que se $\delta(a) \leq \delta(ab)$ para quaisquer $a, b \in D \setminus \{0\}$, então a implicação recíproca também é verdadeira.

(b) Determine as unidades de $\mathbb{Z}[i]$.

1.19. Seja D um domínio euclidiano com função euclidiana δ (satisfazendo $\delta(a) \leq \delta(ab)$ para quaisquer $a, b \in D \setminus \{0\}$). Seja $I \neq \{0\}$ um ideal de D. Prove que se existir $a \in I$ tal que $\delta(a) = \delta(1)$, então $I = D$.

1.20. Seja D um domínio euclidiano com função euclidiana δ (satisfazendo $\delta(a) \leq \delta(ab)$ para quaisquer $a, b \in D \setminus \{0\}$). Mostre que se n é um inteiro tal que $\delta(1) + n > 0$, então a função $\delta' \colon D \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ definida por $\delta'(a) = \delta(a) + n$ é também uma função euclidiana em D.

1.21. Seja D um domínio euclidiano. Mostre, usando o método das divisões sucessivas (Euclides), que dados $a, b \in D$ (não simultaneamente nulos), existem $p, q \in D$ tais que $pa + qb \in \mathrm{mdc}(a, b)$.

1.22. (a) Sejam A um DIP, B um domínio de integridade e $f \colon A \to B$ um homomorfismo sobrejectivo de anéis com $\mathrm{Nuc} f \neq 0$.

(i) Prove que $\mathrm{Nuc} f$ é um ideal maximal de A.

(ii) Conclua que B é um corpo.

(b) Sendo D um domínio de integridade, mostre que $D[x]$ é um DIP se e só se D é um corpo.

1.23. Prove que os anéis $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$ e $\mathbb{Z}_{nm}$ são isomorfos se $\mathrm{mdc}(n, m) = 1$. Mais geralmente, mostre que $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d \oplus \mathbb{Z}_k$ para $d = \mathrm{mdc}(n, m)$ e $k = \mathrm{mmc}(n, m)$.