Exercícios

3.1. Mostre que um anel A é noetheriano se e só se todo o ideal $I \subseteq A$ é finitamente gerado.

3.2. Seja K um corpo e $A = K[x_1, \ldots, x_n]$. Se $F \subseteq A$ é uma família de polinómios, designamos por $\mathcal{Z}(F)$ o conjunto dos zeros comuns aos polinómios de F:

$$\mathcal{Z}(F) = \{a \in K^n \mid p(a) = 0, \forall p \in F\}.$$

Um *conjunto algébrico* $Y \subseteq K^n$ é um conjunto para o qual existe uma família $F \subseteq A$ tal que $Y = \mathcal{Z}(F)$. Dado um conjunto $O \subseteq K^n$, diz-se que O é *aberto* se $K^n \setminus O$ é um conjunto algébrico. Mostre que:

(a) $\emptyset$ e K^n são abertos.

(b) Se $\{O_j\}_{j \in J}$ são abertos, então $\bigcup_{j \in J} O_j$ é aberto.

(c) Se $\{O_1, \ldots, O_m\}$ são abertos, então $\bigcap_{i=1}^m O_j$ é aberto.

3.3. Prove que os ideais de $\mathbb{Z}$ satisfazem as seguintes propriedades:

(a) $\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle$.

(b) $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle \mathrm{mdc}\,(a, b) \rangle$.

(c) $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle \mathrm{mmc}\,(a, b) \rangle$.

(d) $\langle a \rangle : \langle b \rangle = \langle \frac{a}{\mathrm{mdc}\,(a,b)} \rangle$.

(e) $\sqrt{\langle a \rangle} = \langle p_1 \cdots p_t \rangle$ se $p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t}$ é a factorização prima de a.

3.4. Seja A um anel comutativo e $I, I_1, \ldots, I_r$ ideais de A. Mostre que:

(a) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

(b) $\sqrt{I_1 \cdots I_r} = \sqrt{\bigcap_{j=1}^r I_j} = \bigcap_{j=1}^r \sqrt{I_j}$.

(c) $\sqrt{I^r} = \sqrt{I}$.

3.5. Seja D um d.i.p. Mostre que um ideal $Q \neq \{0\}$ é primário se e só se $Q = \langle p \rangle^n$, onde $p \in D$ é primo e $n \in \mathbb{N}$.

3.6. Determine o radical $\sqrt{I}$ de cada um dos seguintes ideais de $K[x, y]$:

(a) $I = \langle x^2, y \rangle$.

(b) $I = \langle x^3, xy, y^2 \rangle$.

3.7. Determine decomposições primárias para cada um dos seguintes ideais:

(a) $I = \langle 4, 2x, x^2 \rangle$ em $\mathbb{Z}[x]$.

(b) $I = \langle x^3 - xy, 3x^2 - xy, 3x^2y - y^2 \rangle$ em $K[x, y]$.

3.8. Determine os ideais maximais dos anéis:

(a) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 \rangle$.

(b) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$.

3.9. Seja J um ideal de um anel A. Mostre que $I \supseteq J$ é um ideal maximal de A se e só se o ideal I/J é um ideal maximal de A/J.

3.10. Sejam $Y_1 = \mathcal{Z}(p_1, \ldots, p_r)$ e $Y_2 = \mathcal{Z}(q_1, \ldots, q_s)$ conjuntos algébricos em K^n. Mostre que $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ se e só se $\langle p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s \rangle = K[x_1, \ldots, x_n]$.

3.11. Se $I_1, \ldots, I_r \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ são ideais, mostre que

$$\mathcal{Z}(I_1, \ldots, I_r) = \mathcal{Z}(I_1) \cup \cdots \cup \mathcal{Z}(I_r).$$

3.12. Se $Y_1 = \mathcal{Z}(I_1)$ e $I_2 = \mathcal{Z}(I_2)$ são conjuntos algébricos mostre que o produto cartesiano $Y_1 \times Y_2$ é um conjunto algébrico. Que ideal corresponde a $Y_1 \times Y_2$?