Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra Comutativa**

SOLUÇÕES **Teste 1** 11/10/2011

1.(a) $\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$ pois $1 = 1 \cdot 1 = 3 \cdot 7 = 9 \cdot 9$ e os restantes elementos de $\mathbb{Z}_{10}$ são todos divisores de zero (logo não podem ser invertíveis).

(b) $6 \cdot 1 = 6, 6 \cdot 3 = 8, 6 \cdot 7 = 2$ e $6 \cdot 9 = 4$.

(c) $2 = 2 \cdot 6$; como nem 2 nem 6 são unidades, 2 é redutível.

Provemos que 2 é no entanto primo em $\mathbb{Z}_{10}$ (para evitar eventuais confusões usaremos a notação $\overline{a}$ para distinguir um elemento de $\mathbb{Z}_{10}$ do respectivo inteiro a). Suponhamos então que $\overline{2} \mid \overline{a}\,\overline{b}$ em $\mathbb{Z}_{10}$. Então $\overline{2} \mid \overline{ab}$, isto é, $\overline{ab} = \overline{k}\,\overline{2}$ para algum $\overline{k} \in \mathbb{Z}_{10}$. Isto implica que $ab = 2k + 10r = 2(k+5r)$ para algum inteiro r. Portanto, $2 \mid ab$ em $\mathbb{Z}$. Como 2 é primo em $\mathbb{Z}$, $2 \mid a$ ou $2 \mid b$. Logo $\overline{2} \mid \overline{a}$ ou $\overline{2} \mid \overline{b}$.

2.(a) Seja $u_1 + iv_1$ uma unidade de $\mathbb{Z}[i]$. Então existem inteiros u_2 e v_2 tais que

$$(u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) = 1.$$

Aplicando a função euclidiana δ a ambos os membros desta igualdade obtemos

$$(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2) = 1.$$

Trata-se de uma igualdade em $\mathbb{N}$ pelo que necessariamente $u_1^2 + v_1^2 = u_2^2 + v_2^2 = 1$, ou seja, $u_1 = \pm 1, v_1 = 0$ ou $u_1 = 0, v_1 = \pm 1$. Portanto as únicas possíveis unidades de $\mathbb{Z}[i]$ são os elementos $1, -1, i, -i$. Claramente todas são, pelo que $\mathbb{Z}[i]^* = \{1, -1, i, -i\}$.

(b) Se $2 - i = (a + ib)(c + id)$ então $\delta(2 - i) = \delta((a + ib)(c + id))$, isto é,

$$5 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Como 5 é primo em $\mathbb{Z}$, necessariamente, $a^2 + b^2 = 1$ ou $c^2 + d^2 = 1$, o que significa que em qualquer dos casos $a + ib$ ou $c + id$ é uma unidade, o que mostra que $2 - i$ é irredutível.

Por outro lado, suponhamos $4 + 3i = (a + ib)(c + id)$. Então, aplicando novamente δ, obtemos $25 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. A única factorização de 25 em $\mathbb{Z}$ que poderá conduzir-nos a uma factorização não trivial de $4+3i$ em $\mathbb{Z}[i]$ é $a^2 + b^2 = 5 = c^2 + d^2$ que tem soluções em $\mathbb{Z}$. Testando-as encontramos a factorização

$$4 + 3i = (2 - i)(1 + 2i).$$

Já vimos que $2 - i$ é irredutível. Como $1 + 2i = i(2 - i)$ é associado de $2 - i$, também é irredutível. Logo esta é a factorização procurada.

(c) Uma vez que

$$\frac{4+3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

então $4+3i = (1+i)5 + (-1-2i)$. Por sua vez, $5 = (-1-2i)(-1+2i)$. Assim, pelo algoritmo de Euclides, $-1-2i$ é um mdc de $4+3i$ e 5. Logo

$$\text{mdc}(4+3i, 5) = \{-1-2i, 1+2i, 2-i, -2+i\}.$$

3. (i)⇒(ii) Sendo A um corpo, dados $a(x), b(x) \in A[x]$ com $b(x) \neq 0$ sabemos que existem $q(x), r(x) \in A[x]$ tais que $a(x) = q(x)b(x) + r(x)$ com $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(b(x))$ (equivalentemente, $gr(r(x)) + 1 < gr(b(x)) + 1$). Portanto, fazendo $\delta(p(x)) = gr(p(x)) + 1$, temos claramente uma função euclidiana em $A[x]$.

   (ii)⇒(iii) Basta aplicar o teorema estudado nas aulas que assegura que todo o domínio euclidiano é um DIP.

   (iii)⇒(i) Seja $a \neq 0$ em A. Teremos que mostrar que a é invertível. Para isso consideremos o ideal $I = \langle a, x \rangle$ de $A[x]$, que é principal. Portanto, existe $p(x) \in A[x]$ tal que $I = \langle p(x) \rangle$. Como $a, x \in I$ então existem $a(x)$ e $b(x)$ em $A[x]$ tais que $a = a(x)p(x)$ e $x = b(x)p(x)$. Consequentemente, $gr(p(x)) = 0$ (observe que $A[x]$ sendo um domínio de integridade, implica necessariamente que A o seja), isto é, $p(x) = d \in A$. Então $x = b(x)d$, o que implica que $cd = 1$ para algum $c \in A$. Portanto d é uma unidade e $I = \langle d \rangle = A[x]$. Daqui podemos concluir que $1 \in I$, isto é, $1 = ap_1(x) + xp_2(x)$ para algum par $p_1(x), p_2(x)$ em $A[x]$. Isto implica $1 = ab$ para algum $b \in A$ e a é assim invertível.