

(Justifique convenientemente as suas respostas.)

1. Sejam N_1, N_2, N_3 submódulos de um A -módulo M .
 - (a) Prove que $N_1 + N_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in N_1, v_2 \in N_2\}$ é um submódulo de M .
 - (b) Mostre que, se $N_1 \subseteq N_3$, então $N_1 + (N_2 \cap N_3) = (N_1 + N_2) \cap N_3$.
 2. (a) Seja A um anel comutativo com identidade. Mostre que os submódulos do A -módulo A são os ideais de A . Determine os submódulos do \mathbb{Q} -módulo \mathbb{Q} .
 - (b) Determine uma base do \mathbb{Q} -módulo \mathbb{Q} . Qual é a sua dimensão?
 - (c) Mostre que o \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Q} não tem nenhum conjunto finito de geradores.
 3. Sejam $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow M$ homomorfismos de A -módulos.
 - (a) Descreva o A -módulo $Im(f) \oplus N(g)$.
 - (b) Mostre que se $gf = 1_M$ então $Im(f) \oplus N(g) \simeq N$ (descreva o isomorfismo).
-